6 Sistemas de Ecuaciones

Definición y Notaciones

Un **sistema** de m ecuaciones lineales con n incógnitas es un conjunto de igualdades de la forma:

$$S:\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \cdots & = & \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

Donde:

- a_{ij} son llamados **coeficientes**
- b_j son llamados **términos** independientes
- x_i son las **incógnitas**.

- Diremos que $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ es una solución del sistema S si al sustituir en el sistema la incógnita x_i por s_i obtenemos m igualdades numéricas.
- **Resolver** S es averiguar si tiene solución, encontrando **todas sus soluciones**, si las hubiera.

Clasificación de los Sistemas Lineales

Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es:

- **Incompatible** si no tiene ninguna solución.
- **Compatible determinado** si tiene solución única.
- **Compatible indeterminado** si tiene infinitas soluciones.

La interpretación de un sistema

2×2 incompatible: dos rectas paralelas.

2×2 compatible indeterminado: dos rectas coincidentes.

3×2 compatible determinado: tres rectas secantes en un punto.

3×2 incompatible: tres rectas secantes dos a dos, pero las tres no tienen ningún punto en común.

Sistemas Equivalentes. Transformaciones

Diremos que dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes** si tienen las **mismas soluciones**.

Si sometemos un sistema de ecuaciones a las siguientes **transformaciones** obtendremos otro equivalente:

- Permutar ecuaciones.
- Multiplicar los dos miembros de una ecuación por un número distinto de cero.
- Suprimir, o añadir, una ecuación que es combinación lineal de otras.
- Sustituir una ecuación por la resultante de añadirle una combinación lineal de otras ecuaciones.

Sistemas Escalonados: Método de Gauss

A continuación se muestra un sistema 3×3 que es escalonado:

$$\left\{\begin{array}{r} \square x+\square y+\square z=\square \\ \square y+\square z=\square \\ \square z=\square \end{array}\right.$$

El **Método de Gauss** es un procedimiento para obtener un sistema escalonado y equivalente a uno dado, usando las transformaciones anteriores.

Sistema compatible determinado.

$$S:\left\{\begin{array}{r} x+2y-z=1 \\ x+y+z=3 \\ 2x+4y-z=0 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} e'_2=e_2-e_1 \\ e'_2=e_3-2e_1 \end{array}\right. \quad S':\left\{\begin{array}{r} x+2y-z=1 \\ -y+2z=2 \\ z=-2 \end{array}\right.$$

En el escalonado la tercera igualdad nos da una incógnita. Hallamos la solución en cascada:

$$\left|\begin{array}{lcl} e_3 & \to & z=-2 \\ e_2 & \to & y=-2+2z=-6 \\ e_1 & \to & x=1-2y+z=11 \end{array}\right.$$

Sistema compatible indeterminado.

$$S:\left\{\begin{array}{r} x+2y-z=1 \\ x+y+z=3 \\ 2x+4y-2z=2 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} e'_2=e_2-e_1 \\ e'_2=e_3-2e_1 \end{array}\right. \quad S':\left\{\begin{array}{r} x+2y-z=1 \\ -y+2z=2 \\ 0=0 \end{array}\right.$$

Vemos que la tercera ecuación se cumple siempre. Una incógnita toma cualquier valor. Solución:

$$\left|\begin{array}{lcl} e_3 & \to & z=t \\ e_2 & \to & y=-2+2z=-2+2t \\ e_1 & \to & x=1-2y+z=5-3t \end{array}\right.$$

Sistema incompatible.

$$S:\left\{\begin{array}{r} x+2y-z=1 \\ x+y+z=3 \\ 2x+4y-2z=0 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{l} e'_2=e_2-e_1 \\ e'_2=e_3-2e_1 \end{array}\right. \quad S':\left\{\begin{array}{r} x+2y-z=1 \\ -y+2z=2 \\ 0=-2 \end{array}\right.$$

Aparece una igualdad imposible.

6 Sistemas de Ecuaciones

Resolución Matricial

La **expresión matricial** de un sistema lineal es:

$$C \cdot X = B$$

donde C es la matriz de coeficientes, X la de las incógnitas y B la de los términos independientes.

Si la matriz C de los coeficientes es cuadrada e invertible, es posible **resolver** el sistema **matricialmente**, usando la matriz inversa de la siguiente forma:

$$CX = B \to C^{-1}CX = C^{-1}B \to X = C^{-1}B$$

Regla de Cramer

Sea S el sistema de n ecuaciones con n incógnitas

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \cdots & = & \cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Si el determinante de los coeficientes es distinto de cero, entonces el sistema es compatible determinado.

La solución viene dada por

$$x_k = \frac{\det(C_{x_k})}{\det(C)} \quad , \quad k = 1, \ldots, n$$

donde C_{x_k} designa a la matriz que se obtiene al sustituir en la matriz de coeficientes C la columna k por la matriz columna de los términos independientes.

Teorema de Roché – Frobenius

Sea S un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Designemos por C a la matriz de coeficientes del sistema y por A a la matriz ampliada con los términos independientes.

1. Si $\text{rg}(C) \neq \text{rg}(A)$ el sistema es incompatible.
2. Si $\text{rg}(C) = \text{rg}(A)$ el sistema es compatible.

Supongamos que $\text{rg}(C) = \text{rg}(A) = h$.

a) Si $h = n$ entonces S es compatible determinado.

b) Si $h < n$ entonces S es compatible indeterminado, de modo que la solución depende de $n - h$ parámetros.

Si es $\Delta \neq 0$ es un menor en C de orden h, S equivale al que tiene como filas las que están en el menor.

Las incógnitas principales son aquellas cuyas columnas están en el menor y las restantes, si las hubiera, son libres (parámetros).

Sistemas Homogéneos

a) Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es homogéneo cuando todos sus términos independientes son cero.

b) Un sistema homogéneo siempre es compatible: igualando todas las incógnitas a cero. Por ello a esta solución se la denomina solución trivial.

c) En un sistema homogéneo sólo puede darse una de estas dos posibilidades:

$\text{rg}(C) = \text{rg}(A) = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas: en este caso el sistema tiene solución única: la trivial.

$\text{rg}(C) = \text{rg}(A) < \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas: en este caso el sistema tiene infinitas soluciones.