0 FUNCIONES, LÍMITES Y CONTINUIDAD

CONCEPTOS BÁSICOS

Una **función** real *f* es una transformación que a cada número x le hace corresponder exactamente un número designado por $y = f(x)$: $x \xrightarrow{f} y$

El número x es llamado **original**, y se llama **dominio** de la función al conjunto de todos los originales.

Al número y se le llama "transformado o **imagen**", siendo el **recorrido** el conjunto de todas las imágenes

Una función queda definida por una fórmula, una tabla de valores (tal vez indefinida) o una gráfica.

Un ejemplo de función es

$$f(x) = \frac{2}{x-1}$$

Aquí $x = 1$ no está en su dominio($\mathbb{D} = \mathbb{R} - \{1\}$).

Una función $y = f(x)$ forma parejas de números $(x\,,y)$ que podemos colocar en tablas de valores.

Si dibujamos esas parejas en plano cartesiano XY aparece una línea que es la gráfica de la función: cada punto de la gráfica es una pareja de la tabla.

GRÁFICAS DE FUNCIONES ELEMENTALES

Función afín: es $y = mx + n$ una recta. El número *m* es llamado pendiente de la recta.

Función cuadrática: es $y = ax^2 + bx + c$ una parábola de eje vertical con vértice para $x_v = \dfrac{-b}{2a}$.

Función valor absoluto: es $y = |f(x)|$. La gráfica puede construirse a partir de $y = f(x)$ reflejando respecto del eje X la parte negativa (bajo el eje).

Función a trozos: su gráfica está construida tomando partes de varias funciones. Por ejemplo, la de

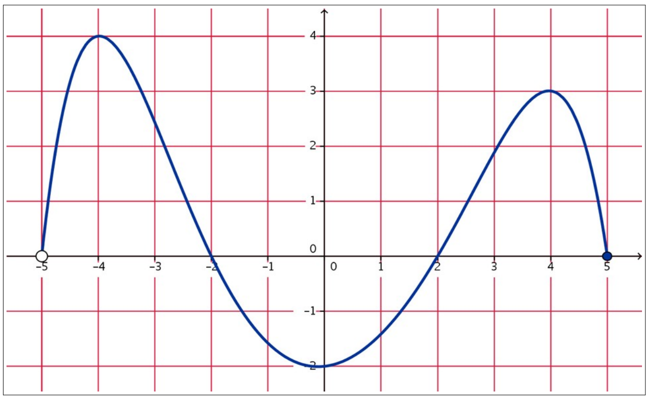
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si} \quad x < 1 \\ 2x + 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

es el "trozo de parábola" $y = x^2 + 2x$ para $x < 1$ y el "trozo de recta" $y = 2x + 1$ para $x \geq 1$.

A la hora de dibujarla manualmente hemos de construir tantas tablas de valores como trozos y en ellas deben aparecer siempre los **separa-fórmulas** (incluidos-cerrados ó excluidos-abiertos).

CARACTERÍSTICAS BÁSICAS DE UNA GRÁFICA

Destacamos en la gráfica:



<u>Dominio</u> (conjunto de valores *x* donde hay gráfica):

$$\mathbb{D} = (-5\,,+5]$$

<u>Recorrido</u>: (conjunto de valores *y* donde hay gráfica):

$$R = [-2\,,+4]$$

<u>Continuidad</u> (¿podemos dibujar con un solo trazo -continua- o presenta agujeros, roturas, saltos,... -discontinua-?):

Es continua para todos los valores de su dominio. Ahora bien, hay una singularidad: para $x = -5$ hay agujero en el inicio de la gráfica (es denominado discontinuidad evitable).

<u>Signo</u>:

- Ceros (cortes con el eje X): $x = -2\,,2\,,5$
- Positiva (sobre el eje X): $(-5\,,-2) \cup (2\,,5)$
- Negativa (bajo el eje X): $(-2\,,2)$

<u>Monotonía</u> (crecimiento / decrecimiento):

$f \nearrow$ en $(-5\,,-4]$ y en $[0\,,4]$

$f \searrow$ en $(-5\,,-4]$ y en $[0\,,4]$

<u>Acotación</u>: vemos que la función está acotada. Tanto superiormente ($y = 5$ es cota superior) y acotada inferiormente ($y = -3$) es cota inferior.

<u>Extremos</u> (máximos y mínimos):

Máx. relativos: $A = (-4\,,4)$ (absoluto) y $C = (4\,,3)$.

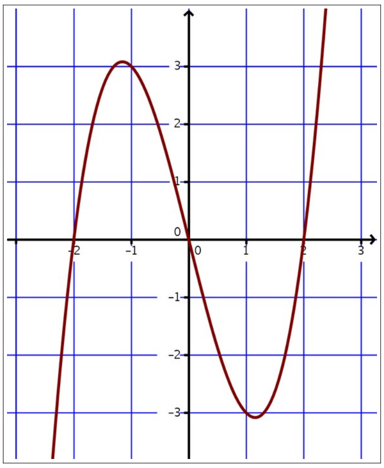
Mín. relativos: $B = (0\,,-2)$ (absoluto) y $D = (6\,,0)$

No hay <u>asíntotas</u> ni es <u>periódica</u>.

0 Funciones, Límites y Continuidad

Funciones Polinómicas

Aquí dibujada la curva de tercer grado $y = x^3 - 4x$:



Está definida y es continua en todo $\mathbb{R}$. En esas curvas destacamos los extremos relativos y los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

Tendencias de prolongación: ramas izquierda-abajo y derecha-arriba. Simbólicamente se expresa

Si $x \to -\infty$ es $y \to -\infty$, Si $x \to +\infty$ es $y \to +\infty$

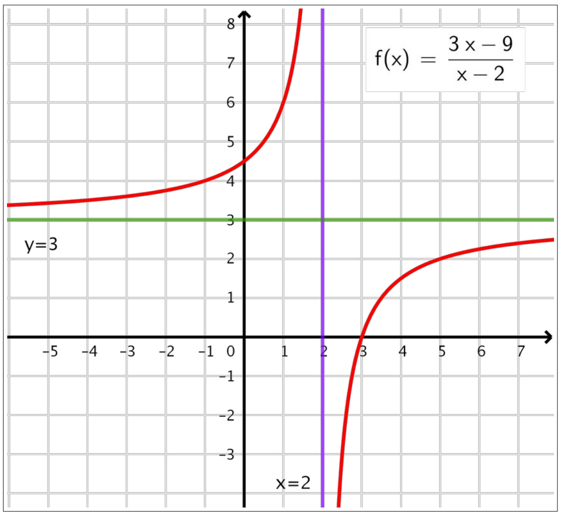
Hipérbolas Básicas

Las **hipérbolas** básicas son las gráficas de fórmula

$$y = \frac{bx + c}{x - a}$$

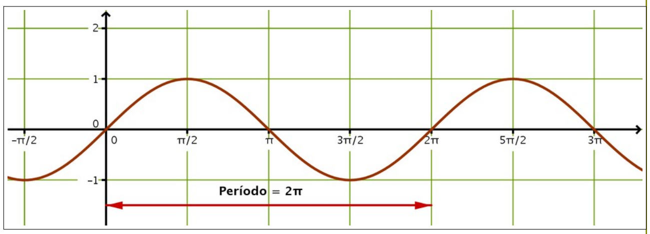
Tienen dos ramas inconexas situadas entre dos rectas llamadas asíntotas, vertical $x = a$ y horizontal $y = b$, que sirven de guías de prolongación.

Presentan una "discontinuidad de salto infinito".



Ondas Trigonométricas

Aquí representada usando Geogebra la función seno:

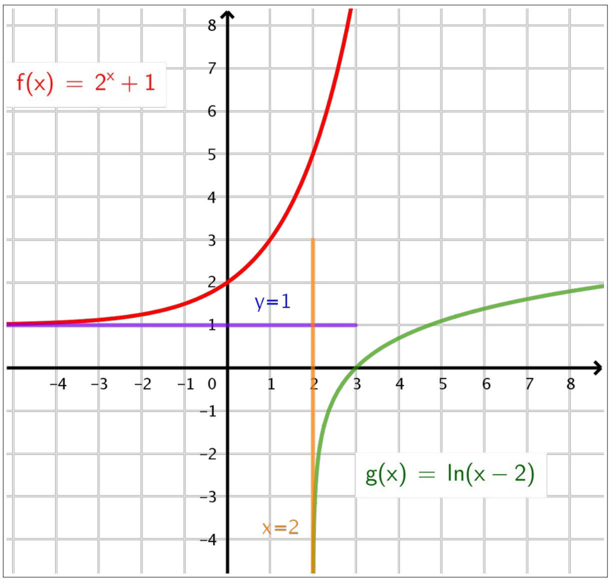


La línea obtenida se denomina curva **sinusoidal**. Está definida y es continua en toda la recta real. Observa su forma de onda y un aspecto fundamental: su periodicidad. Es una función 2π-periódica. Varía entre $y = -1$ e $y = +1$.

La del coseno está desplazada $\pi/2$: pasa por $P(0\,,1)$.

Exponenciales y Logarítmicas

Se han dibujado dos gráficas con Geogebra:



La **exponencial** está definida y es continua en todo $\mathbb{R}$. Su prolongación es muy diferente a izquierda y derecha.

La dibujada tiene una asíntota horizontal.

La **logarítmica** sólo está definida cuando el argumento del logaritmo es positivo:

$$x - 2 > 0 \to x > 2 \to \mathbb{D} = (2\,,+\infty)$$

Y tiene una asíntota vertical cuando el argumento del logaritmo es cero.

0 Funciones, Límites y Continuidad

Operaciones

Dadas f y g, para x común a sus dominios, se define:

- La suma $f+g$ como $(f+g)\,(x)=f(x)+g(x)$
- La resta $f-g$ como $(f-g)\,(x)=f(x)-g(x)$
- El producto $f\cdot g$ como $(f\cdot g)\,(x)=f(x)\cdot g(x)$
- El cociente $\dfrac{f}{g}$ como $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

En este caso, observa que deberá ser $g(x)\neq 0$.

La composición $f\circ g$ de las dos funciones f y g se define mediante:

$$(f\circ g)\,(x)=f\,[g(x)]$$

La función f actúa sobre el resultado de la función g:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f\circ g"'] & g(x) \arrow[r, "f"] & (f\circ g)(x) \end{tikzcd}$$

Por ejemplo, si

$$f(x)=3x+1\,,\; h(x)=\begin{cases} x-3 & \text{si} \quad x<1 \\ x^2+2 & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$$

es:

$(f\circ h)\,(-1)=f\,[h(-1)]=f(-4)=-11$

$(h\circ f)\,(-1)=h\,[f(-1)]=h(-2)=-5$

Función Inversa

Si f asocia a cada $x\in\mathbb{D}$ un único $y\in\mathbb{I}$, la inversa es la función f^{-1} que a cada imagen $y\in\mathbb{I}$ le asocia su original $x\in\mathbb{D}$.

Para calcular su fórmula:

$$y=f(x)\xrightarrow[x]{despejando}x=f^{-1}(y)$$

Por ejemplo , para calcular la inversa de la función dada por $f(x)=\sqrt[5]{3x-2}$, hacemos:

$$y=\sqrt[5]{3x-2}\;\rightarrow\;3x-2=y^5\;\rightarrow\;x=\frac{y^5+2}{3}$$

Luego

$$f^{-1}(y)=\frac{y^5+2}{3}$$

Continuidad

De modo intuitivo, una función es continua cuando su gráfica se puede construir “con un solo trazo”, esto es, no tiene ni agujeros, ni roturas ni saltos.

Sea f una **función** definida en el intervalo I y $x_0\in I$. Decimos que f es **continua** en $x=x_0$ cuando el valor y la tendencia existen y coinciden; esto es:

1. Existe el valor: $f\,(x_0)$
2. Existe el límite: $\lim\limits_{x\to x_0} f\,(x)$
3. Valor y límite coinciden: $\lim\limits_{x\to x_0} f\,(x)=f\,(x_0)$

Si alguna de esas tres cosas no ocurren, se dice que en $x=x_0$ hay una **discontinuidad**:

- **evitable** o de agujero. si el límite existe y es finito, pero no coincide con el valor (porque no existe o porque es un número diferente)
- de **salto infinito** si los laterales existen, pero alguno de ellos es infinito.
- de **salto finito** si ambos laterales son finitos pero distintos.
- Por último, hay funciones como $f(x)=\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$ que para $x=0$ no tiene siquiera límites laterales . Ésta se denomina discontinuidad **esencial**.

Funciones Elementales

En general, las funciones elementales son continuas en todo punto salvo quizá en algunos valores concretos.

Las funciones polinómicas, seno, coseno y exponencial son continuas en todo punto.

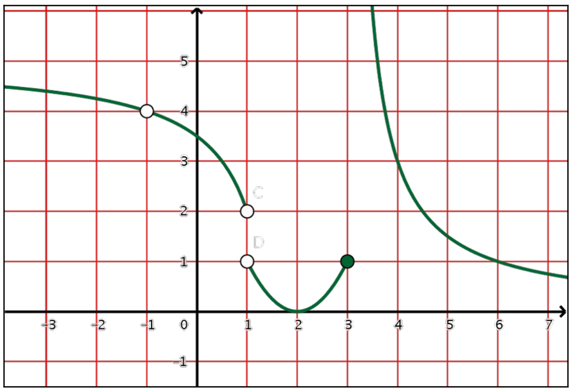
Las funciones racionales, radicales, y logarítmicas son continuas en todos los valores en los que están definidas.

PELIGRO:

- Las funciones fraccionarias son discontinuas en los ceros del denominador (si los hubiese).
- Los logaritmos tienen salto infinito en los ceros del argumento.
- Las funciones a trozos pueden fallar en los separa-fórmulas.

0 Funciones, Límites y Continuidad

Análisis Gráfico de la Continuidad



Sólo es discontinua para $x=-1$, $x=1$ y $x=3$.

Para $x=-1$ hay discontinuidad evitable:

Valor: $f(-1)=\emptyset$

Tendencias: $f(-1-)=4$

$f(-1+)=4$

Para $x=1$ hay discontinuidad de salto finito:

Valor: $f(1)=\emptyset$

Tendencias: $f(1-)=2$

$f(1+)=1$

Para $x=3$ hay discontinuidad de salto infinito:

Valor: $f(3)=1$

Tendencias: $f(3-)=1$

$f(3+)=+\infty$

Límites de Polinomios en un Punto

Sustituimos (pues es continua) para calcular un límite:

$$\lim_{x\to 2}\left(x^3-x-1\right)=2^3-2-1=5$$

Límites de Funciones a Trozos en un Punto

Veamos los límites para $x\to -2$, $x\to 0$ y $x\to 2$ de

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x\le 0 \\ -x^2+9 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}(2x+1)=-3$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)\begin{cases} f(0-)=2\cdot 0+1=1 \\ f(0+)=-0^2-9=-9 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\left(-x^2+9\right)=5$$

Límite de Racionales en un Punto

Sustituimos y hay tres posibilidades:

- Si el valor existe, el límite es ese número (continua):

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x}{2x-4}=\frac{-1}{-2}=0.5$$

- Si obtenemos un número no nulo entre cero, el límite es infinito (salto infinito):

$$\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{x^2-9}=\left[\frac{4}{0}\right]=\begin{cases} f(3-)=-\infty \\ f(3+)=+\infty \end{cases}$$

- Si obtenemos cero entre cero es indeterminado, debiendo factorizar y simplificar para volver a sustituir (agujero o salto infinito):

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-4x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 4}\frac{(x+4)\cancel{(x-4)}}{x\cancel{(x-4)}}=\frac{8}{4}=2$$

Límite de Polinomios en el Infinito

Siempre es infinito (sustituimos el líder):

$$\lim_{x\to -\infty}\left(-2x^3+5x^2\right)=-2\left(-\infty\right)^3=-2\left(-\infty\right)=+\infty$$

Límite de Racionales en el Infinito

Si p y q son polinomios entonces (regla de grados):

$$\lim_{x\to \pm\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad \mathrm{gr}(p)<\mathrm{gr}(p) \\ \frac{a}{b} & \text{si} \quad \mathrm{gr}(p)=\mathrm{gr}(p) \\ \pm\infty & \text{si} \quad \mathrm{gr}(p)>\mathrm{gr}(p) \end{cases}$$

Exponenciales y Logaritmos

Retengamos estos límites:

$$\mathrm{e}^{-\infty}=0 \qquad \mathrm{e}^{+\infty}=+\infty$$

$$\ln(0+)=-\infty \qquad \ln(+\infty)=+\infty$$

- Ejemplo: Continuidad de $f(x)=\ln(x-1)$:

Sólo es discontinua para $x-1=0\to x=1$:

$$\left.\begin{matrix} f(1)=\ln(0)=\emptyset \\ f(1+)=\ln(+0)=-\infty \end{matrix}\right\}\to \text{Salto infinito}$$

- Ejemplo: Veamos límites con exponenciales

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\mathrm{e}^{-2x}+1\right)=\mathrm{e}^{+\infty}+1=+\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\mathrm{e}^{-2x}+1\right)=\mathrm{e}^{-\infty}+1=0+1=0$$

ASÍNTOTAS

Verticales:

$x = a$ si $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$

Horizontales

$y = b$ si $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$

Oblicuas

$y = mx + n$ si $\begin{cases} \lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m \neq 0 \\ \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = n \end{cases}$

• Ejemplo: Obtenemos las asíntotas de

$$y = \frac{2x+1}{x-3}$$

Verticales:

$$x - 3 = 0 \to x = 3$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x+1}{x-3} = \left[\frac{7}{0}\right] = \pm\infty$$

Horizontales:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x+1}{x-3} = \frac{2}{1} = 2 \to y = 2$$

Oblicuas:

No hay, al tener horizontal para $x \to \pm\infty$.

• Ejemplo: Obtenemos las asíntotas de

$$y = \frac{2x^3}{1+x^2}$$

Verticales:

$$1 + x^2 = 0 \to x^2 = -1 \to \text{no}$$

Horizontales

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^3}{1+x^2} = \pm\infty \to \text{no}$$

Oblicuas

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^3}{x+x^3} = 2$$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{2x^2}{1+x^2} - 2x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-2x}{1+x^2} = 0$$

$$y = 2x$$