4 INTEGRAL DEFINIDA

REGLA DE BARROW

Si es f una función continua en el intervalo $[a\,,b]$ y F es una primitiva suya, entonces es:

$$\int_a^b f = \Big[F\,(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

PROPIEDADES BÁSICAS

Sean f y g son funciones continuas en $[a\,,b]$

Linealidad respecto del integrando

Para cualesquiera α y β son constantes es

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

Aditividad respecto del intervalo

Para todo valor c en el intervalo:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

No negatividad

$$f \geq 0 \longrightarrow \int_a^b f \geq 0$$

Monotonía

$$f \leq g \longrightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

CÁLCULO DE ÁREAS

Si es f una función continua en el intervalo $[a\,,b]$.

El área del recinto $\mathscr{R}$ delimitado por la gráfica de f y el eje de abscisas entre $x = a$ y $x = b$ viene dada por:

$$a(\mathscr{R}) = \int_a^b |f|$$

Si f no cambia de signo en $[a\,,b]$ entonces:

$$a(\mathscr{R}) = \left|\int_a^b f\right|$$

Si f tiene un signo en $[a\,,c]$ y otro en $[c\,,b]$ entonces:

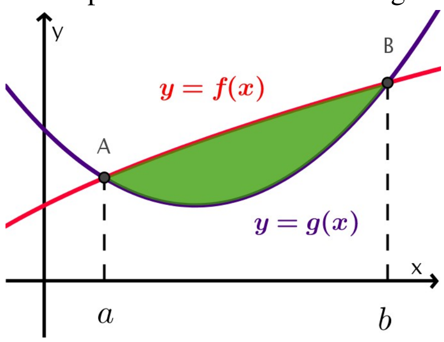
$$a(\mathscr{R}) = \left|\int_a^c f\right| + \left|\int_c^b f\right|$$

ÁREA ENTRE DOS CURVAS

El área del recinto $\mathscr{R}$ delimitado por las gráficas de las funciones continuas f y g entre $x = a$ y $x = b$ viene dada por:

$$a(\mathscr{R}) = \int_a^b |f - g|$$

Por ejemplo, el área del recinto dibujado, que se forma entre los puntos de corte de ambas gráficas



viene dada por

$$a(\mathscr{R}) = \int_a^b (f - g)$$

TEOREMA FUNDAMENTAL

Si f es continua en el intervalo I y fijamos $a \in I$, entonces la función integral

$$F(x) = \int_a^x f \quad , \quad x \in I$$

es derivable con $F' = f$

CAMBIO DE VARIABLES

Sea f es una función continua en $[a\,,b]$ y consideremos una función φ derivable con derivada continua no nula tal que $a = \varphi\,(c)$ y $b = \varphi\,(d)$.

Entonces es

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \underset{\{x=\varphi(u)\}}{=} \int_c^d f\,(\varphi\,(u))\,\varphi'\,(u)\,\mathrm{d}u$$

SUMAS DE RIEMANN

Si f es una función continua en el intervalo $[a\,,b]$, existe un único número real I comprendido entre todas las sumas inferiores y superiores de Riemann.

Ese número es la integral definida de f en $[a\,,b]$.