7 El Espacio Afín

Puntos y Vectores

Un **punto** es una terna ordenada de números (llamados coordenadas) $P(x,y,z)$ que determinan una localización en un espacio de tres dimensiones.

Un **vector** en el espacio es una terna ordenada de números (llamados **componentes**) $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ que determinan un movimiento llamado traslación:

$$P \longmapsto P + \vec{v}$$

Se designa por $\mathbb{R}^3$ al conjunto de dichos vectores

Se define la **suma** de vectores y el **producto por escalares** (números) mediante:

$$(u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

$$k \cdot (v_1, v_2, v_3) = (kv_1, kv_2, kv_3)$$

El vector de va de un punto a otro punto se obtiene así:

$$\overrightarrow{AA'} = A' - A = (x' - x, y' - y, z' - z)$$

Sumamos vectores gráficamente con la **regla del paralelogramo**:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{BC} \Longrightarrow \vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$$

El vector $\lambda\vec{v}$ tiene la misma dirección que $\vec{v}$, igual (distinto) sentido si $\lambda > 0$ ($\lambda < 0$) y longitud igual a la de $\vec{v}$ multiplicada por $|\lambda|$.

Combinaciones Lineales. Dependencia

Una **combinación lineal** de $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ es un vector

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son números reales.

Un conjunto de vectores se dice que es linealmente **dependiente** cuando uno de ellos es combinación lineal de los restantes. En caso contrario, se dice que son linealmente **independientes**.

Dos vectores no nulos son dependientes cuando:

- Sus dibujos son **paralelos**.
- Sus componentes son **proporcionales**.

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} = \frac{v_3}{u_3}$$

Tres vectores no nulos son dependientes cuando:

- Sus dibujos son **coplanarios**.
- El **determinante** de sus componentes es **cero**.

$$\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} \text{ l.d. } \Leftrightarrow \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

Bases y Coordenadas

Una **base** en el espacio es el conjunto formado por tres vectores linealmente independientes.

Propiedad fundamental:

Dada una base $\mathfrak{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ en el espacio, todo vector $\vec{x}$ puede expresarse como combinación lineal única de los vectores de la base:

$$\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + x_3\vec{u}_3$$

A (x_1, x_2, x_3) se les llama **coordenadas** de $\vec{x}$ en $\mathfrak{B}$.

Ecuaciones de una recta

Si r pasa por $A = (x_0, y_0, z_0)$ y lleva la dirección del vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, tiene

Ecuación **vectorial**:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \cdot (v_1, v_2, v_3)$$

Ecuaciones **paramétricas**

$$\begin{cases} x = x_0 + v_1\lambda \\ y = y_0 + v_2\lambda \\ z = z_0 + v_3\lambda \end{cases}$$

Ecuación **continua**

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

También toda recta puede expresarse (**implícitas**) como solución de un sistema de rango 2:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

Ecuaciones de un Plano

Sea $A = (x_0, y_0, z_0)$ un punto y $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dos vectores independientes.

El plano π que pasa por ese punto y tiene la dirección de dichos vectores tiene las siguientes:

Ecuaciones **paramétricas**:

$$\begin{cases} x = x_0 + u_1\lambda + v_1\mu \\ y = y_0 + u_2\lambda + v_2\mu \\ z = z_0 + u_3\lambda + v_3\mu \end{cases}$$

Ecuación **general** o **implícita**:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = ax + by + cz + d = 0$$

7 El Espacio Afín

Posiciones Relativas de dos Rectas

Consideremos las rectas r que pasa por P_r con la dirección de $\vec{v}_r$ y s que pasa por P_s y tiene dirección $\vec{v}_s$

Primero examinamos los vectores $\{\vec{v}_r\,, \vec{v}_s\}$:

A. Encontramos $\vec{v}_r \parallel \vec{v}_s$:

1. Si $P_r \in s$: son coincidentes.
2. Si $P_r \notin s$: son paralelas.

B. Encontramos $\vec{v}_r \nparallel \vec{v}_s$:

1. Si $\det\left[\overrightarrow{P_rP_s}\,, \vec{v}_r\,, \vec{v}_s\right] = 0$: rectas secantes.
2. Si $\det\left[\overrightarrow{P_rP_s}\,, \vec{v}_r\,, \vec{v}_s\right] \neq 0$: rectas que se cruzan.

Para hallar su intersección podemos escribir sus ecuaciones paramétricas (con distinto parámetro) e igualar o escribir una en paramétricas y la otra en forma continua para sustituir, de modo que hallemos el valor de un parámetro que proporcione el punto.

Posiciones de Recta y Plano

Consideremos la recta r que pasa por el punto P_r y que tiene dirección $\vec{v}_r$ y el plano $\pi : ax + by + cz + d = 0$.

A. Si $av_1 + bv_2 + cv_3 \neq 0$ son secantes.

B. Si $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$:

1. Si $P_r \in \pi$: la recta está contenida en el plano.
2. Si $P_r \notin \pi$: la recta es paralela al plano.

Para calcular su intersección ponemos la recta en paramétricas, el plano en general y sustituimos. El valor del parámetro nos proporciona la intersección.

Posiciones de dos Planos

Dados dos planos por sus ecuaciones generales:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

a) Si $\operatorname{rg} C = \operatorname{rg} A = 2$: son secantes en una recta. La solución nos da sus ecuaciones paramétricas.

b) Si $\operatorname{rg} C = 1\,,\ \operatorname{rg} A = 2$: son paralelos. Esto es:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} \neq \frac{d_2}{d_1}$$

c) Si $\operatorname{rg} C = \operatorname{rg} A = 1$: son planos coincidentes. Ello ocurre cuando:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{d_2}{d_1}$$