1 Ampliación de Derivadas

Definición y Notaciones

Sea f una **función** definida en el intervalo abierto I. Se llama **función derivada** a la definida por

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

para cada valor $x \in I$ en el que existe ese límite.

Si para el valor $x = x_0$ existe la derivada, se dice entonces que la función es **derivable** para ese valor.

Existen varias formas de designar a la derivada de una función. He aquí las más comunes:

$$y' \quad , \quad f'(x) \quad , \quad Df(x) \quad , \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$$

Derivadas Sucesivas

A la derivada de una función también se la denomina **derivada primera**. Si volvemos a derivar la derivada primera de una función, obtenemos la llamada **derivada segunda**; la derivada de la derivada segunda se denomina **derivada tercera**; y así sucesivamente. Éstas son las llamadas **derivadas sucesivas** de una función:

$$f \xrightarrow{D} f' \xrightarrow{D} f'' \xrightarrow{D} f''' \xrightarrow{D} \ldots$$

Recta Tangente

La **tangente** a la gráfica $y = f(x)$ para $x = x_0$ es

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

La pendiente es la derivada en ese punto:

$$m = f'(x_0)$$

La pendiente de la **normal**, por consiguiente, es:

$$m = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

Derivadas y Operaciones

Aquí tenemos las reglas que relacionan las operaciones elementales y las derivadas:

Suma / resta:	$D(u \pm v) = u' \pm v'$
Por constante:	$D(ku) = ku'$
Producto:	$D(u \cdot v) = u' \cdot v + u \cdot v'$
Cociente	$D\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Regla de la Cadena

Es la regla que permite derivar una composición:

$$y = f\left[u\left(x\right)\right] \xrightarrow{D} y' = f'\left[u\left(x\right)\right] \cdot u'\left(x\right)$$

Tabla de Derivadas

Derivada de constante, de la identidad y su recíproca:

$D\alpha = 0$

$Dx = 1$

$D\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$

Derivada de función potencial y de raíz cuadrada:

$Dx^n = n \cdot x^{n-1}$	$Du^n = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
$D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$D\sqrt{u} = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Derivada de funciones exponenciales:

$D\,\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$	$D\,\mathrm{e}^u = \mathrm{e}^u \cdot u'$
$Da^x = a^x(\ln a)$	$Da^u = a^u \cdot u'(\ln a)$

Derivada de funciones logarítimicas:

$D\ln x = \frac{1}{x}$	$D\ln u = \frac{u'}{u}$
$D\log_a x = \frac{1}{(\ln a)x}$	$D\log_a u = \frac{u'}{(\ln a)u}$

Derivada de funciones trigonométricas

$D\,\mathrm{sen}\,x = \cos x$	$D\,\mathrm{sen}\,u = u'\cos u$
$D\cos x = -\,\mathrm{sen}\,x$	$D\cos u = -u'\,\mathrm{sen}\,u$
$D\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$D\tan u = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$D\cot x = -\frac{1}{\mathrm{sen}^2 x}$	$D\cot u = -\frac{u'}{\mathrm{sen}^2 u}$

Derivada de funciones trigonométricas inversas:

$D\,\mathrm{arcsen}\,x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$D\,\mathrm{arcsen}\,u = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$D\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$D\arccos u = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$D\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$	$D\arctan u = \frac{u'}{1+u^2}$

1 Ampliación de Derivadas

Continuidad y Derivabilidad

Para estudiar la derivabilidad de una función f en un valor concreto $x = x_0$ primero estudiamos la continuidad en $x = x_0$.

Nos podemos encontrar tres casos:

1. f es **discontinua** en $x = x_0$.

   Tenemos que f **no es derivable** en $x = x_0$.

2. f es **continua** en $x = x_0$.

   Tenemos que f **puede** ser derivable en $x = x_0$.

   Podemos hallar las **derivadas laterales** así:

   $$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f'(x) \quad , \quad f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

   Ahora hay dos posibilidades:

   – Caso 2a: Las derivadas laterales **no coinciden**.

     Resulta que f **no es derivable** en $x = x_0$

     Es lo que se llama un punto anguloso.

   – Caso 2b: Las derivadas laterales **coinciden** (L)

     Resulta que f es **derivable** en $x = x_0$

     Resulta así que $f'(x_0) = L$.

Regla de L'Hôpital

Es una regla para calcular el límite de un cociente de funciones derivables cuando obtenemos las **indeterminaciones** $\left[\frac{0}{0}\right]$ y $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Bajo ciertas condiciones, si $x \to x_0$ o si $x \to \pm\infty$ es:

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] \text{ o } \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

si el límite (finito o infinito) de la derecha existe.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\operatorname{sen}(x^3)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}}{3x^2\cos(x^3)} = \frac{2}{0} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x+1}{e^{-x}+1} = \left[\frac{-\infty}{+\infty}\right] = \lim_{x\to -\infty} \frac{2}{-e^{-x}} = \frac{2}{-\infty} = 0$$

También puede adaptarse para resolver las indeterminaciones $[0\cdot\infty]$ y $[\infty-\infty]$.

$$\lim_{x\to 0+} x\cdot\ln(x) = [0\cdot(-\infty)] = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(x)}{1/x} = \left[\frac{-\infty}{+\infty}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0+} (-x) = 0$$

Puede ser necesaria la aplicación reiterada.

Otros Límites

Recuerda que **no** son indeterminaciones

$$\left[\frac{\alpha}{0}\right] = \pm\infty \ (\alpha \neq 0)$$

$$\left[\frac{\alpha}{\pm\infty}\right] = 0$$

No olvidemos la regla de los grados: si p y q son polinomios entonces

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \mathrm{gr}(p) < \mathrm{gr}(p) \\ \dfrac{a}{b} & \text{si} \quad \mathrm{gr}(p) = \mathrm{gr}(p) \\ \pm\infty & \text{si} \quad \mathrm{gr}(p) > \mathrm{gr}(p) \end{cases}$$

Otros límites útiles que debemos retener son:

$\ln(0+) = -\infty$ $\qquad$ $\ln(+\infty) = +\infty$

$e^{-\infty} = 0$ $\qquad$ $e^{+\infty} = +\infty$

Por último, para intentar resolver indeterminaciones $[\infty - \infty]$ con radicales puede ser útil multiplicar y dividir por la expresión conjugada.

Problemas Tangente

Chuletilla para ciertos problemas relacionados con la tangente a $y = f(x)$:

- ¿Ecuación de la tangente para $x = 2$?

  $$y - f(2) = f'(2)(x-2)$$

- ¿En qué punto la tangente es paralela a $y = 3x$?

  $$m = 3 \to f'(x) = 3 \xrightarrow{resolvemos} x = x_0$$

- ¿Qué tangente pasa por el punto exterior $P(2,5)$?

  $$y - f(a) = f'(a)(x-a) \xrightarrow[susti]{P} 5 - f(a) = f'(a)(2-a)$$

  Resolvamos la ecuación y saquemos $x = a$.

- ¿Es la recta $r : y = -2x + 1$ tangente?

  $$m = -2 \to f'(x) = -2 \xrightarrow{resolvemos} x = x_0$$

  Calculamos en $x = x_0$ la tangente a ver si sale r.

- Si en $x = 1$ la tangente es $y = 3x + 7$ entonces:

  $$m = 3 \Rightarrow f'(1) = 3$$

  $$x = 1 \to y = 3\cdot 1 + 7 \Rightarrow f(1) = 10$$