TEMA 3

FUNCIONES: GRÁFICAS Y OPERACIONES

Contenidos

1. Concepto de función. Terminología.
2. Gráficas de las funciones elementales.
3. Estudio de una función.
4. Operaciones aritméticas.
5. Composición de funciones.
6. Otras funciones elementales.
7. Anexo: función recíproca.

Tiempo estimado

12 sesiones

Criterios de Evaluación

1. Conoce la terminología asociada al concepto de función: dominio, imagen,...
2. Comprende qué es la gráfica de una función.
3. Sabe analizar la variación de una función a través de su gráfica.
4. Conoce las gráficas de las funciones elementales.
5. Sabe realizar las operaciones básicas con las funciones.
6. Sabe componer funciones elementales y obtener imágenes numéricas.
7. Asimila el concepto de función inversa y sabe obtenerla en casos elementales.

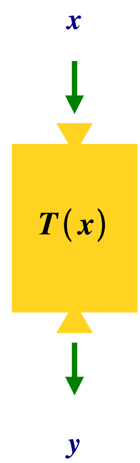
1.Concepto de función. Terminología.

Procedamos a dar la definición y ver los términos que se usan normalmente:

- Una función real f es una transformación que a cada número x le hace corresponder exactamente un número designado por $y = f(x)$:

$$x \xrightarrow{f} y$$

- El número x es llamado original, y se llama dominio al conjunto de todos los originales.
- Al número y se le llama "transformado o imagen", llamándose recorrido al conjunto de todas las imágenes.



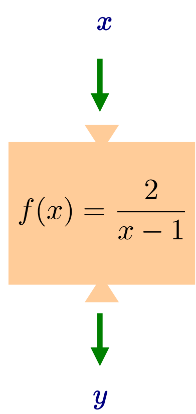
Podemos imaginar una función f como una "máquina transformadora". En ella van entrando los números "x" y van saliendo sus imágenes $y = f(x)$.

Cómo se calcula el transformado de cada número entrante depende de la función en cuestión. Es usual que dicho procedimiento esté dado a través de una fórmula, denominándose a

- x variable entrante o "independiente"
- y variable saliente o "dependiente".

El dominio será "el conjunto de todos los números admitidos en la máquina" y el recorrido el "conjunto de todos los números salientes de la máquina".

☞ Ejemplo: consideremos la función f definida por $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$.



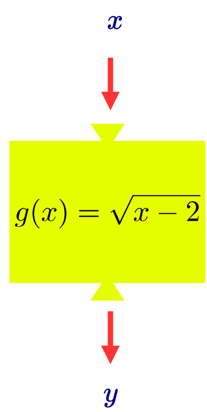
- Veamos algunas imágenes o transformados:

$$\begin{array}{lcl} x = 0 & \to & y = f(0) = -2 \\ x = 3 & \to & y = f(3) = 1 \\ x = 1 & \to & y = f(1) = \emptyset \end{array}$$

- El dominio es el conjunto de los valores x para los que existe la fórmula $\dfrac{2}{x-1}$. Es claro que no puede ser $x = 1$. Así:

$$\mathcal{D} = (-\infty\,, 1) \cup (1\,, +\infty)$$

☞ Ejemplo: sea g la función definida por la fórmula $g(x) = \sqrt{x-2}$.



- Veamos algunos transformados:

$$\begin{array}{lcl} x = 4 & \to & y = g(4) = \sqrt{2} \\ x = 2 & \to & y = g(2) = 0 \\ x = 1 & \to & y = g(1) = \emptyset \end{array}$$

- Observemos que su dominio es el conjunto de los valores x para los que existe $\sqrt{x-2}$. Es claro que debe ser $x \geq 2$. Así:

$$\mathcal{D} = [2\,, +\infty)$$

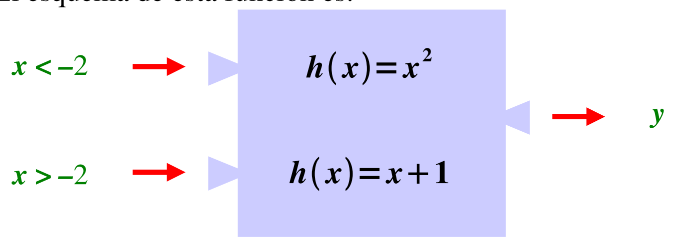
☞ Ejemplo: sea h la función definida por

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < -2 \\ x+1 & \text{si} \quad x > -2 \end{cases}$$

La función de la izquierda está definida a través de varias fórmulas. Según sea el valor de x habrá que usar una u otra.

A esta clase de funciones se las llama funciones "a trozos" o "definidas por partes".

- El esquema de esta función es:



- Veamos algunos transformados:

$$\begin{array}{lcl} x=-4 & \to & y = h(-4) = (-4)^2 = 16 \\ x=-2 & \to & y = h(-2) = \emptyset \\ x = 3 & \to & y = h(3) = 3+1 = 4 \end{array}$$

- Su dominio es el conjunto de los valores x para los que existe la función. Es claro que para todo valor de x salvo para el -2. Así:

$$\mathcal{D} = (-\infty\,, -2) \cup (-2\,, +\infty)$$

☞ Ejemplo: consideremos la función $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

- ¿Cuál es el original de $y = 5$?

  Buscamos un x con $5 = \dfrac{2x+1}{x-1}$. Resolviendo la ecuación tenemos que es $x = 2$.

- Comprueba que $y = 2$ no tiene original (ello quiere decir que ese valor no está en el recorrido).

También se expresa de esta forma: la **anti-imagen** de y = 3 es x=2.

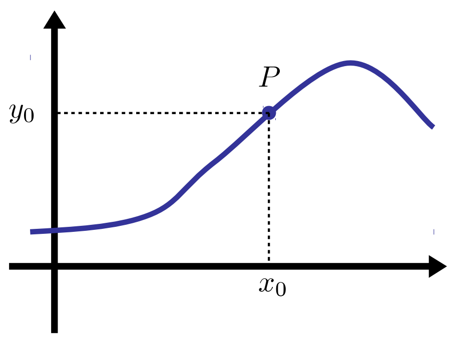
2. Gráficas de funciones elementales

Una función también puede definirse a través de su gráfica. Recordemos:

La gráfica de una función f es el conjunto de los puntos del plano

$$\mathcal{G} = \{(x\,, y) : y = f(x)\}$$

Esquemáticamente, para la función f:

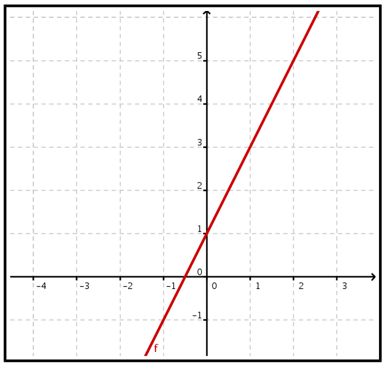


$$P \in \mathcal{G}(f) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$$

La gráfica de una función es muy útil para el conocimiento de determinados aspectos de la función, como es el estudio de la variación global (¿en qué intervalos crece la función?).

Aunque no lo es tanto para el estudio de otros aspectos, como es al cálculo "exacto" de valores (para esto es más útil la fórmula).

❑ Funciones afines (rectas)



Son las definidas por una fórmula de la forma $f(x) = mx + n$.

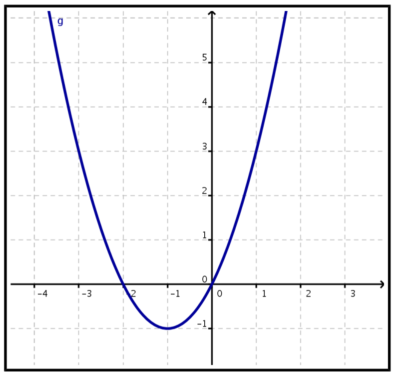
Recuerda: $y = mx + n$ es la ecuación de una recta con pendiente a:

- Si $m > 0$ es creciente.
- Si $m < 0$ es decreciente
- Si $m = 0$ es horizontal.

Dicha recta corta al eje de ordenadas para $y = n$ (por eso se le llama ordenada en el origen).

En el margen se ha representado la función $y = 2x + 1$.

❑ Funciones cuadráticas (parábolas)



Son las definidas por una fórmula de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.

La gráfica es una parábola de eje vertical, respecto de la que es simétrica, y:

- Si $a > 0$ la parábola tiene las ramas hacia arriba (convexa).
- Si $a < 0$ la parábola tiene las ramas hacia abajo (cóncava).

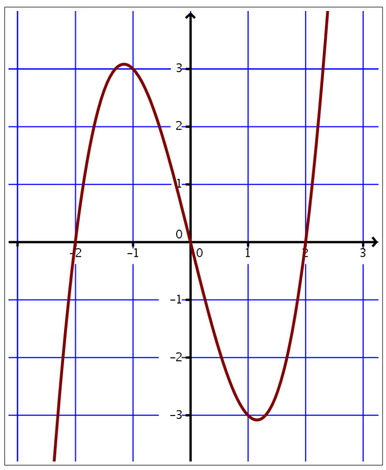
La abscisa del vértice viene dada por:

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

Aquí tenemos representada $y = x^2 + 2x$.

Recordemos que una función a trozos está definida a través de varias fórmulas; es por ello que su gráfica está compuesta de los trozos de las gráficas correspondientes a cada fórmulas en su intervalo del dominio.

❑ Funciones polinómicas



Las gráficas $y = p(x)$ donde p es un polinomio de grado superior a dos son curvas. Su representación manual puede ser más o menos difícil. Entre los puntos más interesantes de esas curvas destacamos los extremos relativos y los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

Están definidas y son continuas en todo $\mathbb{R}$ y no presentan asíntotas, sino ramas infinitas. En el margen se ha representado $y = x^3 - 4x$.

Observemos que si deseamos prolongar hacia la izquierda deberemos dibujar una rama parabólica hacia abajo. Pero para prolongar la curva hacia la derecha deberemos dibujar una rama parabólica hacia arriba. Esto se resume, simbólicamente, así:

$$\text{Si } x \to -\infty \text{ es } y \to -\infty$$

$$\text{Si } x \to +\infty \text{ es } y \to +\infty$$

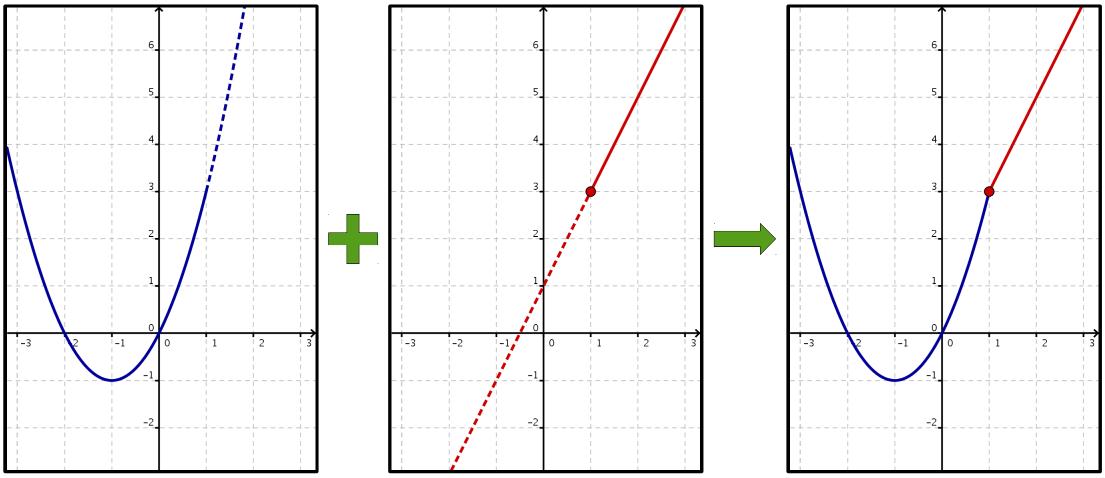
Función a trozos

Consideremos, por ejemplo, la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si} \quad x < 1 \\ 2x + 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

La gráfica se compone de dos partes bien diferenciadas: el "trozo de parábola" $y = x^2 + 2x$ para $x < 1$ y el "trozo de recta" $y = 2x + 1$ para $x \geq 1$.

Ojo: es posible que las gráficas de los diferentes trozos pueden no ensamblar de manera continua, produciéndose agujeros (discontinuidades evitables) o roturas con deslizamiento (discontinuidades de salto).



Función de proporcionalidad inversa.

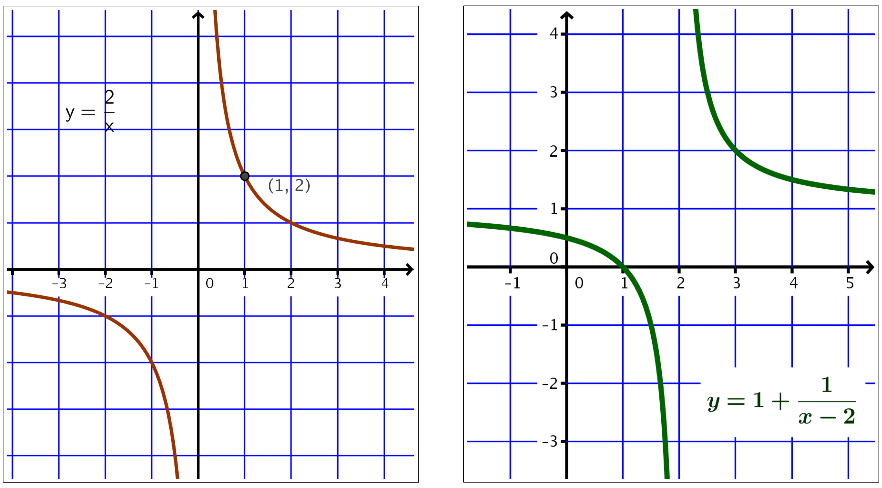
Es la definidas por $f(x) = \dfrac{c}{x}$ donde es $c \neq 0$.

La curva obtenida se denomina hipérbola. Las hipérbolas tienen dos asíntotas (rectas que sirven de guías de prolongación para sus ramas), que en este caso son los ejes de coordenadas.

Observemos:

- Si c > 0 decrece
- Si c < 0 crece.

Aquí tenemos representadas usando Geogebra un par de ellas:



Fíjate en la gráfica de la derecha. Se obtiene de la hipérbola

$$y = \frac{1}{x}$$

Trasladándola una unidad hacia arriba y dos unidades a la derecha.

Por eso ahora sus asíntotas son:

- Vertical: x=2.
- Horizontal: y=1.

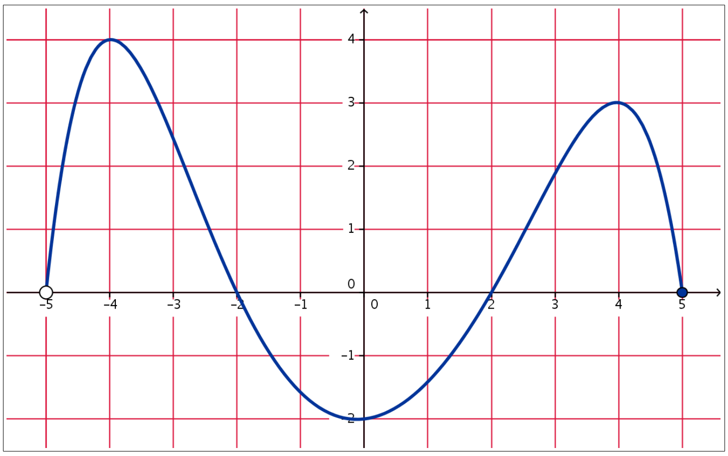
A partir de ellas, trasladando vertical y horizontalmente obtenemos

$$f(x) = b + \frac{c}{x-a}$$

En ésta la asíntota vertical es ahora $x = a$ y la asíntota horizontal $y = b$.

3. Estudio de una función.

Recordemos los puntos básicos con gráfica de la función $y = f(x)$:

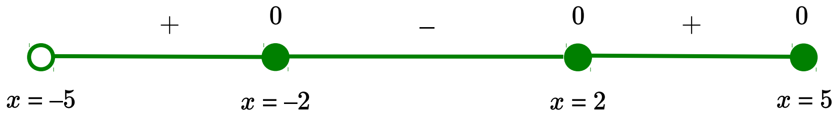


- Dominio: conjunto de valores x para los que hay gráfica.
- Recorrido: conjunto de valores y para los que hay gráfica.

Continuidad: ¿la gráfica puede realizarse con un solo trazo (continua) o presenta agujeros, roturas, saltos,... (discontinua)?

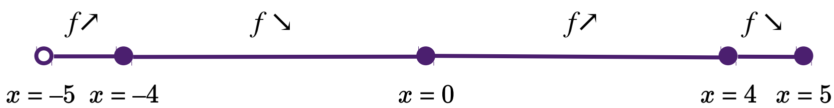
Las asíntotas son rectas que sirven de guía para prolongar las ramas infinitas de algunas funciones.

- ☞ Dominio: $\mathcal{D} = (-5\,,+5]$
- ☞ Recorrido: $\mathcal{R} = [-2\,,+4]$
- ☞ Continuidad: es continua para todos los valores de su dominio. Ahora bien, hay una singularidad: para $x = -5$ hay agujero en el inicio de la gráfica (es denominado discontinuidad evitable).
- ☞ Asíntotas: la gráfica no presenta asíntotas de ningún tipo.
- ☞ Signo: resumimos la variación del signo de la función en el siguiente esquema, en el que también señalamos sus ceros.



- Ceros: cortes con el eje X
- Positiva: gráfica sobre el eje X
- Negativa: gráfica bajo el eje X

- ☞ Monotonía: he aquí el esquema que muestra los intervalos en los que la función crece o decrece:



Monotonía: ¿en qué intervalos de x la función y = f(x) crece o decrece?

- Es f ↗ en I si al aumentar x también aumenta y.
- Es f ↘ en I si al aumentar x disminuye y

- ☞ Acotación: vemos que la función está acotada superiormente ($y = 5$ es cota superior) y acotada inferiormente ($y = -3$) es cota inferior. Concluimos, pues, que la función está acotada.
- ☞ Extremos:

  $A = (-4\,,4)$ es un máximo relativo y es el máximo absoluto.

  $B = (0\,,-2)$ es un mínimo relativo y es el mínimo absoluto.

  $C = (4\,,3)$ es un máximo relativo.

  $D = (6\,,0)$ es un mínimo relativo.

- ☞ Simetrías: no apreciamos simetrías.
- ☞ Periodicidad: no es una función periódica.

Extremos: puntos en los que una función presenta sus máximos o mínimos (si existen).

Diferenciamos extremos relativos y extremos absolutos.

4.Operaciones aritméticas con funciones.

Dadas dos funciones f y g es fácil introducir a partir de ellas su suma, su diferencia, su producto o su cociente: bastará con que efectuemos esas operaciones en los valores comunes a sus respectivos dominios.

Consideremos las funciones f y g.

Para cada x común al dominio de ambas funciones definimos:

- La función suma $f+g$ como $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- La función diferencia $f-g$ como $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
- La función producto $f \cdot g$ como $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- La función cociente $\frac{f}{g}$ como $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

  en este caso, además, deberá ser $g(x) \neq 0$.

☞ Ejemplo: si $f(x) = 3x$, $g(x) = x - 2$:

$(f+g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + (-2) = -2$

$(f-g)(1) = f(1) - g(1) = 3 - (-1) = 4$

$(f \cdot g)(3) = f(3) \cdot g(3) = 9 \cdot 1 = 9$

☞ Ejemplo: si $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$, $g(x) = 2x$:

$$(f+g)(x) = \frac{2x+1}{x-1} + \frac{2x}{1} = \frac{(2x+1)\cdot 1 + 2x\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot 1} = \frac{2x^2+1}{x-1}$$

$$(f \cdot g)(x) = \frac{2x+1}{x-1} \cdot \frac{2x}{1} = \frac{4x^2+2x}{x-1}$$

5.Composición de funciones.

Para comprender esta forma tan usada de operar con funciones tomemos, en primer lugar un ejemplo. Consideremos la función:

$$T(x) = \sqrt{\log_{10}(x^2)}$$

Si deseamos obtener la imagen de un número, hemos de encadenar varias transformaciones –y en un determinado orden–:

1º. Calcular el cuadrado (del número).

2º. Calcular el logaritmo (del resultado anterior).

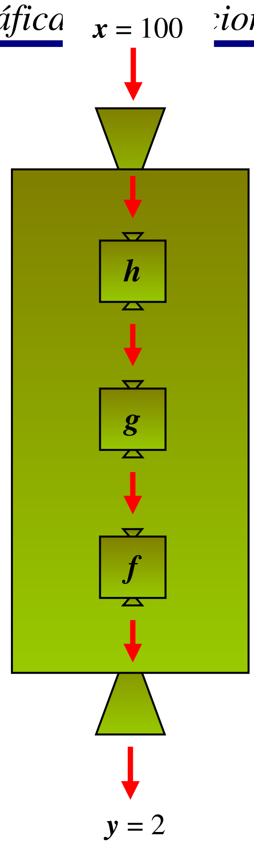
3º. Calcular la raíz cuadrada (del resultado anterior).

Como vemos, esta transformación se realiza encadenando otras más simples, que son:

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ , } g(x) = \log_{10}(x) \text{ y } h(x) = x^2$$

Para $x = 100$, por ejemplo:

$$\begin{tikzcd} x = 100 \arrow[r, "h"] \arrow[rrr, bend right, "T"'] & 10\,000 \arrow[r, "g"] & 4 \arrow[r, "f"] & y = 2 \end{tikzcd}$$



Pasemos a definir los términos:

La composición $f \circ g$ de las dos funciones f y g se define mediante: $$(f \circ g)\,(x) = f\,[g(x)]$$

Esquemáticamente:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & g(x) \arrow[r, "g"] & (f \circ g)(x) \end{tikzcd}$$

☞ Nota: no hay un acuerdo sobre cómo llamar a $f \circ g$. Unos la denominan "f compuesta con g" y otros "g compuesta con f". En cualquier caso, obsérvese que primero actúa g y en segundo lugar f.

☞ Ejemplo: si $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = x^2$, $h(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2 + 2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

$$(f \circ h)\,(-1) = f\,[h(-1)] = f(-4) = 3 \cdot (-4) + 1 = -11$$

$$(h \circ f)\,(-1) = h\,[f(-1)] = h(-2) = -2 - 3 = -5$$

$$(f \circ g)\,(x) = f\,[g(x)] = f(x^2) = 3x^2 + 1$$

$$(g \circ f)\,(x) = g\,[f(x)] = g(3x + 1) = 3\,(3x + 1)^2 = 9x^2 + 6x + 1$$

Como podemos ver, la composición es una operación que no goza de la propiedad conmutativa. Así, en general:

$$f \circ g \neq g \circ f$$

Se debe tener en cuenta que, para ciertas funciones, pueden coincidir las dos compuestas.

☞ Ejemplo: la función

$$T(x) = \sqrt{2x - 4}$$

es la composición de

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ y } g(x) = 2x - 4$$

pues

$$(f \circ g)\,(x) = f\,[g(x)] = f(2x - 4) = \sqrt{2x - 4}$$

6.Otras funciones elementales

Funciones exponenciales

Son las definidas por $f(x) = a^x$ con $a > 0$, $a \neq 1$.

Están definidas y son continuas para todo número real. Siempre son positivas y pasan por los puntos $(0, 1)$ y $(1, a)$. Ahora bien, si $a > 1$ es creciente y si $a < 1$ es decreciente

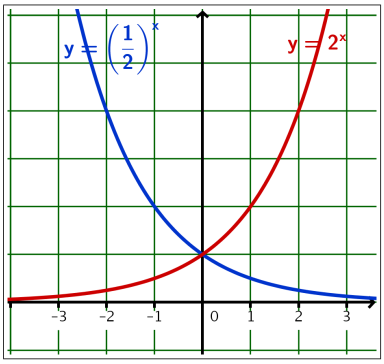
Observemos que la prolongación horizontal de la curva es muy diferente si vamos hacia la izquierda o si vamos hacia la derecha.

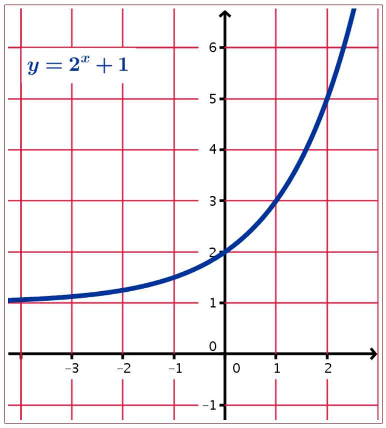
Con la ayuda de Geogebra se ha dibujado en el margen $y = 2^x + 1$.

Observa que para prolongar hacia la izquierda usamos la asíntota $y = 1$ pero que si prolongamos hacia la derecha tenemos una rama parabólica (va hacia arriba). Esto se resume simbólicamente así:

Si $x \to -\infty$ es $y \to 1$ Asíntota horizontal $y = 1$ hacia la izquierda

Si $x \to +\infty$ es $y \to +\infty$ Rama parabólica para arriba hacia la derecha



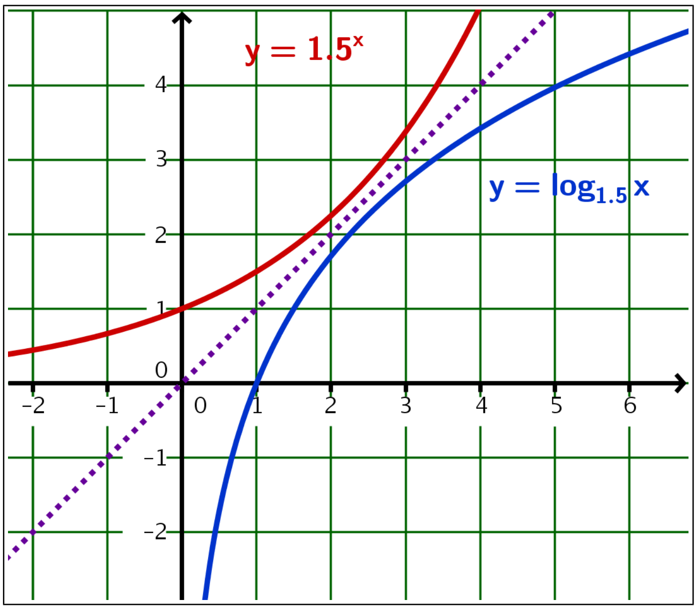


Función logarítmica

Son las definidas por $f(x) = \log_a x$ con $a > 0$, $a \neq 1$.

Recordemos que $y = \log_a x$ significa que $a^y = x$.

Aquí se han dibujado en los mismos ejes $y = 1.5^x$ con $y = \log_{1.5} x$:



Observemos la simetría de ambas gráficas respecto de la recta y=x.

Así, el punto (a,b) está en una sólo cuando el punto (b,a) está en la otra.

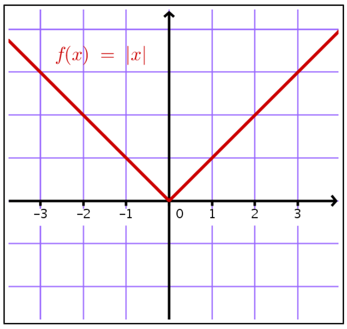
Ello es debido a que la logaritmación es la operación inversa de la exponenciación.

Las funciones logarítmicas están definidas y son continuas en $(0, +\infty)$, siendo $x = 0$ una asíntota vertical.

Todas pasan por los puntos $(1, 0)$ y $(a, 1)$. Ahora bien, si $a > 1$ es creciente y si $a < 1$ es decreciente.

❑ Función valor absoluto

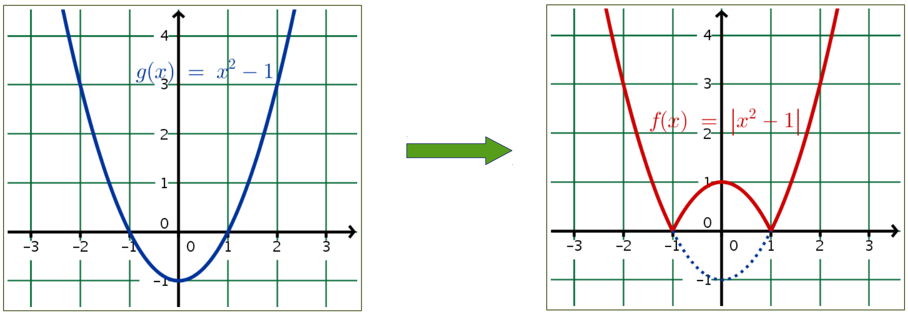
Recordemos el concepto de valor absoluto, viendo en el margen su gráfica:



$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Para dibujar una función $y = |f(x)|$ podemos intentar:

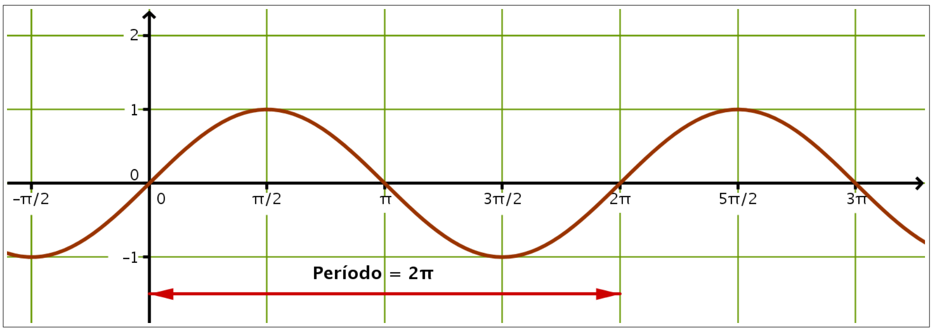
- bien expresarla como una función a trozos
- bien dibujar la gráfica $y = f(x)$ y la zona que esté bajo el eje de abscisas reflejarla, así le cambiamos el signo y quedará con ordenada positiva.



Arriba se ha representado $y = |x^2 - 1|$ partiendo de $y = x^2 - 1$: basta reflejar sobre el eje de abscisas la zona donde la parábola es negativa.

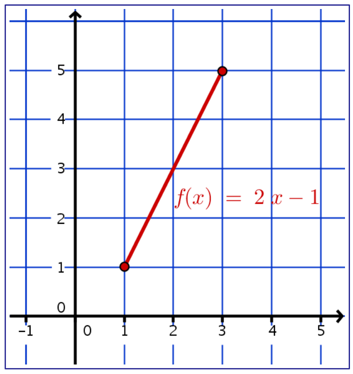
❑ Funciones seno/coseno

Aquí tenemos representada usando Geogebra la función seno:



La línea obtenida se denomina curva sinusoidal. Es una función definida y continua en toda la recta real. Observa su forma de onda y un aspecto fundamental: su periodicidad. Es una función 2π-periódica que varía entre -1 y $+1$. No tiene asíntotas ni ramas infinitas.

7. Anexo: funciones recíprocas.



Introduzcamos el concepto de función recíproca a partir de un sencillo ejemplo.

Sea f la función definida en el intervalo $A = [1\,,3]$ por la fórmula

$$f(x) = 2x - 1$$

A cada número x de $A = [1\,,3]$ la función f le asocia un único número y del intervalo $B = [1\,,5]$. La relación que guardan las variables viene dada por:

$$y = 2x - 1$$

Recíprocamente, dado un número cualquiera y de B encontramos exactamente un número x de A tal que $y = f(x)$. Para encontrar ese x basta despejar en la ecuación:

$$y = 2x - 1 \;\rightarrow\; 2x = y + 1 \;\rightarrow\; x = \frac{y+1}{2}$$

La fórmula $x = \dfrac{y+1}{2}$ expresa a x como función de y. Si llamamos g a la función así definida, es

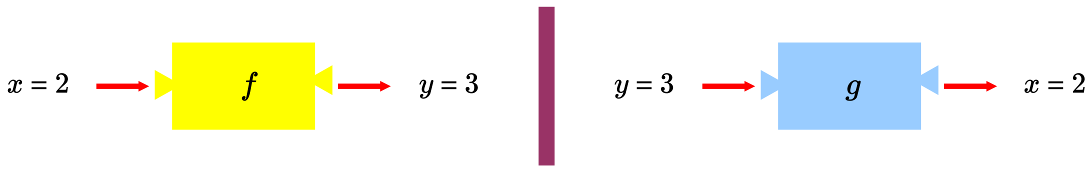
$$g(y) = \frac{y+1}{2}$$

Observemos que esta función asocia a cada y de $B = [1\,,5]$ su anti–imagen x de $A = [1\,,3]$.

La función g se llama inversa de f, y se la designa habitualmente f^{-1}.

Fíjate:

- La función g asocia a cada valor de y su anti–imagen x:



- Las funciones se "eliminan" al componerlas:

  $(f \circ g)\,(y) = f\,[g(y)] = f(x) = y$

  $(g \circ f)\,(x) = g\,[f(x)] = g(y) = x$

- La operaciones en g son las "inversas" a las de f y se realizan en orden inverso:

  En f: primero se multiplica por 2 y luego se resta 1.

  En g: primero se suma 1 y luego se divide por 2.

- El recorrido f es el dominio de g y el recorrido de g es el dominio de f.

☞ Ejemplo: Dada la función $f(x) = \sqrt[5]{3x-2}$, obtengamos la fórmula de su función recíproca:

$$y = \sqrt[5]{3x-2} \;\rightarrow\; 3x - 2 = y^5 \;\rightarrow\; x = \frac{y^5+2}{3} \;\rightarrow\; f^{-1}(y) = \frac{y^5+2}{3}$$

☞ Ejemplo: Consideremos la función $f(x)=\dfrac{2x}{x-3}$.

Obtengamos la fórmula de su función recíproca:

$$y=\frac{2x}{x-3} \to xy-3y=2x \to (y-2)\,x=3y \to x=\frac{3y}{y-2}$$

Es

$$f^{-1}(y)=\frac{3y}{y-2}$$

Comprobemos directamente que $\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=x$:

$$\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=f^{-1}\left(\frac{2x}{x-3}\right)=\frac{3\cdot\frac{2x}{x-3}}{\frac{2x}{x-3}-2}=\frac{\frac{6x}{x-3}}{\frac{6x}{x-3}}=x$$

Ejercicios

1. Sea f la función definida mediante la fórmula

$$f(x) = \frac{x}{x-3}$$

a) Obtén la imagen de $x = 5$.

b) Calcula $f(1)$ y $f(-1)$.

c) Halla la anti–imagen de $y = 10$.

d) ¿Cuál es el dominio de f ?

2. Sea g la función definida mediante la fórmula

$$g(x) = \sqrt{x-5}$$

a) Obtén la imagen de $x = 14$.

b) Calcula $g(0)$ y $g(5)$.

c) Halla la anti–imagen de $y = 5$.

d) ¿Cuál es el dominio de g ?

3. Sea h la función definida mediante la fórmula

$$h(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2 - 2x & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$$

a) Calcula $h(-3)$, $h(-1)$ y $h(3)$.

b) ¿Cuál es el dominio de h?

4. Halla a sabiendo que pasa por el punto $P = (1\,,5)$ la gráfica de la función definida por

$$f(x) = x^3 + ax^2 - 3x + 1$$

5. La curva $y = x^2 + ax + b$ pasa por $P = (-1\,,3)$ y su ordenada en el origen es -2. Halla a y b

6. Halla el dominio de definición de las funciones

a) $f_1(x) = 3x - 6$ b) $f_2(x) = \dfrac{5x}{3x-6}$

c) $f_3(x) = \sqrt{3x-6}$ d) $f_4(x) = \dfrac{2}{\sqrt{3x-6}}$

7. Obtén el dominio de las funciones siguientes:

a) $y = x^2 - 1$ b) $y = \dfrac{x+2}{x-8}$

c) $y = \sqrt{x^2 - 9}$ d) $y = \ln(4 - x^2)$

8. Representa las gráficas cuya ecuación se da:

a) $y = x - 2 \quad , \quad y = |x-2|$

b) $y = x^2 - 4x \quad , \quad y = |x^2 - 4x|$

9. Representa la gráfica de cada función y luego estudia: dominio, recorrido, continuidad, tendencias de prolongación, monotonía, extremos y signo.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad -2 \leq x < 1 \\ -x+2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad -4 \leq x < -1 \\ x^2 & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad -2 \leq x < 0 \\ x^2 - 2x & \text{si} \quad 0 < x < 3 \end{cases}$

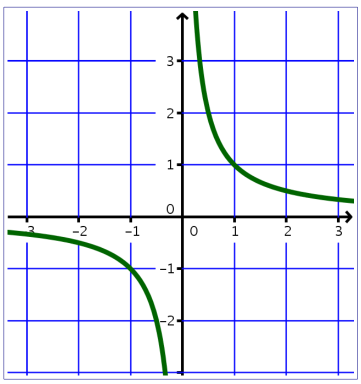
d) $f(x) = \begin{cases} 4x + x^2 & \text{si} \quad x < 1 \\ \dfrac{2x+8}{x+1} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} 3^x - 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ -x^2 + 2x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

f) $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$

g) $f(x) = \left| 2 + \dfrac{3}{x-1} \right|$

10. Dibuja, partiendo de la hipérbola $y = \dfrac{1}{x}$ dibujada a continuación



a) $y = \dfrac{1}{x-2} + 3 = \dfrac{3x-5}{x-2}$

b) $y = \dfrac{1}{x+1} - 2 = \dfrac{-2x-1}{x+1}$

c) $y = \dfrac{-1}{x-3}$

11. Dibuja la parábola $y = x^2$. a partir de ella, señala cómo dibujar

a) $y = (x-2)^2$

b) $y = x^2 - 4$

c) $y = (x-1)^2 + 1$

d) $y = \pm 2x^2$

12. Durante cinco horas se estudia la temperatura (ºC) de un objeto que varía en función del tiempo (h) transcurrido desde el inicio de la medición según la fórmula

$$T = t^2 - 2t - 8 \quad , \quad 0 \le t \le 5$$

a) ¿Cuál es la temperatura al inicio del experimento? ¿Y al final?

b) ¿En qué instante se halla a cero grados?

c) Dibuja la gráfica tiempo – Temperatura.

d) Indica cuándo la temperatura está bajo cero y cuándo por encima.

e) ¿En qué período de tiempo aumenta la temperatura del objeto? ¿En cuál disminuye?

f) Señala las temperaturas extremas.

g) Construye un esquema de variación de la función.

13. Las funciones siguientes, definidas para $0 \le t \le 18$

$$I(t) = -2t^2 + 51t \quad , \quad G(t) = t^2 - 3t + 96$$

representan, respectivamente, los ingresos y gastos de una empresa, en miles de euros, en función de los años (t) transcurridos desde su inicio y en los últimos 18 años.

a) ¿Para qué valores de t, desde su entrada en funcionamiento, los ingresos coincidieron con los gastos?

b) Determine la función que refleje los beneficios (ingresos menos gastos) en función de t y represéntela gráficamente [elige escala 2 para el eje de abscisas y 20 para el eje de ordenadas]

c) ¿Al cabo de cuántos años, desde su entrada en funcionamiento, los beneficios fueron máximos?

d) Calcule el valor de dicho beneficio.

e) ¿Hubo algún momento en que la empresa tuvo pérdidas?

14. La población de insectos que hay en un terrario viene dada por la fórmula siguiente:

$$n(t) = 24 + 10t - t^2 \quad , \quad 0 \le t \le 12$$

a) ¿Cuántos individuos hay al inicio del experimento? ¿Y al final?

b) ¿Durante qué período de tiempo crece o decrece el número de insectos?

c) ¿Cuál es la población máxima? ¿Y la mínima?

d) Realiza un esquema de variación que sintetice la evolución de dicha población.

15. Una compañía que fabrica bolígrafos lanza al mercado un nuevo producto. Se supone que la relación entre el precio, x céntimos por unidad, del nuevo bolígrafo y el beneficio, $b(x)$ miles de euros, viene dado por la función

$$b(x) = -x^2 + 130x - 3000$$

a) ¿Qué beneficio obtiene cuando vende cada bolígrafo a 50 céntimos.?

b) Represente gráficamente la función b [usa una escala de 10 para el eje de abscisas y de 20 para el de ordenadas]

c) ¿Para qué valores del precio de venta de cada bolígrafo obtiene pérdidas? ¿Y beneficios?

d) Calcule a qué precio debe vender cada bolígrafo para que el beneficio sea máximo y obtenga dicho beneficio.

16. Un almacenista de frutas ha estimado que el beneficio que le produce cada kilo de fresas depende del precio de venta de acuerdo con la función

$$B(x) = -2x^2 + 8x - 6$$

donde B es el beneficio por kilo y x el precio de cada kilogramo, ambos expresados en euros.

a) ¿Qué beneficio obtendría si vendiese cada kilo a 2 euros?

b) ¿Entre qué precios se producen beneficios para el almacenista?

c) ¿Qué precio maximiza los beneficios? ¿Cuál es el máximo beneficio posible?

d) Si tiene en el almacén 10000 kg de fresas, ¿cuál será el beneficio total máximo que podrá obtener?

17. El gerente de una empresa sabe que los beneficios dependen de la inversión, x , según la función

$$f(x) = x^2 + 11x - 10$$

(x es la cantidad invertida, en millones de euros).

a) Determine los valores de la inversión para los que la función beneficio es no negativa.

b) Halle el valor de la inversión para el cual el beneficio es máximo. ¿A cuánto asciende éste?

c) ¿Entre qué valores ha de estar comprendida la inversión para que el beneficio sea creciente, sabiendo que éste es no negativo?

18. Una empresa de automóviles ha estimado que su beneficio B, en millones de pesetas, depende del tiempo t, en minutos, que dedica diariamente a publicidad, según la función:

$$B(t) = -0.1t^2 + 12t - 200$$

a) Dibuje su gráfica [escala 20 en ambos ejes]

b) Calcule los minutos diarios que debe dedicar a publicidad para obtener un beneficio máximo. ¿Cuál es ese beneficio?

c) Calcule en qué intervalo debe estar comprendido el tiempo diario dedicado a publicidad para que la empresa obtenga beneficios.

19. El consumo de luz de una vivienda, en función del tiempo transcurrido, viene dado por la expresión:

$$f(t) = -2t^2 + 20t + 100 \quad (0 \leq t \leq 12)$$

a) Represente gráficamente la función.

b) ¿En qué periodo de tiempo aumenta el consumo? ¿En cuál disminuye?

c) ¿En qué instante se produce el consumo máximo? ¿Y el mínimo?

20. Un agricultor comprueba que si el precio al que vende cada caja de fresas es "x" euros, su beneficio diario, en euros, será:

$$B(x) = -10x^2 + 100x - 210$$

a) Represente la función precio–beneficio.

b) Indique a qué precio debe vender cada caja de fresas para obtener el máximo beneficio. ¿Cuál será ese beneficio máximo?

c) ¿A qué precios obtiene pérdidas el agricultor?

21. El beneficio obtenido por la producción y venta de x kilos de un artículo viene dado por la función:

$$f(x) = -0.01x^2 + 3.6x - 180$$

a) Represente gráficamente esta función.

b) Determine el número de kilogramos que hay que producir y vender para que el beneficio sea máximo.

c) Determine cuántos kilogramos se deben producir y vender, como máximo, para que la empresa no tenga pérdidas.

22. Tras un test realizado a un nuevo modelo de automóvil, se ha observado que el consumo de gasolina, $C(x)$, expresado en litros, viene dado por la función

$$C(x) = 7.5 - 0.05x + 0,00025x^2$$

siendo x la velocidad en km/h y $25 \leq x \leq 175$.

a) Determine el consumo de gasolina a las velocidades de 50 km/h y 150 km/h.

b) Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función $C(x)$.

c) ¿A qué velocidades de ese intervalo se obtiene el mínimo consumo y el máximo consumo y cuáles son éstos?

23. En una empresa han hecho un estudio sobre la rentabilidad de su inversión en publicidad, y han llegado a la conclusión de que el beneficio obtenido, en miles de euros, viene dado por la expresión

$$B(x) = 0.5x^2 - 4x + 6$$

siendo x la inversión en publicidad, en miles de euros, con x en el intervalo $[0\,,10]$.

a) Representa la gráfica de la función beneficio.

b) ¿Para qué valores de la inversión la empresa tiene pérdidas?

c) ¿Cuánto tiene que invertir la empresa en publicidad para obtener el mayor beneficio posible?

d) ¿Cuál es el beneficio si no se invierte nada en publicidad? ¿Hay algún otro valor de la inversión para el cual se obtiene el mismo beneficio?

24. Un banco lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad $R(x)$, en miles de euros, viene dada en función de la cantidad, x, que se invierte, también en miles de euros, por la siguiente expresión:

$$R(x) = -0.001x^2 + 0.4x + 3.5 \quad (x \geq 10)$$

a) Calcule la rentabilidad para una inversión de 100000 euros.

b) Deduzca y razone qué cantidad habría que invertir para obtener la máxima rentabilidad.

c) ¿Qué rentabilidad máxima se obtendría?

25. Un consultorio médico abre a las 5 de la tarde y cierra cuando no hay pacientes. La expresión que representa el número medio de pacientes en función del tiempo en horas (t) que lleva abierto el consultorio es

$$N(t) = 4t - t^2$$

a) ¿A qué hora el número medio de pacientes es máximo? ¿Cuál es ese máximo?

b) Sabiendo que el consultorio cierra cuando no hay pacientes, ¿a qué hora cerrará?

c) Represente la función N mientras $N(t) \geq 0$.

26. Un estudio acerca de la presencia de gases contaminantes en la atmósfera de una ciudad indica que el nivel de contaminación viene dado por la función

$$C(t) = -0.2t^2 + 4t + 25 \quad (0 \leq t \leq 25)$$

donde t son los años transcurridos desde el año 2000.

a) ¿En qué año se alcanzará el máximo nivel de contaminación?

b) ¿En qué año se alcanzará un nivel de contaminación cero?

27. Consideremos la función $y = 2^{x+1} - 2$.

a) Completando la siguiente tabla, representa en unos ejes de coordenadas su gráfica.

x	–2	–1	0	1	2	3
$y = 2^{x+1} - 2$						

b) Estudia el dominio, recorrido, continuidad, monotonía, extremos, signo y prolongación.

28. Ídem para $y = 0.5^{x+2} - 1$

29. Esboza las siguientes funciones analizando previamente sus asíntotas, la monotonía y los cortes con los ejes.

a) $f(x) = \dfrac{2x}{x-1} = \dfrac{2x-2+2}{x-1} = 2 + \dfrac{2}{x-1}$

b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2} = \dfrac{x+2-1}{x+2} = 1 + \dfrac{-1}{x+2}$

Observa que se han descompuesto para observar cómo obtenerlas a partir de la hipérbola $y = \dfrac{1}{x}$

30. Si

$$f(x) = x^2 + 1 \ , \ g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 4 - x^2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) Calcula $(f+g)(3)$ y $\left(\dfrac{f}{g}\right)(5)$

b) Ídem $(f \circ g)(0)$, $(f \circ g)(-2)$, $(g \circ f)(0)$.

31. Dadas

$$f(x) = \frac{x+1}{x-3} \ , \ g(x) = 2x - 1$$

a) Obtén $(f+g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ y sus dominios.

b) Ídem para $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$.

32. Expresa como una composición de funciones

a) $h(x) = \log(x^2)$

b) $h(x) = \sqrt{3x-4}$

c) $h(x) = 2^{5x-1}$

33. Obtén para las funciones

$$f(x) = \frac{x}{x-4} \ , \ g(x) = 2x + 1 \ , \ h(x) = x^2$$

a) $(f \circ g \circ h)(2)$ y $(f \circ h \circ g)(2)$.

b) $(f \circ g \circ h)(x)$ y $(f \circ h \circ g)(x)$

34. Obtén la recíproca, $D(f)$ y $D(f^{-1})$ para:

a) $f(x) = x^3 - 8$

b) $f(x) = \sqrt[5]{2x-4}$

c) $f(x) = \sqrt[4]{3x-6}$

d) $f(x) = \dfrac{5}{x-3}$

e) $f(x) = 5^{x+1} - 4$

f) $f(x) = \log_3(3x+1)$

35. Plegando un alambre de 12 *cm.* construimos un rectángulo. Expresa la longitud de la altura y de la diagonal en función de lo que mida la base

36. La diagonal de un rectángulo mide 5 cm. Expresa su área en función la longitud de su base.

37. Vamos a dibujar un rectángulo que debe tener superficie igual a 10 cm^2 . Expresa la longitud de su altura en función de la longitud de la base (x).

38. Vamos a dibujar un cilindro con 2 cm. de diámetro. Expresa su volumen en función de su altura.

39. Vamos a construir un prisma de base cuadrada y con un volumen de 1 litro.

Expresa la altura de la caja y el área total de la caja en función del lado x de la base.

40. En el interior de una circunferencia inscribimos un cuadrado. Expresa su área en función del radio de la circunferencia.

41. En un cuadrado inscribimos un círculo. Expresa su área en función del lado del cuadrado.

42. Una familia va a alquilar un vehículo durante una semana. La empresa de alquiler le ofrece dos posibilidades para contratar el automóvil que ha elegido:

- Contrato A: 40 € al día sin tener en cuanta los kilómetros que recorra.
- Contrato B: 10 € al día más 1.25 € por cada kilómetro recorrido.

Realiza una gráfica que muestre el costo del contrato B en función de los kilómetros recorridos y *discute* qué contrato es más conveniente.

Cuestiones

1. Al despejar y de la expresión $x = y^2$, ¿se obtiene la expresión de una función?

2. La expresión $S = x^2$ permite hallar la superficie de un cuadrado conocido su lado x. ¿Cuál es el dominio de la función así definida?

3. Comprueba que no son iguales las funciones f y g definidas por

$$f(x) = \frac{x^2}{x} \quad , \quad g(x) = x$$

4. *Consideremos las funciones f y g definidas por:

$$f(x) = \sqrt{x^2} \quad , \quad g(x) = x$$

¿Son iguales las funciones f y g así definidas?

5. ¿Qué funciones tienen como recorrido un único número real? Pon algún ejemplo.

6. En una función, ¿puede un número real tener infinitas anti–imágenes?

7. Explica a través de un ejemplo qué diferencia hay la “función opuesta” y la “función inversa”.

8. Comprueba con un ejemplo que el producto de dos funciones puede ser la función cero sin que ninguna de las dos funciones sea idénticamente nula.

9. Dada un función $y = f(x)$, se dice que es:

- Par o simétrica respecto del eje Y si
$$f(-x) = f(x) \ , \ \forall x \in D_f$$
- Impar o simétrica respecto del origen si
$$f(-x) = -f(x) \ , \ \forall x \in D_f$$

Comprueba que

a) $y = x^4 + 1$ es par

b) $y = x^3 + x$ es impar

10. Se define el valor absoluto de un número real de la siguiente forma:

$$|x| = \text{máx}(-x \, , x)$$

a) Calcula el valor de absoluto de –2, 3 y 0.

b) Comprueba que se tiene:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

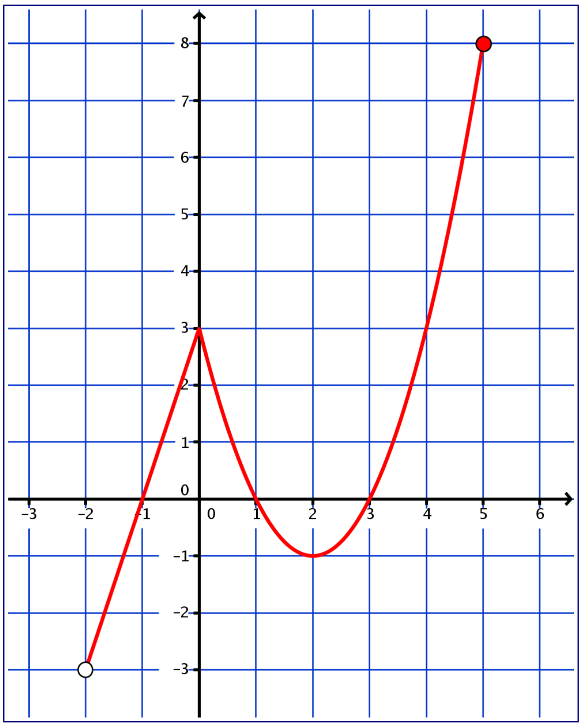
c) Representa la gráfica $y = |x|$.

11. Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios. Razona cuál es el dominio de la función definida por

$$y = \frac{p(x)}{q(x)}$$

Autoevaluación

1. La gráfica $y = f(x)$ es la siguiente. Estudia:



a) Imagen de $x = 2$.

b) Anti–imagen de $y = 3$.

c) Dominio.

d) Recorrido.

e) Monotonía de la función.

f) Extremos.

g) Estudio de signo.

h) Continuidad.

2. Representa la gráfica de f, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x < 2 \\ x + 1 & \text{si} \quad 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

3. Dadas las funciones definidas por:

$$f(x) = \sqrt{x-6} \quad , \quad g(x) = x^2 + 5x \quad , \quad h(x) = 2x$$

a) Halla $(f+g)(6)$ y $(f \circ h)(5)$

b) Obtén $(f \circ h)(x)$ y su dominio.

c) Idem. Para $\dfrac{h}{g}$.

4. Dada la función exponencial

$$y = 2^{x+1} - 1$$

a) Completando la siguiente tabla, representa en unos ejes de coordenadas su gráfica.

x	–3	–2	–1	0	1	2
$y = 2^{x+1} - 1$						

b) ¿Cuál es la tendencia de la función – y – cuando x toma valores “infinitamente pequeños” ?

c) ¿Y cuando x toma valores “infinitamente grandes”?

5. En un experimento que dura cuatro horas se estudia la temperatura (T) de un objeto. Ésta varía en función del tiempo (t) transcurrido desde el inicio de la experiencia según la fórmula

$$T = t^2 - 2t - 3 \quad , \quad 0 \leq t \leq 4$$

donde el tiempo está en horas y la temperatura en grados centígrados.

a) ¿Cuál es la temperatura al inicio del experimento? ¿Y al final?

b) ¿En qué instante el cuerpo se halla a cero grados?

c) Dibuja la gráfica tiempo – Temperatura.

d) ¿En qué período de tiempo aumenta la temperatura del objeto? ¿En cuál disminuye?

e) Señala las temperatura máxima y mínima alcanzadas.

f) Construye un esquema de variación de la función.

g) Indica cuándo la temperatura está bajo cero y cuándo por encima.

6. En el interior de un círculo de radio 2 cm. se inscribe un rectángulo.

Expresa su área en función de la longitud de su base.

¿Cuál es el dominio de esa función?

Autoevaluación

1.

a) Observamos en la gráfica que el punto correspondiente es $(2\,,-1)$. Así:

$$x = 2 \overset{f}{\to} y = -1$$

b) Observamos que hay dos puntos en la gráfica cuya ordenada es $y = 3$, así:

$$y = 3 \overset{f}{\leftarrow} x = 0\,, x = 4$$

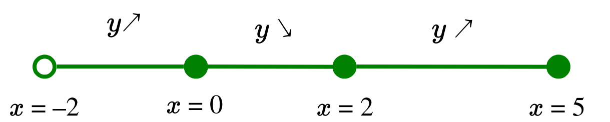
c) El dominio es el conjunto de los valores x para los que hay gráfica: para todos los valores x del intervalo comprendido entre $x = -2$ y $x = 5$, excluido el primero e incluido el último:

$$D_f = (-2\,,5]$$

d) El conjunto de imágenes es el formado por todos los valores y del intervalo comprendido entre $y = -3$ (excluido) e $y = 2$ (incluido). Así:

$$R_f = (-3\,,8]$$

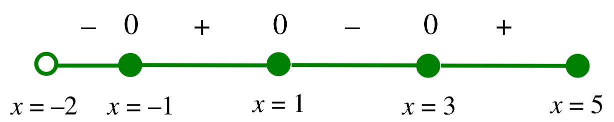
e) Señalamos en un esquema los intervalos en los que crece y decrece la función representada:



f) Es $y = 8$ el valor mínimo, alcanzándose para $x = 5$.

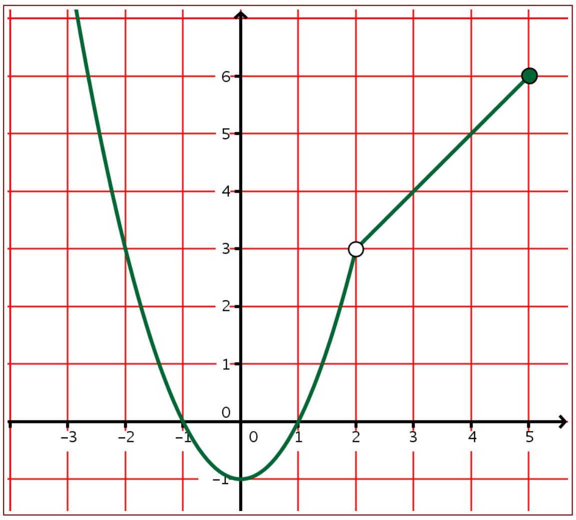
Es $y = -3$ el extremo inferior, pero no se alcanza para ningún valor de x.

g) Señalamos en un esquema los ceros y los intervalos de signo de la función:



h) La gráfica es continua en todo su dominio; ahora bien, para $x = -2$ presenta una discontinuidad evitable o de agujero.

2. La gráfica se compone de un trozo de parábola –con vértice para $x_v = 0$ – y de un trozo de recta:



3.

a) $(f+g)(6)=f(6)+g(6)=0+66=66$

$(f\circ h)(5)=f[h(5)]=f(10)=\sqrt{4}=2$

El esquema de esta composición es:

$$\underbrace{x = 5 \xrightarrow{h} 10 \xrightarrow{f} y = 2}_{f\circ h}$$

b) La fórmula que define a la función compuesta es:

$$(f\circ h)(x)=f[h(x)]=f(2x)=\sqrt{2x-6}$$

Para que dicha expresión exista, debe ser:

$$2x-6\geq 0$$

Resolviendo la inecuación:

$$D=[3,+\infty)$$

c) En cuanto al cociente:

$$\left(\frac{h}{g}\right)(x)=\frac{h(x)}{g(x)}=\frac{2x}{x^2+5x}$$

El denominador no puede ser cero:

$$x^2+5x=0 \;\to\; x=-5\;,\; x=0$$

Así:

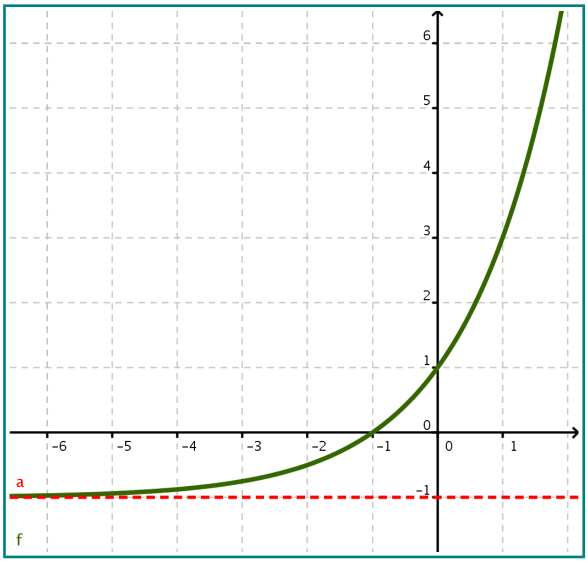
$$D = \mathbb{R} - \{-5\,,0\}$$

4.

a) Los valores de la tabla son:

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	$-0{,}75$	$-0{,}5$	0	1	3	7

Representamos con la ayuda de esos puntos la gráfica:



b) Observemos que y se aproxima cada vez más a -1 conforme x va tomando valores cada vez más pequeños ($y=-1$ es asíntota horizontal)

$$\text{Si } x \to -\infty \text{ es } y \to -1$$

c) Observemos queque y toma valores cada vez más grandes cuando x va tomando cada vez más grande (rama parabólica hacia arriba)

$$\text{Si } x \to +\infty \text{ es } y \to +\infty$$

5.

a) Hacemos $t=0 \rightarrow T=-3$:

Al inicio del experimento la temperatura es de tres grados bajo cero.

Haciendo $t=4 \rightarrow T=5$:

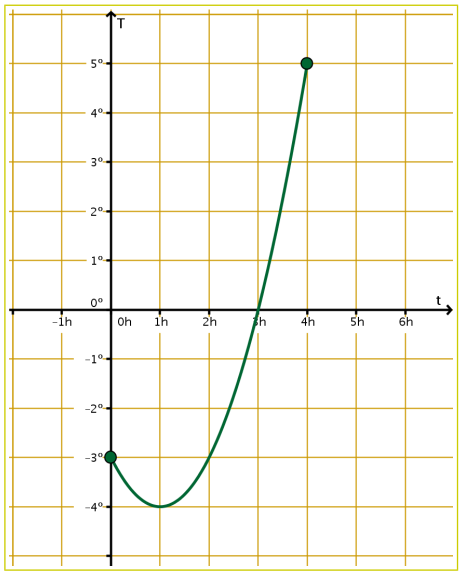
Al final de la experiencia la temperatura es de cinco grados.

b) Igualemos la temperatura a cero:

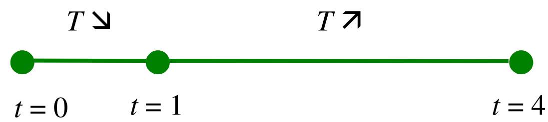
$$T=0 \rightarrow t^2-2t-3=0 \rightarrow t=3, t=-1 (\text{NO})$$

Tenemos así que está a cero grados cuando han transcurrido tras horas desde el inicio.

c) La gráfica será un trozo de parábola con vértice para $t=1$. Con una tabla de valores conseguimos:



d) En el siguiente esquema mostramos cuándo aumenta o disminuye la temperatura:



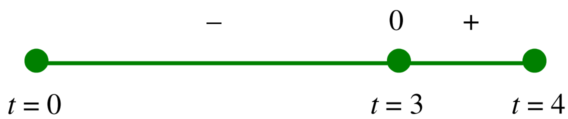
e) $T_{max}=5$ºC que se alcanza para $t=4h$.

$T_{min}=-4$ºC que se alcanza para $t=1h$.

f) La siguiente tabla resume la variación de la función:

t	0		1		4
T	-3	↘	-4	↗	5

g) En el esquema siguiente señalamos cuándo la temperatura está sobre cero (+) y bajo cero (–):



6.

a) Si es x la longitud de la base y h la longitud de la altura, al ser la diagonal igual al diámetro, por el Teorema de Pitágoras:

$$x^2+h^2=4^2 \rightarrow h=\sqrt{16-x^2}$$

Así la superficie del rectángulo, S es:

$$S=x\cdot\sqrt{16-x^2}$$

b) De la propia construcción geométrica se deduce que la longitud de la base (x) está comprendida entre 0 y 4 cm. (el diámetro de la circunferencia). Así, admitiendo un segmento como un rectángulo degenerado (base o altura nula) es:

$$D = [0\,,4]$$