2 Aplicaciones de las Derivadas

Recta Tangente

La **tangente** a la gráfica $y = f(x)$ para $x = x_0$ es

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

La pendiente es la derivada en ese punto:

$$m = f'(x_0)$$

La pendiente de la **normal**, por consiguiente, es:

$$m = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

Monotonía

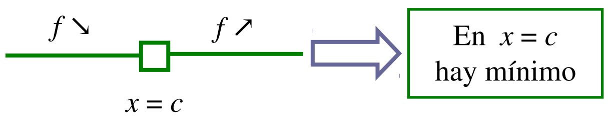
Sea $y = f(x)$ **derivable** en todo punto del intervalo I:

1. Si $f' > 0$ en I entonces f es **creciente** en I $(f\uparrow$ en $I)$.
2. Si $f' < 0$ en I entonces f es **decreciente** en I $(f\downarrow$ en $I)$.

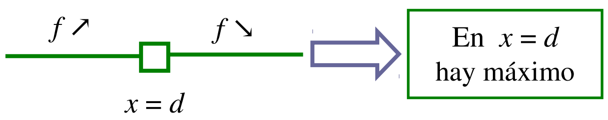
Extremos

Del estudio de signo de la derivada primera (o del análisis de la **monotonía**) deducimos dónde están los **extremos relativos** de $y = f(x)$:

Para el mínimo:



Para el máximo:



Si $y = f(x)$ es **derivable** en el intervalo I y el extremo se alcanza para $x = x_0$ en el **interior** de dicho intervalo entonces es $f'(x_0) = 0$.

Cuidado: puede que la derivada sea cero pero que no cambie de signo. No hay un extremo, sino un punto de silla: tangente horizontal que atraviesa a la curva.

Curvatura

Sea $y = f(x)$ **dos veces derivable** en el intervalo I.

1. Si $f'' > 0$ en I entonces f es **convexa** en I.
2. Si $f'' < 0$ en I entonces f es **cóncava** en I.

Inflexión

Cuando en un punto una gráfica **cambia de curvatura**, decimos que es un **punto de inflexión.**

Si $y = f(x)$ es dos veces derivable en cada punto de un intervalo I y la inflexión tiene lugar para $x = x_0$ en el interior del intervalo entonces es $f''(x_0) = 0$.

Coeficientes Literales

Una función $y = f(x)$ tiene coeficientes literales que hemos de hallar, conociendo algunas propiedades.

Convertiremos cada condición en una igualdad. Juntándolas (sistema) obtendremos esas letras.

Ejemplos:

- Si la gráfica de la función pasa por el punto $(-2, 4)$ entonces $f(-2) = 4$.
- Si la gráfica tiene un extremo relativo para $x = 3$ entonces $f'(3) = 0$.
- Si la gráfica tiene una inflexión para $x = 2$ entonces $f''(2) = 0$.
- Si la recta tangente a la gráfica para $x = 1$ es paralela a $y = -4x + 2$ entonces $f'(1) = -4$

Cuidado. A veces se dan dos condiciones mezcladas:

- Si el punto $(5, -2)$ es un extremo relativo entonces es $f(5) = -2$ y $f'(5) = 0$.
- Si $(-1, 3)$ es un punto de inflexión entonces es $f(-1) = 3$ y $f''(-1) = 0$.
- Si para $x = 1$ la recta tangente es $y = 3x + 7$ entonces $f'(1) = 3$ y $f(1) = 10$.

Extremos en Intervalos Compactos

Para obtener los **extremos absolutos** de una función **continua** $y = f(x)$ en un **intervalo compacto** $[a, b]$ y que es derivable, salvo quizá un número finito de valores, procedemos así:

1. Analizamos la derivabilidad, obteniendo los ceros de la derivada y los puntos angulosos si los hubiese.
2. Formamos una **tabla de variación** que incluya: valor inicial, valor final, ceros de la derivada y puntos angulosos si los hubiese
3. Ahí están los valores máximo y mínimo absolutos.

2 APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Son problemas en los que se trata de encontrar el valor máximo o mínimo (**optimizar**) de una magnitud (distancia, longitud, área, volumen, precio,...).

Conviene comenzar con un dibujo, gráfico o esquema.

1. Identificamos las **variables** que intervienen, que usualmente son dos (por ejemplo: x e y) y escribimos la **fórmula** de la magnitud que deseamos optimizar.
2. Siempre hemos de encontrar una relación (**ligadura**) entre las variables.
3. Volvemos a la fórmula del primer paso y usando la ligadura quedará como una función con **sólo una variable**.
4. **Derivamos** y calculamos los **ceros de la derivada** para para obtener los extremos. Comprobamos que se trata del máximo / mínimo deseados.
5. Concluimos **respondiendo** a las preguntas que se realizan en el enunciado.