Azar y Probabilidad

Índice de contenido

Tiempo Estimado

3 semanas

1.EXPERIENCIAS ALEATORIAS

La Ciencia trata de encontrar las leyes por las que se rigen los fenómenos que observamos. Para establecer esas leyes se realizan experimentos o experiencias, en las que dichos fenómenos se producen en unas mismas condiciones (controlando temperatura, humedad, viento, ...).

El poder de la Ciencia viene de su capacidad de predicción. Una vez encontrada una ley podemos "predecir el futuro": si repetimos la experiencia bajo ciertas condiciones podemos anticipar el resultado.

Por ejemplo: subamos a la azotea de un edificio en un día con ausencia de viento y abandonemos una canica de metal sobre el suelo. Podemos afirmar que la piedra caerá. Y además podemos señalar en qué lugar caerá –la vertical–. Incluso podemos calcular la velocidad con la que golpeará el suelo.

En esta situación tenemos que el efecto (caída al suelo y llegada con una velocidad concreta) está determinado por ciertas causas (la gravedad y ausencia de otras fuerzas): las consecuencias ocurrirán necesariamente.

Frente a esta clase de fenómenos hay otros en los que no podemos prever, conocer de antemano, cuál será el resultado. Por ejemplo:

- ✔ ¿Cuáles serán los resultados de la quiniela de la siguiente jornada de liga?
- ✔ En el próximo fin de semana, ¿habrá más o menos accidentes mortales que en el mismo del año pasado?

En estos casos, la totalidad de las circunstancias que influyen en le resultado escapa a nuestro conocimiento, a nuestro control. El resultado es consecuencia de la suma de una gran cantidad de factores que no podemos ni distinguir ni controlar. Decimos que el resultado es consecuencia del azar. Y esas experiencias o fenómenos cuyo resultado se atribuye al azar se denominan aleatorios.

> Se llama **experiencia aleatoria** a aquel experimento en el que, bajo condiciones fijas, pueden ocurrir un número concreto de resultados pero no es posible predecir cuál sucederá.

- ✔ Ejemplo: lanzamos dos dados sobre una mesa y deseamos averiguar cuál será la suma de las puntuaciones que se obtendrán: estamos ante un fenómeno aleatorio.
- ✔ Ejemplo: tenemos una urna con cinco bolas blancas y una verde. Sacamos, sin mirar, una de ellas al azar. Si nos preguntamos por el color que tendrá estamos ante una experiencia aleatoria.
- ✔ Ejemplo: Otro fenómeno aleatorio: del mazo de una baraja extraemos una carta, y nos preguntamos: ¿qué carta saldrá? O también: ¿saldrá una figura?

En las experiencias aleatorias es imposible hallar reglas determinísticas, leyes que controlen la aparición de cada resultado. Pero eso no significa que el azar no esté gobernado por ninguna ley.

Un poco de Historia

El estudio de los fenómenos regidos por el "azar" y del cálculo de probabilidades comenzó en 1654.

Un aristócrata francés conocido como el "caballero de Mère", interesado por los juegos y las apuestas, preguntó al matemático Pascal por una aparente contradicción en un juego de dados.

El juego consistía en lanzar 24 veces un par de dados; y se trataba de apostar a favor o en contra de la aparición de por lo menos un "seis doble". Un razonamiento sencillo le llevaba a pensar que era ventajoso apostar a favor, pero su experiencia era le señalaba lo contrario.

El caballero escribió a Pascal comentándole éste y otros problemas. Esto motivó que se iniciara un intercambio de cartas entre Pascal y otro matemático, Fermat, en las que se formularon los fundamentos del Cálculo de Probabilidades.

Sería Laplace, en 1774 el que enunciaría la primera definición que se conoce del concepto de probabilidad. Y tras sus estudios, el interés por estas cuestiones decayó hasta nuestro siglo.

A principios de éste el matemático ruso Kolmogorov construyó la base de la teoría moderna.

En tiempos recientes ha tenido un auge espectacular, de la mano de la Estadística, usándose sus conclusiones en Sociología, Psicología e incluso en la Teoría Atómica o en Química.

Aunque pueda parecer paradójico, el azar tiene sus propias leyes. Hay dos ramas de la Matemática que dedican a su estudio: el Cálculo de Probabilidades y la Estadística.

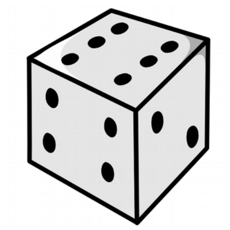
Para comenzar, vamos a estudiar experiencias aleatorias sencillas, como son el lanzamiento de monedas o la extracción de bolas contenidas en urnas.

2.SUCESOS

☑ EL ESPACIO MUESTRAL.

Cuando realizamos una experiencia, es importante conocer cuál es el conjunto de todos los resultados posibles.

Por ejemplo, si lanzamos un dado, de los de toda la vida, y observamos la cara superior está claro que pueden darse seis casos: los números del 1 al 6. Se acostumbra a escribirlo así:



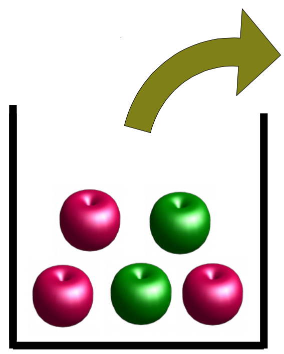
$$E=\{1,2,3,4,5,6\}$$

En una experiencia aleatoria se denomina **espacio muestral**, y se designa por E, al conjunto de todos los posibles resultados.

- ✔ Ejemplo: lanzamos una moneda dos veces y anotamos si sale cara o cruz. El espacio muestral puede expresarse de la siguiente forma:

$$E=\{CC, CX, XC, XX\}$$

- ✔ Ejemplo: De una caja que contiene tres manzanas rojas y dos manzanas verdes sacamos, sin mirar, una de ellas. El espacio muestral podemos expresarlo así:



$$E=\{R_1, R_2, R_3, V_1, V_2\}$$

- ✔ Ejemplo: si lanzamos un dado dos veces, anotando el número que ha salido en cada una de las tiradas, ¿sabrías escribir el espacio muestral?
- ✔ Ejemplo: tenemos una bolsa con cuatro fichas numeradas del 1 al 4 y otra con las vocales. Sacamos una ficha de cada bolsa y anotamos el resultado obtenido. El espacio muestral es...

☑ SUCESOS.

Volvamos de nuevo al experimento consistente en lanzar un dado. Podríamos hacer un pronóstico: “saldrá número par”. Otro sería “saldrá un número mayor que tres”:

P = “saldrá número par” → $P = \{ 2 , 4 , 6 \}$

M = “saldrá mayor que tres” → $M = \{ 4 , 5 , 6 \}$

Estos conjuntos de resultados se denominan sucesos. Observa que si lanzamos un dado y sale dos, habrá ocurrido P pero no M.

Observemos que los sucesos pueden expresarse:

- Por comprensión: dando una propiedad característica que lo determina.
- Por extensión: enumerando cada uno de los resultados que lo componen.

En una experiencia aleatoria se denomina **suceso** a cualquier grupo de posibles resultados de esa experiencia.

Uno de ellos es el **suceso imposible,** que es el no puede ocurrir ($\emptyset$).

Otro es el **suceso seguro**, que es el que incluye todos los resultados y que por tanto es el espacio muestral (E).

- ✔ Ejemplo: Lanzamos un dado con seis caras numeradas del 1 al 6.

  El espacio muestral es $E=\{1,2,3,4,5,6\}$

  A = "sale par" es el suceso $A=\{2,4,6\}$

  B = "sale impar" es el suceso $B=\{1,3,5\}$

  C = "sale cinco" es el suceso $C=\{5\}$

  El suceso "sale un siete" es imposible, es el suceso $\emptyset$.

  El suceso "sale un número menor que 7" es seguro, es el suceso E.

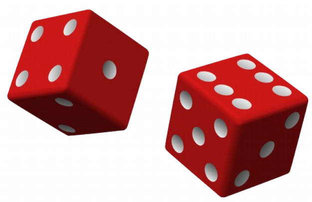
- ✔ Ejemplo: Lanzamos un dado dos veces, y anotamos el número obtenido en cada una de las ocasiones.

  El espacio muestral es el conjunto de todos los pares $a\text{-}b$ donde a y b son los números del 1 al 6.

  El suceso "la suma de los números es 14" es imposible, es $\emptyset$.

  Si A = "la suma es 3" es A = { 1-2 , 2-1 }

  Si B = "el 1º es un 3" es B = { 3-1 , 3-2 , 3-3 , 3-4 , 3-5 , 3-6}



- ✔ Ejemplo: lanzamos una moneda dos veces y anotamos si sale cara o cruz.

  El espacio muestral es $E=\{CC, CX, XC, XX\}$

  A = "obtener dos caras" es $A=\{CC\}$

  B = "obtener una cruz" es $B=\{CX, XC\}$

  C = "obtener por lo menos una cruz" es $C=\{CX, XC, XX\}$

3.RELACIONES ENTRE SUCESOS

Vamos a ver las más importantes:

Dados dos sucesos A y B, llamamos suceso

unión $A \cup B$ al formado por todos los resultados de A o de B.

intersección $A \cap B$ al formado por los elementos comunes de A y de B.

contrario de A al formado por todos los resultados que no están en A.

Observemos que

- La unión ocurre cuando lo hacen A , B o ambos.
- La intersección ocurre cuando lo hacen a la vez A y B.
- El contrario de A ocurre precisamente cuando no lo hace el suceso A.

- ✔ Ejemplo: tomamos una bolsa que contiene diez bolas idénticas, numeradas del uno al diez. Sacamos una bola sin mirar, y consideramos:

  A = "saldrá par"

  B = "saldrá menor de cinco"

  C = "saldrá mayor de tres"

  El contrario de A es

  A unión B

  A intersección B

  A unión C

  A intersección C

  El contrario de B es

  la intersección del contrario de B con A es

- ✔ Ejemplo: tiremos una moneda dos veces y consideremos

  A = "sacar dos iguales"

  B = "sacar una cara"

  C = "sacar al menos una cara"

  D= "sacar a lo sumo una cruz"

  El contrario de A es

  A unión B

  A intersección B

  A unión C

  A intersección D

  B unión D

  C intersección D

- ✔ Ejemplo: lancemos dos veces un dado con cuatro caras, numeradas del 1 al 4. Consideremos:

  A = "sacar dos iguales"

  B = "sale algún tres"

  C ="la suma de los puntos es cuatro"

  El contrario de A es

  A unión B

  A intersección B

  A unión C

  A intersección C

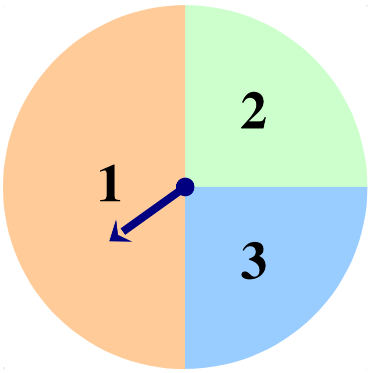
  B unión C

  B intersección C

4.¿A QUÉ LLAMAMOS PROBABILIDAD?

☑ IDEA INTUITIVA DE PROBABILIDAD

En una atracción de feria se trata de apostar en una ruleta, que vemos dibujada en el margen. Se trata de hacer girar la flecha y adivinar el número que señalará.



El espacio muestral es bien simple:

$$E=\{1,2,3\}$$

Sólo hay tres sucesos elementales:

S_1 = "sale el 1" S_2 = "sale el 2" S_3 = "sale el 3"

- Si apostaras por la aparición de un número, ¿por cuál lo harías?
- ¿Te parece que el 2 y el 3 tienen igual probabilidad de aparecer?
- ¿Te parece que el 1 y el 2 tienen igual probabilidad de aparecer?
- ¿Qué relación te parece que deben guardar las probabilidades de S_1 y de S_2?
- ¿Y qué relación deben guardar las de S_2 y S_3?
- ¿Te parece adecuada la asignación de "probabilidades" siguiente?

$$S_1 \to 50\% \quad S_2 \to 25\% \quad S_3 \to 25\%$$

- Se han realizado tres pruebas y se ha obtenido la serie 2, 3, 1. ¿Te parece extraño?
- Se han realizado mil pruebas y se ha obtenido:

  1 ha aparecido 3 veces

  2 ha aparecido 167 veces

  3 ha aparecido 830 veces.

  ¿Y ahora te parece algo normal o hay gato encerrado?

Debemos tener claro que dar la probabilidad de un suceso es asignarle un número que informa sobre la frecuencia con que se espera que se presente en una serie elevada de repeticiones de la experiencia aleatoria.

☑ EXPERIMENTEMOS CON DOS MONEDAS.

Vamos ahora a realizar una prueba que es similar a la experiencia aleatoria anterior: tomaremos dos monedas y las lanzaremos unas 500 veces.

A continuación anotaremos el número de veces que han ocurrido los siguientes sucesos: "salir dos caras" , "salir una cara y una cruz" y "salir dos cruces".

Llamemos

A = "salir dos caras"

B = "salir dos cruces"

C = "salir una cara y una cruz"

y completemos la siguiente tabla con lo obtenido:

Suceso	***Frecuencia***	***Frecuencia relativa (%)***
A		
B		
C		

Observa que

$$\% = \frac{\text{frecuencia}}{\text{total}} \times 100$$

Si siguiéramos así lanzando más y más veces observaríamos cómo las frecuencias relativas (%) de cada uno de los sucesos se estabilizan hacia ciertos valores: esos valores son los que se denominan **probabilidades**.

En nuestro caso, es de esperar que en una "serie ilimitada":

A aparezca en el __% de las ocasiones $\rightarrow$ $p(A)=0{,}25=\frac{}{}$

B aparezca en el __% de las ocasiones $\rightarrow$ $p(B)=0{,}50=\frac{}{}$

C aparezca en el __% de las ocasiones $\rightarrow$ $p(C)=0{,}25=\frac{}{}$

Debemos observar que habitualmente la probabilidad no se expresa como porcentaje, sino como fracción de la unidad.

Así, por ejemplo, al lanzar una moneda no decimos que las probabilidades de salir cara o cruz son del 50%, sino que ambas son $\frac{1}{2}$. Y la probabilidad del suceso seguro no decimos que es el 100%, sino 1.

☑ LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS.

En general, el azar cumple una propiedad conocida como "Ley de los Grandes Números":

> Cuando el número de observaciones de un fenómeno aleatorio crece mucho, la frecuencia relativa de un suceso se estabiliza hacia cierto valor, que es llamado **probabilidad** del suceso.

5.REGLA DE LAPLACE

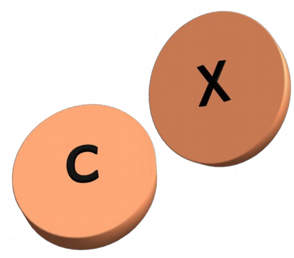
Asignemos las probabilidades en el experimento de las dos monedas usando la "lógica". El espacio muestral es:

$$E=\{CC, CX, XC, XX\}$$

Vemos que hay cuatro posibilidades y que ...

A = "salir dos caras" representa una posibilidad de cuatro:

$$p(A)=\frac{1}{4}$$



B = "salir una cara con una cruz" representa dos posibilidades de cuatro:

$$p(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

C = "salir dos cruces" representa una posibilidad de cuatro:

$$p(C)=\frac{1}{4}$$

Esta sencilla regla para asignar probabilidades es conocida como "Regla de Laplace":

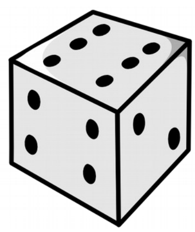
> La probabilidad de un suceso A en un exp. aleatorio es:
>
> $$p(A)=\frac{\text{nº de casos favorables a } A}{\text{nº de casos posibles}}$$
>
> supuesto que todos los casos posibles son equiprobables.

✔ Ejemplo: consideremos la experiencia aleatoria consistente en lanzar un dado y anotar el número obtenido.

El espacio muestral es

$$E = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \}$$

Si el dado no está trucado, todos los números tendrán la misma probabilidad de aparecer.



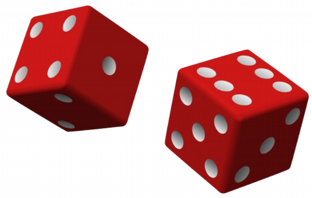
Vamos a calcular la probabilidad del suceso A = "sale mayor que 4" , usando la Regla de Laplace:

$$A = \{ 5 , 6 \} \qquad \rightarrow \qquad p(A)=\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

¿Cuál será la probabilidad del suceso contrario?

$${}^{c}A = \{ \quad , \quad , \quad , \quad \} \quad \rightarrow \qquad p({}^{c}A)=\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}=\frac{\quad}{\quad}=\frac{\quad}{\quad}$$

✔ Ejemplo: si lanzamos dos dados, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los resultados obtenidos sea 6?



El espacio muestral, como ya hemos visto, es:

$$E=\begin{Bmatrix} \text{1-1} & \dots & \text{1-6} \\ \dots & \dots & \dots \\ \text{6-1} & \dots & \text{6-6} \end{Bmatrix}$$

Hay $6 \cdot 6 = 36$ resultados posibles y equiprobables.

El suceso es:

$$A = \{ \text{ 1-5 , 2-4 , 3-3 , 4-2 , 5-1 } \}$$

Por la Regla de Laplace:

$$p(A)=\frac{\text{nº de casos favorables}}{\text{nº total de casos}}=\frac{\quad}{\quad}$$

✔ Ejemplo: un globero lleva 3 globos rojos, 2 azules y 1 amarillo. Si tiramos de una las cuerdas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea de un globo azul?

Aquí la Regla de Laplace puede aplicarse rápidamente y sin problemas.

Si A = “obtener un globo azul”:

$$p(A)=\frac{\text{nº de globos azules}}{\text{nº total de globos}}=\frac{\quad}{\quad}=\frac{\quad}{\quad}$$

Halla tú la probabilidad de que no sea azul:

Ejercicios

1. Juguemos: vamos a dibujar en una página una tabla como la que sigue, donde se han colocado doce fichas que se moverán de la siguiente forma: se lanzan dos dados y avanza un casillero hacia la derecha aquella ficha cuyo número coincida con la suma de los puntos.

2									
3									
4									
5									
6									
7									META
8									
9									
10									
11									
12									

¿Cuál es tu pronóstico sobre cuál será la vencedora?

2. Clasifica los siguientes experimentos en aleatorios o deterministas:

a) Lanzar un dado al aire y observar el número de su cara superior.

b) Aplicar calor al agua hasta llegar a los 100 ºC y analizar si se evapora.

c) Predecir cuántos accidentes de tráfico habrá en España la semana que viene.

d) Recorrer con una moto una recta durante treinta minutos a 40 km/h y medir la distancia recorrida.

e) De una urna con 10 bolas numeradas del 1 al 10 sacamos una sin mirar y predecimos el número.

2. Escribe el espacio muestral en las siguientes experiencias aleatorias:

a) Lanzamos un dado y una moneda.

b) Lanzamos tres veces una moneda y anotamos tras cada lanzamiento si sale cara o cruz.

c) Lanzamos un dado dos veces y anotamos tras cada lanzamiento el número obtenido.

3. En una bolsa tenemos ocho bolas idénticas numeradas del uno al ocho. Metemos la mano en esa bolsa y sacamos al azar una bola, anotando el número.

a) Escribe el espacio muestral.

b) Escribe los resultados correspondientes a los sucesos:

A = “sacar par”

B = “sacar mayor de cuatro”

C = “sacar número primo”

c) Obtén las siguientes combinaciones de ellos:

$$A\cup B,\ A\cap B,\ A\cup C,\ A\cap C,\ B\cup C,\ B\cap C$$

d) Halla las probabilidades de A , B y C .

4. Lanzamos una moneda con cara y cruz junto con un dado que tiene sus caras numeradas del uno al seis, anotando el resultado.

a) Escribe el espacio muestral.

b) Describe el suceso “sale una cruz con un impar”

c) Halla su probabilidad.

5. Lanzamos dos dados con sus caras numeradas del uno al seis y anotamos el número obtenido en cada dado.

a) Escribe abreviadamente el espacio muestral.

b) Escribe los siguientes sucesos:

A = “la suma es seis”

B = “ambos son pares”

C = “sale un doble”

c) Obtén las uniones e intersecciones dos a dos.

d) Halla las probabilidades de A , B y C .

e) Halla las probabilidades de todas las uniones e intersecciones del apartado c.

6. Lanzamos al aire tres monedas, y anotamos las caras o cruces obtenidas.

a) Escribe el espacio muestral.

b) Determina los sucesos:

A = "sacar dos caras"

B = "sacar por lo menos dos cruces"

C = "sacar a lo sumo una cruz"

c) Escribe los sucesos contrarios.

d) Comprueba que se cumple:

$$p(^cA)=1-p(A)$$

$$p(^cB)=1-p(B)$$

$$p(^cC)=1-p(C)$$

7. Del mazo de una baraja española sacamos una carta al azar.

a) Halla las probabilidades de los sucesos siguientes:

A = "sacar una figura"

B = "sacar un as"

C = "sacar una copa"

b) Halla las probabilidades de los sucesos contrarios de los anteriores.

8. En una urna hay cuatro bolas verdes, tres rojas y una azul. Sacamos al azar una bola y anotamos su color.

a) Si R = "sale una bola roja" ¿cuál es su probabilidad?

b) Halla la probabilidad del suceso contrario y comprueba que se cumple

$$p(^cA)=1-p(A)$$

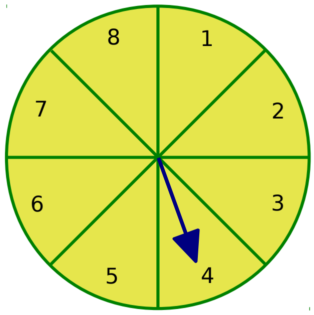
9. En una bolsa hay bolas rojas (R) , verdes (V) y azules (A). Se saca una bola y anotamos el color. Se conocen las probabilidades siguientes:

$$p(V)=\frac{3}{8} \quad \text{y} \quad p(A)=\frac{1}{4}$$

a) ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola roja?

b) Si en la bolsa hay un total de 16 bolas, ¿cuántas hay de cada color?

10. Se hace girar la flecha de la ruleta y anotamos el número en el que se detiene.



a) Determina los sucesos

A = "sacar par"

B = "sacar mayor que cuatro"

b) Escribe los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$

c) Halla las probabilidades de los cuatro sucesos anteriores.

d) Comprueba que se cumple la fórmula:

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$$

11. Lanzamos dos dados de cuatro caras numeradas del uno al cuatro (tetraedros) y anotamos el número obtenido en cada uno de ellos. Escribe la expresión decimal de:

a) Escribe el espacio muestral.

b) Determina los sucesos:

A = "la suma es cinco"

B = "el primer número es impar"

c) Escribe los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$

d) Halla las probabilidades de los cuatro sucesos anteriores.

e) Comprueba que se cumple la fórmula:

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$$

12. Tenemos dos urnas, con tres bolas numeradas del uno al tres cada una. Sacamos una bola de cada una de ellas.

Halla la probabilidad del suceso "sacar dos impares" y de su contrario.

Autoevaluación

1. Tenemos dos bolsas: la primera con cuatro bolas numeradas del uno al cuatro y la segunda con tres bolas numeradas del uno al tres.

Sacamos una bola de cada una de ellas y anotamos el número.

a) Escribe el espacio muestral.

b) Escribe los sucesos:

A = “la suma es cuatro”

B = “ambos son impares”

c) Halla su unión y su intersección.

d) Calcula las probabilidades de los sucesos A y B así como las de sus contrarios.

2. En una urna hay bolas blancas (B) , verdes (V) y azules (A). Se saca una bola y anotamos el color.

Se conocen las probabilidades siguientes:

$$p(V)=\frac{3}{5} \quad \text{y} \quad p(A)=\frac{7}{20}$$

a) ¿Cuál es la probabilidad de “no sacar bola verde”?

b) Halla la probabilidad de sacar bola blanca.

c) Si en la bolsa hay un total de 100 bolas, ¿cuántas hay de cada color?

3. Lanzamos al aire tres monedas, y anotamos las caras o cruces obtenidas.

a) Escribe el espacio muestral.

b) Determina los sucesos:

A = “sacar dos cruces”

B = “sacar al menos dos caras”

C = “sacar a lo sumo una cruz”

c) Escribe los sucesos contrarios.

d) Obtén las uniones e intersecciones dos a dos.

e) Halla las probabilidades de A , B y C .