

ARITMÉTICA MERCANTIL

La Europa Medieval de los siglos XIII y XIV experimentó un gran auge del comercio. Los negocios necesitaban de una contabilidad y multitud de problemas requerían de una respuesta por parte de las matemáticas.

Luca Pacioli (1445-1517) incorporó un tratado de matemática comercial a su aritmética. El reparto de beneficios, el cálculo de pérdidas, el intercambio de monedas, etc., establecieron las bases de la **aritmética financiera**.

Hoy en día, vivimos rodeados de los tecnicismos propios del mundo de los negocios, podríamos decir que la economía condiciona nuestras vidas.

Se dice que los economistas suelen usar las matemáticas como los borrachos las farolas: no para iluminarse, sino para apoyarse en ellas. En esta unidad vamos a intentar que las matemáticas si nos iluminen para entender los conceptos de la economía de la vida cotidiana.

1. AUMENTOS Y DISMINUCIONES PORCENTUALES.

- **Índice de variación:** $(1 \pm \frac{r}{100})$ es el número por el que tenemos que multiplicar la cantidad inicial para obtener la cantidad final cuando realizamos un aumento o disminución porcentual.

$$C_{final} = C_{inicial} \left(1 \pm \frac{r}{100}\right)$$

r es el % de aumento o disminución.

Ejercicio 1. Una pala de pádel que costaba 120 € fue rebajada un 15%. ¿Cuánto se pagó por ella?

Ejercicio 2. La reparación de mi moto cuesta 90 €. En la factura añadirán un 21% en concepto de IVA. ¿Cuánto pagaré al taller?

- **Para encadenar aumentos y disminuciones porcentuales.** Se determinan los índices de variación correspondientes a los distintos pasos y se multiplican.

Ejercicio 3. Dos años de crisis provocaron que el coste de la vida, en un determinado país, subiera un 12% el primer año y un 5% el segundo. No obstante, la economía mejoró al tercer año y los precios bajaron una media de un 3%. Si al principio de la crisis llenar el carro de la compra costaba 130 €, ¿cuánto era su coste al finalizar el tercer año? ¿Cuál fue la subida en esos 3 años?

- **Cálculo de la cantidad inicial conociendo la variación porcentual y la cantidad final:**

$$C_{inicial} = C_{final} : \left(1 \pm \frac{r}{100}\right)$$

Ejercicio 4. Una pala de pádel que estaba rebajada un 8% me ha costado 138 €. ¿Cuánto costaba antes de ser rebajada? ¿Cuánto me he ahorrado?

Ejercicio 5. He pagado 181,5 € (IVA incluido) por la factura de reparación de mi coche. ¿Cuál es el coste de la reparación sin el IVA?

- **Cálculo del % conociendo las cantidad inicial y final:**

Ejercicio 6. La nómina de un administrativo ha pasado de 1330 € brutos a 1420 € brutos. ¿Cuál ha sido el incremento salarial en %?

2. INTERESES BANCARIOS

Los bancos hacen negocio con el dinero que sus clientes depositan en la entidad (en realidad solo guardan una parte, los fondos de reserva para atender a los que desean sacar dinero). A cambio de disponer de los ahorros de los clientes, los bancos **pagan** a éstos unos **intereses**. Por supuesto, los bancos también **cobran intereses** cuando prestan dinero. Y además, cobran más de lo que pagan, es un lucrativo negocio.

- **Pago anual de intereses.**

$$C_f = C_i \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

r es el **rédito**, % que paga el banco

n es el **tiempo** en años

Ejercicio 7. ¿En cuánto se transforma un capital de 15000 € que se deposita al 3% de interés anual durante 10 años?

- **Pago mensual de intereses.**

Periodo de capitalización es el tiempo que debe transcurrir para que un capital produzca intereses.

$$C_f = C_i \left(1 + \frac{r}{1200}\right)^m$$

m es el **tiempo** en meses

- **Otros periodos de capitalización:**

Diarios:

$$C_f = C_i \left(1 + \frac{r}{36000}\right)^d$$

Trimestrales:

$$C_f = C_i \left(1 + \frac{r}{400}\right)^t$$

Semestrales:

$$C_f = C_i \left(1 + \frac{r}{200}\right)^s$$

Ejercicio 8. Averigua en cuánto se transforma un capital de 30000 € al 4% anual durante 5 años si los periodos de capitalización son:

- a) Años b) meses c) días d) trimestrales e) semestrales.

f) Determina el capital disponible en cada uno de los casos sabiendo que hacienda retiene el 21% de los intereses.

Ejercicio 9. Se coloca un capital de 7500 € al 3% anual y se obtiene un capital final de 9500€. Calcula el tiempo que ha estado depositado.

- **Tasa anual Equivalente (T.A.E.)**

En las cuentas de ahorro, cuando los periodos de capitalización son inferiores a un año, los intereses anuales producidos por un cierto capital son superiores al rédito que declara el banco. Se llama Tasa Anual Equivalente (T.A.E.) al % de crecimiento total del capital durante un año.

En los préstamos bancarios, la T.A.E. es, también, superior al rédito declarado. Al calcularla se incluyen los pagos fijos (comisiones y gastos) que cobra el banco para conceder el préstamo.

Ejercicio 10. Halla la T.A.E. correspondiente a un rédito anual del 6% con pagos mensuales de intereses.

3. CAPITALIZACIÓN.

Capitalizarse es ir aumentando el capital que se tiene en propiedad.

Una **anualidad de capitalización** es una cantidad que se deposita anualmente en una entidad financiera a interés compuesto para conseguir al cabo de cierto tiempo un capital determinado.

Ejemplo: un fondo de pensiones consiste en depositar mensualmente, trimestralmente o anualmente una cantidad y, al llegar a la edad de jubilación, recuperar el capital acumulado.

Para calcular la **suma total** acumulada por capitalización tendremos que hacer uso de las Matemáticas.

- **Progresión Geométrica:** es una sucesión de números: $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$ llamados términos de la progresión, en la cual cada término se obtiene multiplicando el anterior por un número constante, r , llamado razón de la progresión.

Ejemplo: 4, 8, 16, 32, 64, 128 ($r=2$)

- **Término general y n-ésimo:**

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

En la sucesión anterior: $a_n = 4 \cdot 2^{n-1}$ $a_7 = 4 \cdot 2^{7-1} = 256$

- **Suma de los términos de una progresión geométrica:**

$$S_n = \frac{r \cdot a_n - a_1}{r - 1}$$

En la sucesión anterior:

$$S_7 = \frac{2 \cdot a_7 - a_1}{2 - 1} = \frac{2 \cdot 256 - 4}{2 - 1} = 508$$

Ejercicio 11. Demuestra la fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica.

Ejercicio 12. Javier comenzó a trabajar el año pasado, su nómina apenas supera los 1000 € y aunque se desplaza al trabajo con el coche “viejo” de su padre, casi todo lo que gana se va en alimentación y pagar el alquiler, luz y agua del piso. De todas formas ha decidido ahorrar para comprar un coche nuevo dentro de 5 años. Si deposita, en una entidad financiera y al 4% anual, 2000 € el día 1 de cada año, ¿cuánto dinero tendrá al finalizar el quinto año? Si lo paga al contado, ¿qué coche le aconsejarías?

Ejercicio 13: María ha tenido una fructífera conversación con sus padres: han acordado que, si aprueba todo 1º de Bachillerato, podrá ir a la excursión de final de curso con sus compañer@s. Como faltan 10 meses tendrá que aportar una cuota de 100 € al comienzo de cada mes, ese dinero producirá unos intereses del 6% anual con periodos de capitalización mensuales. ¿Cuál será el capital acumulado por María?

4. CRÉDITOS. CÁLCULO DE ANUALIDADES O MENSUALIDADES PARA AMORTIZARLOS.

Crédito: cantidad de dinero que se pide prestado y que se debe devolver con un determinado interés y en un cierto tiempo.

Amortizar un crédito: es devolver la cantidad pedida y los intereses correspondientes.

Tipos de créditos: Personales (se piden para unos gastos cualesquiera), Hipotecas (aquellos que se piden para comprar una vivienda).

- **Amortización de una deuda mediante pagos anuales iguales (anualidades):**

$$a = C \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} \qquad i = \frac{r}{100}$$

Ejercicio 14. Demuestra la fórmula anterior a partir del cálculo del valor que tendrá el capital prestado y cada una de las anualidades en el momento que se paga cada una de ellas y por lo tanto se amortiza el préstamo.

Ejercicio 15. Solicitamos un préstamo de 20000€ para la compra de un vehículo, con un tipo de interés del 12% anual y hemos de devolverlo en 4 años mediante 4 pagos iguales. ¿Cuál será el valor de la anualidad?

- **Amortización de una deuda mediante pagos mensuales iguales (mensualidades):**

$$m = C \frac{(1+i)^n \cdot i}{(1+i)^n - 1} \qquad i = \frac{r}{1200}$$

Ejercicio 16. ¿Cuál sería la mensualidad, si en el mismo caso del ejercicio 15, los pagos se realizan mensualmente?

Ejercicio 17. Y si los pagos se realizan trimestralmente, ¿cuánto pagaremos cada trimestre?

Ejercicio 18. A un empresario le conceden un préstamo a un interés fijo del 11% anual, debiéndolo pagar en 8 anualidades. Cada anualidad resulta ser de 97160,53 €. ¿A cuánto alcanzaba el préstamo concedido?

- **Euribor:** Es el índice que indica el tipo de interés medio al que los bancos se prestan dinero entre sí en la zona euro.

Ejercicio 19. Nos han concedido un crédito para la compra de una vivienda. La hipoteca es de 150000 €. Debemos amortizarla en 20 años a un interés del Euribor más el 0,5%. El Euribor es en ese momento del 2,25%. Calcula la mensualidad. (sol: 813,3€)

Ejercicio 20. Una entidad nos concede un préstamo de 10000 € que debemos amortizar en un año mediante 12 pagos mensuales idénticos. Nos cobra un 12 % anual.

- Determina la mensualidad. (sol: 888,49 €)
- Completa la siguiente tabla:

Mensualidad	Deuda antes del pago	Intereses pendientes	pago	Cantidad amortizada	Deuda pendiente

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

- 21)** La entrada a un concierto costaba el año pasado 18 €. Este año ha costado 22 €.
 - a) Índice de variación.
 - b) Porcentaje de subida.

- 22)** El agua es un bien escaso, debemos ahorrar. Este es un año de sequía, la cantidad de agua en el embalse que abastece mi ciudad ha disminuido en un 45% respecto a lo que había el año pasado. Sólo quedan 22,5 millones de litros. ¿Cuánto había el año pasado por estas fechas?

- 23)** Un móvil de última generación costaba cuando salió al mercado 800 €. Como se esperaba que fuese muy demandado, lo subieron un 15% para la campaña de Navidad. Pasada ésta, lo rebajaron un 20%. ¿Cuál es el precio actual?

- 24)** Un televisor de 40 pulgadas costaba el mes pasado 420 €. Como han sacado al mercado un modelo mejor, han tenido que rebajar el anterior hasta los 360 €. ¿Qué % de rebaja han aplicado?

- 25)** En el contrato de trabajo de un empleado en la cadena de montaje de un vehículo de Seat se fija una subida anual del 3%. Si empieza ganando 1100 €. ¿Cuántos años tiene que pasar para que gane 1400 €?

- 26)** Si el precio del alquiler de un piso sube un 10% cada año, ¿cuántos años tardará en duplicarse?

- 27)** A los 60000 Km o a los 4 años (lo primero que tenga lugar) se ha de sustituir las 4 ruedas de un coche. La factura de este trabajo era de 280 € (ruedas incluidas), pero me aplicaron en primer lugar una rebaja del 8% y posteriormente el IVA (21%). ¿Cuánto pagué?

- 28)** Calcula en cuánto se transforman 6000 € en 5 años al 4% anual si los periodos de capitalización son:
 - a) Anuales . Mensuales. Trimestrales. Semestrales. Diarios.
 - b) Di en cada caso, cuál es la TAE correspondiente.

- 29)** Determina en cuanto se transforma un capital de 3500 € depositados durante 2 años y 3 meses al 2,5% si los periodos de capitalización son:
a) Anuales b) Trimestrales c) Mensuales
- 30)** Se depositan 24000 € al 2,75% de interés durante 4 años. Si hacienda retiene el 21%, ¿qué capital tendremos al cabo de los cuatro años?
- 31)** ¿A qué % anual se han de colocar 600 € para que en 2 años se conviertan en 699,84 €?
- 32)** Una entidad financiera paga el 2% **trimestral**. ¿Cuántos años deben estar depositados 2000€ para convertirse en 2536,48€? (sol: 3 años)
- 33)** Un capital colocado al 15% anual durante 4 años, se ha convertido en 5596,82 €. ¿A cuánto ascendía ese capital?
- 34)** Pedimos un crédito de 4000 € al 6,5% de interés semestral para devolverlo en un solo pago al cabo de los 2 años. ¿A cuánto ascenderá el pago?
- 35)** Se ingresan anualmente 1500 € en un fondo que garantiza un 6% de interés. ¿Qué cantidad se recuperará al cabo de 3 años. (sol: 5061,92€)
- 36)** Un ahorrador mete todos los años en la misma fecha 5000 € en una cuenta que le produce el 9,5% anual. ¿Qué cantidad habrá acumulado al cabo de 10 años? (sol: 85192,59€)
- 37)** Un ahorrador mete todos los meses 300 € (al primero de cada mes) en una cuenta que le produce el 3,5% anual, con periodos de capitalización mensuales. ¿Qué cantidad habrá acumulado al cabo de 10 años?
- 38)** Una persona inicia un plan de pensiones a los 45 años, con cuotas mensuales de 200 € al 9% anual, con periodos de capitalización mensuales. ¿De qué capital dispondrá a los 65 años? (sol: 34579,20€)
- 39)** ¿Durante cuántos años se ha de invertir 6000€ anualmente (cada año) al 3% de interés compuesto para obtener 115000€ de ahorro? (sol: 15 años)
- 40)** Calcula el importe de la anualidad con la que se amortiza un préstamo de 50000 € en 5 años al 15% de interés. ¿Y si se paga en mensualidades? (sol: 14915€ y 1189,50€)
- 41)** Compramos un frigorífico de 750€ y lo pagamos en 24 plazos mensuales con un interés del 13%. Determina la cuota mensual. (sol: 35,66€)
- 42)** Javier paga un coche a plazos, todos los meses 333,67 €, durante 5 años. El interés aplicado es muy alto, 12%. ¿Cuánto le hubiera costado el coche si lo hubiese pagado al contado? (sol: 15000€)
- 43)** Hemos solicitado un crédito personal al 6% anual, que hemos de amortizar en 7 anualidades de 14330,80 € cada una. ¿A cuánto ascendía el préstamo? (sol: 8000€)
- 44)** Hemos solicitado una hipoteca por valor de 85500 € al 4,25% a devolver en 15 años. Determina la mensualidad.