5 MATRICES Y DETERMINANTES

GENERALIDADES

Una **matriz** es una **tabla numérica** de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & \cdots & a_{1\,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m\,1} & \cdots & a_{m\,n} \end{pmatrix}$$

- Se dice que es una matriz de **dimensiones** $m \times n$, ya que tiene m **filas** y n **columnas**.
- Al elemento que ocupa la fila i y la columna j se le designa por $a_{i\,j}$.

Dos matrices son **iguales** cuando tienen la misma dimensión y coinciden los términos que ocupan el mismo lugar en ambas.

La **traspuesta** de la matriz A $(m \times n)$ es la matriz A^t $(n \times m)$ que se obtiene al cambiar en A las filas por las columnas.

Algunos tipos de matrices:

- **Matriz fila**: aquella que tiene una única fila.
- **Matriz columna**: aquella con una sola columna.
- **Matriz nula** : la que tiene todos sus elementos igual a cero.
- **Matriz cuadrada** : la que tiene igual número de filas y columnas.
- **Matriz unidad**: matriz cuadrada cuyos elementos de la diagonal principal son todos unos y los restantes son todos ceros. Se la designa I_n.

SUMA Y PRODUCTO POR ESCALARES

La **suma** de las matrices A y B , con las mismas dimensiones, es otra matriz C de la misma dimensión con $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Dicha matriz se designa por $A + B$.

La **opuesta** de $A = (a_{ij})$ es $-A = (-a_{ij})$.

La **resta** de las matrices A y B, con las mismas dimensiones, es $A - B = A + (-B)$.

El **producto del número** real k **por una matriz** A es otra matriz de iguales dimensiones, que se obtiene al multiplicar cada elemento de A por dicho número.

PRODUCTO DE MATRICES

Si A una matriz de dimensiones $m \times p$ y B es de dimensiones $p \times n$, la **matriz producto** $C = A \cdot B$ es la de dimensiones $m \times n$ con

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$$

Importante recordar:

1. Para poder multiplicar dos matrices es preciso que el número de columnas de la primera coincida con el número de filas de la segunda.
2. El producto de matrices **no es conmutativo**.

MATRIZ INVERSA

Sean A y B cuadradas de orden n. Se dice que B es inversa de A si

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

Dicha inversa es única y se escribe $B = A^{-1}$.

1. Sólo las matrices cuadradas pueden tener inversa.
2. No toda matriz $A \neq O$ tiene inversa.

DETERMINANTES

El **determinante** de una matriz cuadrada es un **número** que se halla a través de una fórmula.

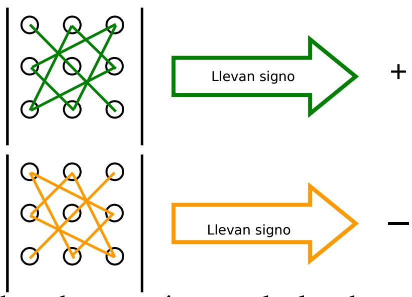
- Determinantes de orden 1:

$$\det(\alpha) = \alpha$$

- Determinantes de **orden 2**:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

- Para los de **orden 3** recordemos la regla de **Sarrus**:



- Los de orden superior se calculan desarrollando por una línea.

5 Matrices y Determinantes

Inversa: Cálculo con Determinantes

Sea A una matriz cuadrada.

El **adjunto** del elemento elemento $a_{i\,j}$, designado por A_{ij}, es el producto del número $(-1)^{i+j}$ por el determinante complementario α_{ij} (que se obtiene al eliminar en A la fila i y la columna j).

Sea A una matriz cuadrada de orden n.

A es invertible siempre y cuando es $\det(A) \neq 0$.

Si $\det(A) \neq 0$ la inversa de A es la matriz

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (\mathrm{Adj}\, A)^t$$

donde la matriz $\mathrm{Adj}(A) = (A_{i\,j})$ es la matriz de los adjuntos de A.

Propiedades De Los Determinantes

1. El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta.
2. El determinante de la matriz producto es igual al producto de los determinantes de los factores.
3. Un determinante cambia de signo al permutar dos líneas paralelas.

$$\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

4. Si multiplicamos una línea de un determinante Δ por un número k obtenemos un determinante cuyo valor es igual a Δ multiplicado por k.

$$\begin{vmatrix} ka & b \\ kc & d \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

5. Un determinante no cambia si a una línea añadimos una combinación lineal de otras paralelas.
6. Consecuencias: un determinante es cero cuando alguna de sus líneas es combinación lineal de otras paralelas. En particular, si tiene una línea de ceros, dos líneas paralelas idénticas o proporcionales.

Desarrollo por una Línea

Un determinante es igual a la suma de los elementos de una línea cualquiera multiplicados por sus correspondientes adjuntos.

Rango

Diremos que el rango de una matriz es el número h si contiene un menor de orden h distinto de cero pero no hay un menor de orden superior a h que sea no nulo.

Es de utilidad el **teorema del orlado**:

Sea A una matriz y $\Delta_h \neq 0$ un menor de orden h.

Si todos los menores orlados de Δ_h con una determinada fila son cero, entonces dicha fila es combinación lineal de las h filas de A con las que se ha formado Δ_h.

El **Teorema del Rango**:

Sea A una matriz y $\Delta \neq 0$ un menor de orden p tal que no hay menor de orden superior distinto de cero.

Entonces se tiene que:

a) El rango de A es p.

b) Las filas de A con las que se ha formado $\Delta \neq 0$ son linealmente independientes.

c) Las restantes filas de A son combinaciones lineales de ellas.

Inversa: Cálculo por Gauss

Para calcular la inversa de la matriz cuadrada A:

1. Colocamos la matriz A junto a la matriz identidad:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & \mathrm{I} \end{array} \right)$$

2. Sometemos las **filas** a ciertas transformaciones elementales hasta que la matriz A se transforme en la identidad:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & \mathrm{I} \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I} & B \end{array} \right)$$

3. La matriz B en la que se ha transformado I es la inversa de A:

$$B = A^{-1}$$

Las transformaciones elementales válidas son:

- Multiplicar una fila por un número distinto de cero.
- Añadir a una fila una combinación lineal de otras.
- Permutar filas.

Cuidado: si en algún momento una de las filas de A se transforma en una línea de ceros, entonces la matriz no tiene inversa.