3 Cálculo de Primitivas

Primitiva e Integral Indefinida

Sea f una función continua definida en el intervalo I

a) Una primitiva de f es una función F que cumple $F' = f$ en I.

b) Al proceso por el que se obtiene F a partir de f se le llama integración.

c) Cualquier primitiva de $y = f(x)$ es de la forma $y = F(x) + C$ donde C es una constante cualquiera.

d) Esto se expresa con la notación de Leibnitz:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

y se dice que la integral indefinida de $y = f(x)$ es $y = F(x) + C$.

Linealidad

Si f y g son funciones continuas definidas en el intervalo I, para todo par de números α y β es:

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

Tabla Integrales (Simples)

$$\int k\,\mathrm{d}x = kx + C$$

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,\mathrm{d}x = -\cot x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arcsen} x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x + C$$

Tabla de Integrales Compuestas

De la Regla de la Cadena se deduce:

$$\int u'(x)\,u(x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}u(x)^{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|u(x)| + C$$

$$\int u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{u(x)} + C$$

$$\int u'(x)\,\cos u(x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen} u(x) + C$$

$$\int u'(x)\,\operatorname{sen} u(x)\,\mathrm{d}x = -\cos u(x) + C$$

$$\int \frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}\,\mathrm{d}x = \tan u(x) + C$$

$$\int \frac{u'(x)}{\operatorname{sen}^2 u(x)}\,\mathrm{d}x = -\cot u(x) + C$$

$$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arcsen} u(x) + C$$

$$\int \frac{u'(x)}{1+u(x)^2}\,\mathrm{d}x = \arctan u(x) + C$$

Integración por Partes

Se basa en aplicar la fórmula

$$\int (f \cdot g) = f \cdot G - \int (f' \cdot G)$$

donde G es una primitiva de g.

Se usa obtener primitivas relacionadas con el producto de funciones y en ocasiones:

- debe aplicarse reiteradamente.
- al aplicarlo vuelve a aparecer la integral inicial y se resuelve con una ecuación funcional.
- se usa para una única función, multiplicándola por 1 y tomando éste como factor a integrar.

Ejemplo: aquí una integral por partes

$$\begin{aligned} \int x\cos(3x)\,\mathrm{d}x &= x \cdot \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x) - \frac{1}{3}\int \operatorname{sen}(3x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}x\operatorname{sen}(3x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + C \end{aligned}$$

Ejemplo: aquí tomamos 1 como parte a integrar

$$\begin{aligned} \int \arctan(3x)\,\mathrm{d}x &= x \cdot \arctan(3x) - \int x \cdot \frac{3}{1+9x^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= x\arctan(3x) - \frac{1}{6}\ln(1+9x^2) + C \end{aligned}$$

3 Cálculo de Primitivas

Funciones Racionales

Son integrales de la forma siguiente

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$$

donde p y q son polinomios.

Si el numerador no tiene grado menor dividiremos:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

y ya en la última el grado de r es menor que el de q.

Caso 1: denominador de primer grado.

Es una sencilla integral que proviene de un logaritmo:

$$\int \frac{3}{2x-5}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{2}{2x-5}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln 2x-5+C$$

Caso 2: denominador con raíces reales simples.

Se expresa el cociente de polinomios como una suma de fracciones simples que provienen de logaritmos:

$$I = \int \frac{x+1}{x^2+5x}\,\mathrm{d}x$$

Descomponemos:

$$\frac{x+1}{x(x+5)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+5} \qquad (*)$$

Sumamos e igualamos numeradores:

$$x+1 = a(x+5)+bx$$

Haciendo $\quad x=-5 \to -4=-5b \to b=\frac{4}{5}$

Haciendo $\quad x=0 \to 1=5a \to a=\frac{1}{5}$

De la descomposición de (*) resulta:

$$I = \int \frac{\frac{1}{5}}{x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\frac{4}{5}}{x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\ln|x| + \frac{4}{5}\ln|x+5|+C$$

Caso 3: denominador con raíces reales múltiples.

También descomponemos en fracciones simples, que provienen de logaritmos y cocientes:

$$I = \int \frac{x^2+x+3}{(x-2)(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

Descomponemos:

$$\frac{x^2+x+3}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2} (*)$$

Sumando e igualando numeradores:

$$x^2+x+3 = a(x+1)^2 + b(x-2)(x+1) + c(x-2)$$

Haciendo $\quad x=-1 \to 3 = c\cdot(-3) \to c=-1$

Haciendo $\quad x=2 \to 9 = a\cdot 9 \to a=1$

Ahora haciendo, por ejemplo, $x=0$ obtenemos:

$$3 = a-2b-2c = 1-2b+2 \to b=0$$

De la descomposición de (*) resulta:

$$I = \int\left(\frac{1}{x-2} + \frac{-1}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x = \ln|x-2| + \frac{1}{x+1}+C$$

Cambio de Variable

Es un procedimiento que se usa en integrales compuestas cuando es difícil observar a qué tipo corresponde su simplificación.

Ejemplo: calculemos haciendo el cambio $x=t^3$

$$I = \int \frac{\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$$

Cambiando la variable:

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x \underset{[x=t^3\to dx=3t^2dt]}{=} \int \frac{t}{t^3+t}\cdot 3t^2\mathrm{d}t$$

Simplificando y descomponiendo:

$$\frac{3t^3}{t^3+t} = \frac{3t^2}{t^2+1} = 3 - \frac{3}{t^2+1}$$

Ahora integramos:

$$I = 3t - 3\arctan(t) + C$$

Finalmente deshacemos el cambio con $t=\sqrt[3]{x}$:

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x+\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x = 3\sqrt[3]{x} - 3\arctan(\sqrt[3]{x})+C$$

Ejemplo: calculemos haciendo el cambio $t=\cos x$

$$I = \int \operatorname{sen}^3 x\,\mathrm{d}x$$

Como $\mathrm{d}t = -\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$ y $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$I = \int \operatorname{sen}^2 x\cdot \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = \int (1-\cos^2 x)\cdot \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$$

Ahora, haciendo el cambio de variable:

$$I = \int (1-t^2)(-\mathrm{d}t) = \int (t^2-1)\,\mathrm{d}t$$

Ya integramos y finalmente deshacemos el cambio:

$$I = \frac{1}{3}t^3 - t + C = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$$