TEMA 2

ÁLGEBRA

<u>Contenidos</u>

1. Identidades y ecuaciones.
2. Gráficas y Ecuaciones.
3. Ecuaciones de 2º grado.
4. Ecuaciones polinómicas.
5. Ecuaciones de varias incógnitas.
6. Sistemas de ecuaciones.
7. Inecuaciones.

<u>Tiempo estimado</u>

16 sesiones

<u>Criterios de Evaluación</u>

1. Comprende qué es una ecuación y diferenciarla de una identidad.
2. Resuelve ecuaciones y sistemas de ecuaciones estudiados aplicando los métodos adecuados.
3. Comprende qué es una inecuación y sabe resolverla realizando estudios de signo.
4. Es capaz de interpretar geométricamente la solución de una ecuación o de una inecuación.
5. Ha adquirido soltura en resolver problemas que sean reducibles a ecuaciones o sistemas de ecuaciones.

1.Identidades y ecuaciones.

❑ Igualdades.

En Matemáticas manejamos constantemente igualdades entre expresiones algebraicas.

Observemos dos muy simples:

a) $x+x+x+x=4x$

b) $x+1=5$

Salta a la vista que hay una importante diferencia entre ellas:

La igualdad (a) es válida para todo valor numérico de *x*. Cuando sustituimos *x* por un número cualquiera y efectuamos las operaciones indicadas obtenemos resultados idénticos en los dos miembros de la igualdad. Por ello decimos que (a) es una identidad.

La igualdad (b) es válida sólo para algunos valores numéricos de *x*. Concretamente, cuando sustituimos *x* por el número 4 ($x = 4$) obtenemos resultados idénticos en los miembros (5 = 5); pero para todos los demás valores de *x* obtenemos resultados distintos en los dos miembros. Decimos en este caso que (b) es una ecuación.

De las igualdades:
- 2 x + 3 x = 5 x
- 2 x = x + 1

la primera es una identidad y la segunda es una ecuación: ¿por qué? ¿Para qué valor de x es cierta la igualdad? Compruébalo.

❑ Identidades.

Una identidad es una igualdad entre dos expresiones algebraicas, en la que para cualquier valor que tomen las letras ambas expresiones coinciden.

☞ Ejemplos:

$(x+2)^2=x^2+4x+4$ es una identidad.

$2x+1=7$ no es una identidad.

$(x+3)(x-3)=x^2-9$ es una identidad

$x^2-1=8$ no es una identidad

Las siguientes identidades aparecen usualmente y debes recordarlas:

$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

$(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$

$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$

Cuando efectuamos operaciones en una expresión algebraica (por ejemplo, para simplificar) establecemos una cadena de igualdades entre expresiones algebraicas idénticas.

Por ejemplo, cuando realizamos las operaciones siguientes para simplificar:

$$2(x+1)^2-(8x+2) \underset{(a)}{=} 2(x^2+2x+1)-8x-2 \underset{(b)}{=} 2x^2+4x+2-8x-2 \underset{(c)}{=} 2x^2-4x$$

cada una de las igualdades (*a*), (*b*) y (*c*) es una identidad.

❑ Ecuaciones.

Una ecuación es una igualdad entre dos entre dos expresiones algebraicas, de forma que sólo para ciertos valores que tomen las letras las expresiones coinciden.

En una ecuación, las letras que aparecen se denominan incógnitas.

Resolver una ecuación es hallar los valores particulares que, sustituidos en las incógnitas, convierte la ecuación en identidad numérica. A esos valores se les llama soluciones de la ecuación.

☞ Ejemplo: es claro que la igualdad

$$3x+1=x+3$$

es una ecuación, y es muy fácil resolverla:

$$3x+1=x+3 \;\rightarrow\; 3x-x=3-1 \;\rightarrow\; 2x=2 \;\rightarrow\; x=1$$

Tenemos que la solución es $x = 1$.

Sólo si sustituimos x por dicho valor la ecuación se transforma en una igualdad numérica cierta.

Comprueba que en la ecuación

$$\sqrt{x}+2=x$$

- $x = 4$ es solución,
- $x = 1$ no es solución.

❑ Ecuaciones equivalentes.

Cuando vamos a resolver una ecuación, intentamos reducir su resolución al de otra más sencilla que tenga las mismas soluciones:

Dos ecuaciones se dice que son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones.

Las reglas para obtener ecuaciones equivalentes a una dada son:

Si a los dos miembros de una ecuación sumamos o restamos una misma expresión algebraica, se obtiene una ecuación equivalente.

Si multiplicamos o dividimos los dos miembros de una ecuación por una expresión algebraica que nunca se anula obtenemos una ecuación equivalente.

Si tomamos la ecuación

$$x = 1$$

y elevamos los dos miembros al cuadrado:

$$x^2 = 1$$

obtenemos una ecuación que no es equivalente a la primera. ¡Compruébalo!

☞ Ejemplo: resolvamos la ecuación

$$4(x+5)-7=3(x+2)-x+1$$

Aquí detallamos el procedimiento:

quitando paréntesis y simplificando:	$4x+13=2x+5$
restando a ambos miembros $2x$ y 13:	$4x-2x=5-13$
simplificando:	$2x=-8$
dividiendo entre 2:	$x=-\frac{8}{2}$
la solución de la ecuación es:	$x=-4$

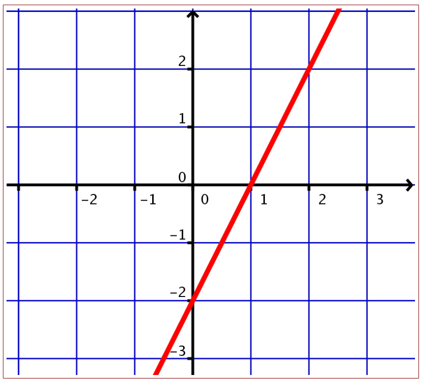
2. Ecuaciones y Gráficas.

Recta y ecuación de primer grado.

Vamos a representar la gráfica cuya fórmula es $y = 2x - 2$.

Debemos saber que obtendremos una recta con pendiente positiva. Sólo tenemos que formar una tabla de valores y representar en unos ejes de coordenadas las parejas obtenidas:

x	y
-2	-6
-1	-4
0	-2
1	0
2	2
3	6



Como vemos, la gráfica corta al eje **X** para $x = 1$.

Pensemos ahora en la ecuación $2x - 2 = 0$. ¿Cuál es su solución? Pues es precisamente $x = 1$.

Al representar la gráfica de

$$y = m x + n$$

obtenemos una recta.

El coeficiente m se denomina pendiente de la recta.

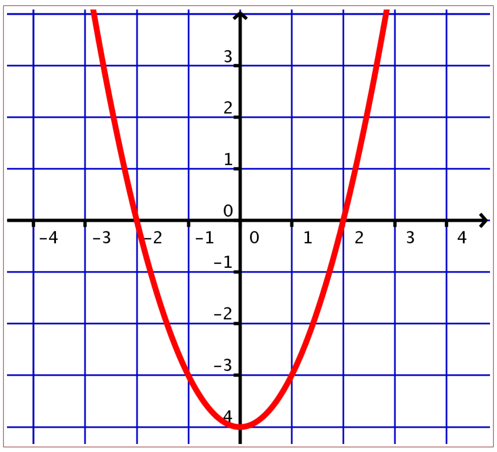
- Si $m > 0$, la recta es creciente.
- Si $m < 0$, la recta es decreciente.

Parábola y ecuación de segundo grado.

Representemos la función $y = x^2 - 4$.

Sabemos que obtendremos una parábola. Formemos una tabla de valores y representemos a partir de ella la curva:

x	y
-3	5
-2	0
-1	-3
0	-4
1	-3
2	0
3	5



Como vemos, corta al eje **X** para $x = -2$, $x = 2$.

Pensemos ahora en la ecuación $x^2 - 4 = 0$. Tiene dos soluciones, que son precisamente $x = -2$, $x = 2$.

Recordemos que al representar la gráfica de la función

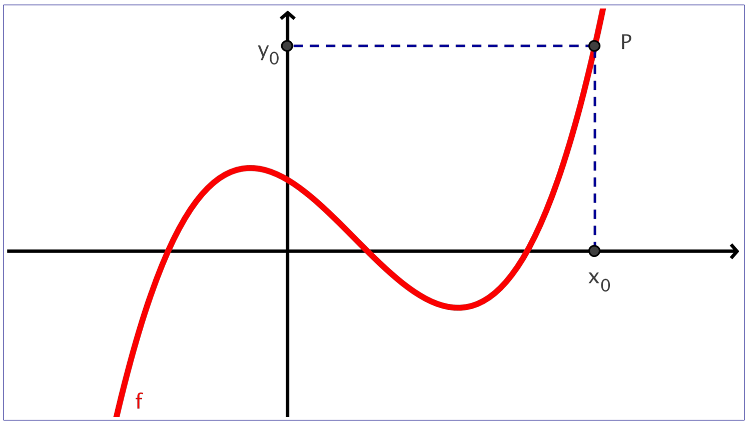
$$y = a x^2 + b x + c$$

obtenemos una parábola de eje vertical, cuyo vértice se encuentra para

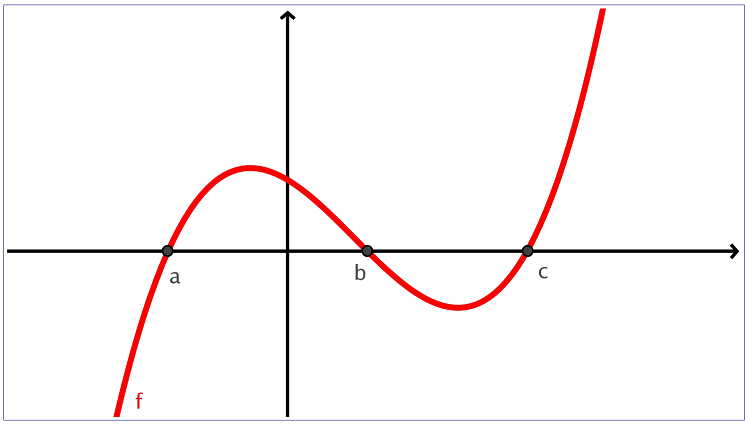
$$x_V = \frac{-b}{2a}$$

❑ Gráfica de una función y ecuación asociada.

En general, la gráfica de la ecuación $y=f(x)$ está formada por todos los puntos (x_0 , y_0) en los que y_0 es el valor obtenido al sustituir $x=x_0$ en la fórmula:



Observemos que esa gráfica corta al eje de abscisas o eje X en tres puntos distintos. Si los puntos de corte tienen abcisas a , b , c , respectivamente, la gráfica quedaría representada así:



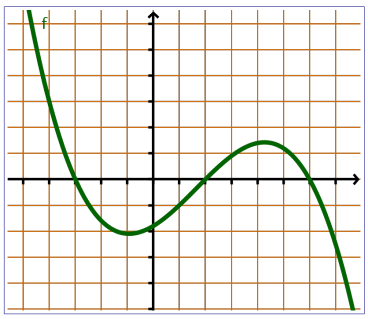
La ordenada de esos puntos es cero, así : $f(a)=f(b)=f(c)=0$.

Deducimos así:

Las abscisas de los puntos de corte de la gráfica de la función $$y=f(x)$$ con el eje X son las soluciones de la ecuación $$f(x)=0$$

☞ Ejemplo: Resolvamos la ecuación $f(x)=0$ sabiendo que la gráfica dibujada en el margen es $y=f(x)$.

Basta observar los cortes de la gráfica con el eje X. Las soluciones de la ecuación $f(x)=0$ son $x=-3$, $x=2$ y $x=6$.



3. Ecuación de segundo grado.

La ecuación de 2º grado.

Una ecuación de 2º grado es la que puede reducirse, tras aplicarle las reglas que la transforman en otra equivalente, a una de la forma

$$a\,x^2+b\,x+c=0$$

donde *a*, *b* y *c* son números reales con $a\neq 0$. Recordemos:

En la ecuación de 2º grado

$$a\,x^2+b\,x+c=0$$

la solución, si existe, viene dada por la fórmula

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a}$$

concretamente:

- si $b^2-4\,a\,c<0 \rightarrow$ no hay solución
- si $b^2-4\,a\,c=0 \rightarrow$ hay 1 solución
- si $b^2-4\,a\,c>0 \rightarrow$ hay 2 soluciones

Las ecuaciones de segundo grado las hemos estudiado en cursos anteriores y sabemos que pueden tener dos soluciones, una única solución o no tener ninguna.

También conocemos la fórmula que permite su resolución y hemos estudiado casos particulares en los que dicha fórmula no es necesaria.

☞ Ejemplo: resolvamos la ecuación $x^2+2\,x+5=0$

$$x^2+2\,x+5=0 \rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-16}}{2} \rightarrow \text{¡NO!}$$

La ecuación

$$x^2+2\,x+5=0$$

no tiene solución.

☞ Ejemplo: resolvamos la ecuación $x^2-2\,x+1=0$

$$x^2-2\,x+1=0 \rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2}=\frac{2\pm 0}{2} \rightarrow \left|\begin{array}{l} x=1 \\ x=1 \end{array}\right.$$

La ecuación

$$x^2-2\,x+1=0$$

no tiene una solución *doble*.

☞ Ejemplo: resolvamos la ecuación $6\,x^2-x-1=0$

$$6\,x^2-x-1=0 \rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2\cdot 6}=\frac{1\pm 5}{12} \rightarrow \left|\begin{array}{l} x=\frac{-1}{3} \\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

La ecuación

$$6\,x^2-x-1=0$$

tiene dos soluciones distintas .

☞ Ejemplo: resolvamos la ecuación $2\,x^2-5=3$

$$2\,x^2-5=3 \rightarrow 2\,x^2=8 \rightarrow x^2=4 \rightarrow x=\pm\sqrt{4} \rightarrow x=\pm 2$$

La ecuación tiene dos soluciones: $x = -2$, $x = 2$.

☞ Ejemplo: resolvamos la ecuación $(x+2)\cdot(x-3)=0$

$$(x+2)\cdot(x-3)=0 \rightarrow \left|\begin{array}{l} x+2=0 \rightarrow x=-2 \\ x-3=0 \rightarrow x=3 \end{array}\right.$$

La ecuación tiene dos soluciones: $x = -2$, $x = 3$.

Es muy fácil resolver una ecuación de 2º grado factorizada. Por ejemplo, en la ecuación

$$(x-a)\cdot(x+b)=0$$

es evidente que las soluciones son

$$x=a \;,\; x=-b$$

☞ Ejemplo: resolvamos la ecuación $2x^2-3x=0$

$$2x^2-3x=0 \;\rightarrow\; x\cdot(2x-3)=0 \;\rightarrow\; \left|\begin{array}{l} x=0 \\ 2x-3=0 \;\rightarrow\; x=\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

La ecuación tiene dos soluciones: $x=0\ ,\ x=\dfrac{3}{2}$.

❑ Ecuaciones bicuadradas.

La ecuación $x^4-4x^2+3=0$ no es de 2º grado, aunque guarda cierta semejanza con ellas.

Si hacemos el cambio $x^2=w$, la ecuación queda transformada en

$$w^2-4w+3=0$$

cuyas soluciones son $w=1$, $w=3$.

Así, para nuestra ecuación es:

$$\left|\begin{array}{l} x^2=w \;\rightarrow\; x^2=1 \;\rightarrow\; x=\pm 1 \\ x^2=w \;\rightarrow\; x^2=3 \;\rightarrow\; x=\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$$

La ecuación tiene cuatro soluciones:

$$x=-\sqrt{3}\ ,\ x=-1\ ,\ x=1\ ,\ x=\sqrt{3}$$

Las ecuaciones de la forma

$$a\,x^{2m}+b\,x^m+c=0$$

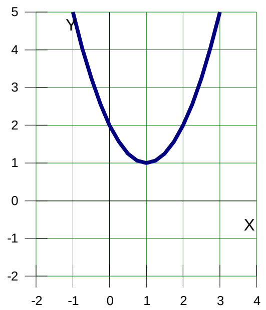
se resuelven fácilmente a través de la de 2º grado, pues es:

$$x^m=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

❑ Resolución gráfica.

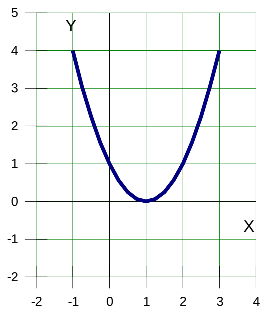
Como ya hemos visto, las soluciones de la ecuación $a\,x^2+b\,x+c=0$ vienen dados por los puntos de corte de la parábola $y=a\,x^2+b\,x+c$ con el eje X.

$y = x^2 - 2x + 2$



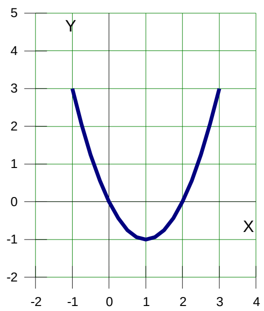
$x^2 - 2x + 2 = 0$
No tiene solución

$y = x^2 - 2x + 1$



$x^2 - 2x + 1 = 0$
Tiene 1 solución:
$x = 1$

$y = x^2 - 2x$



$x^2 - 2x = 0$
Tiene 2 soluciones:
$x = 0$, $x = 2$

Arriba vemos algunos ejemplos que ilustran de modo gráfico por qué una ecuación de segundo grado puede tener 0, 1 ó 2 soluciones.

4. Ecuaciones polinómicas.

Una ecuación polinómica es una ecuación del tipo $p(x)=0$, donde p es un polinomio. Las ecuaciones de primer grado, las de 2º grado o las ecuaciones bicuadradas son tipos particulares de ecuaciones polinómicas.

En general, no existe una "fórmula" que permita resolver una ecuación polinómica cualquiera $p(x)=0$.

Una forma de intentar resolver estas ecuaciones es factorizar el polinomio, ya que, como sabemos, el problema de la factorización de un polinomio está íntimamente relacionado con el de hallar sus ceros. Veamos algunos ejemplos:

☞ Ejemplo: resolvamos la ecuación de quinto grado

$$(x-1)^2\cdot(x+1)\cdot(x-3)=0$$

Es evidente que las soluciones son: $\left|\begin{array}{l} x=1 \quad \text{(doble)} \\ x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$

☞ Ejemplo: resolvamos la ecuación de quinto grado

$$(x-1)^3\cdot(x-\sqrt{5})^2=0$$

Es claro que las soluciones son: $\left|\begin{array}{l} x=1 \quad \text{(triple)} \\ x=\sqrt{5} \quad \text{(doble)} \end{array}\right.$

☞ Ejemplo: resolvamos la ecuación cúbica

$$x^3-4x=0$$

En este caso es muy fácil factorizar el polinomio:

$$x^3-4x \underset{(a)}{=} x\cdot(x^2-4) \underset{(b)}{=} x\cdot(x+2)\cdot(x-2)$$

(a) Extraemos factor común x

(b) Expresamos la diferencia de cuadrados como suma por diferencia:

$$x^2-2^2=(x+2)(x-2)$$

Así:

$$x^3-4x=0 \;\rightarrow\; x\cdot(x+2)\cdot(x-2)=0 \;\rightarrow\; \left|\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \\ x=2 \end{array}\right.$$

☞ Ejemplo: resolvamos la ecuación cúbica

$$6x^3-5x^2-3x+2=0$$

Factorizando parcialmente:

$$6x^3-5x^2-3x+2=(x-1)(6x^2+x-2)$$

¿No recuerdas cómo factorizar un polinomio? En el apéndice que encuentras al final puedes repasarlo

Así:

$$6x^3-5x^2-3x+2=0 \;\rightarrow\; \left|\begin{array}{l} x-1=0 \;\rightarrow\; x=1 \\ 6x^2+x-2=0 \;\rightarrow\; x=\dfrac{1}{2}\ ,\ x=-\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

5. Ecuaciones con varias incógnitas.

Ecuaciones con varias incógnitas.

Intentemos resolver algebraicamente el siguiente problema: "obtén dos números reales sabiendo que suman 5".

Dar una solución es sencillo. Observemos. Por ejemplo, una solución es la pareja de números $(4\ ,\ 1)$. Intentemos encontrar la solución general del problema: llamamos x a uno de los números e y al otro. Debe verificarse:

$$x+y=5$$

Esto es una ecuación lineal con dos incógnitas. Tiene infinitas soluciones:

$$(x,y)=(4,1)\ ,\ (x,y)=(-2,7)\ ,\ (x,y)=(0{,}5\,,4{,}5)\ ,\ \ldots$$

Para obtener soluciones, despejamos una incógnita en función de la otra:

$$x+y=5\ \rightarrow\ y=5-x$$

Ahora damos valores a la incógnita x:

$$\begin{array}{lll} \text{Si } x=1 \rightarrow y=4 & \text{Una solución es} & (x,y)=(1,4) \\ \text{Si } x=5 \rightarrow y=0 & \text{Una solución es} & (x,y)=(5,0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \text{Si } x=t \rightarrow y=5-t & \text{Una solución es} & (x,y)=(t,5-t) \end{array}$$

Importante: una solución no es un número, sino una pareja de números.

La solución general es, pues:

$$S=\{(t,5-t)\ :\ t\in\mathbb{R}\}$$

Ecuaciones lineales.

La ecuación de antes es una ecuación lineal. Otras ecuaciones lineales son:

$$2x+5=0\quad;\quad 3x-4y=5\quad;\quad x+y+z=3$$

En general:

> Una ecuación lineal es una ecuación polinómica de primer grado con una o varias incógnitas.

No son lineales aquellas en las que las incógnitas van elevadas a potencias, se multiplican entre sí, ... Por ejemplo:

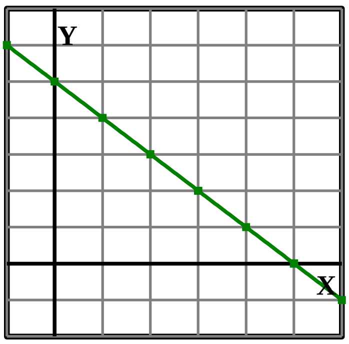
$$y-x^2=0\quad;\quad x\cdot y=1$$

Interpretación geométrica.

Hemos visto que la ecuación $x+y=5$ tiene infinitas soluciones, y que cada una de las soluciones es un par $(x\,,y)$ de números que cumple $y=5-x$.

Podemos representar cada pareja solución en unos ejes de coordenadas:

x	–1	0	1	2	3	4	5	6
$y=5-x$	6	5	4	3	2	1	0	–1



Obtenemos una recta, en la que las coordenadas de cada punto son una solución de la ecuación $x+y=5$.

> Una ecuación lineal de dos incógnitas puede interpretarse en el plano como una recta, donde los puntos de la recta son las soluciones de dicha ecuación.

6.Sistemas de ecuaciones.

Sistemas de ecuaciones lineales.

Consideremos ahora el siguiente problema: "Obtén dos números reales, sabiendo que su suma es 5 y que su diferencia es 1".

Si llamamos x al primer número e y al segundo, tienen que verificarse, a la vez, las dos condiciones siguientes:

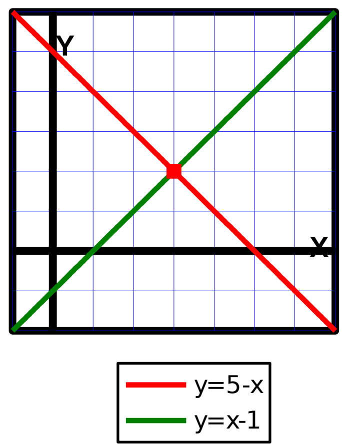
$$\begin{array}{lll} \text{Su suma es } 5 & \rightarrow & \left. \begin{array}{l} x+y=5 \\ x-y=1 \end{array} \right\} \\ \text{Su diferencia es } 1 & \rightarrow & \end{array}$$

Repasa en tus apuntes de cursos anteriores los métodos elementales de resolución de sistemas de ecuaciones: sustitución, igualación y reducción.

Ahí tenemos un sistema de ecuaciones: es la consideración simultánea de las dos igualdades.

La solución del sistema es un par de números que debe cumplir las dos ecuaciones. Por ejemplo, el par $(x,y)=(5,0)$ no es solución del sistema, siendo sólo solución de la primera ecuación. Es fácil observar que la única solución es $(x,y)=(3,2)$.

Interpretación geométrica de un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas.



Consideremos el sistema anterior.

Sabemos que cada ecuación se representa como una recta. Así:

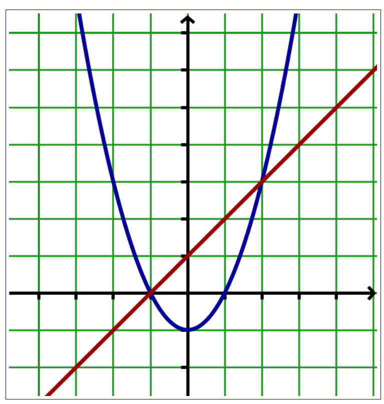
cada punto $(x\,,y)$ de la recta $y = 5 - x$ verifica la 1ª ecuación.

cada punto $(x\,,y)$ de la recta $y = x - 1$ verifica la 2ª ecuación.

¿Cuál será la solución del sistema? Ha de ser un punto de las dos rectas para que sea solución de las dos ecuaciones: es el punto de intersección.

Un sistema no lineal.

Consideremos ahora el sistema $\left\{ \begin{array}{l} x-y+1=0 \\ x^2-y=1 \end{array} \right.$



¿Qué interpretación geométrica tendrá? Observamos que la primera de sus ecuaciones se representará como una recta, y la segunda de ellas como una parábola. Así, las soluciones vendrán dadas como los puntos en que se cortan la recta y la parábola.

Como vemos en la gráfica, el sistema tendrá dos soluciones:

$$(x,y)=(-1,0) \;\;,\;\; (x,y)=(2,3)$$

7.Inecuaciones.

❑ Inecuaciones con una incógnita.

Una inecuación con una incógnita es una desigualdad de la forma

$$f(x)<0 \quad , \quad f(x)>0 \quad , \quad f(x)\leq 0 \quad , \quad f(x)\geq 0$$

donde $f(x)$ es una expresión algebraica en la que la única variable es x.

Resolver la inecuación es obtener todos los valores reales tales que al sustituir x por dichos números se verifique la desigualdad.

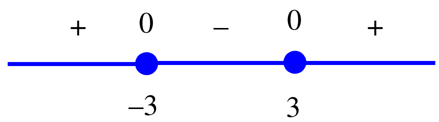
En general, la resolución de cualquier inecuación se reduce al estudio del signo que tenga $f(x)$, según los valores de x.

☞ Ejemplo: resolvamos la inecuación $x^2-9\leq 0$.

Debe ser x^2-9 negativo o cero.

Ceros: $x^2-9=0 \ \rightarrow \ x^2=9 \rightarrow \ x=\pm 3$

El esquema del signo de x^2-9 es el siguiente:



Tomaremos x entre -3 y 3, ambos incluidos, pues ahí x^2-9 es negativo o cero:

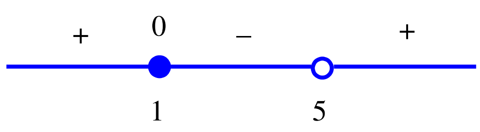
$$S=\{x : -3\leq x\leq 3\}=[-3,3]$$

☞ Ejemplo: resolvamos la inecuación $\dfrac{x-1}{x-5}\geq 0$

Averiguaremos para qué valores de x es $\dfrac{x-1}{x-5}$ positivo o cero:

- Veamos cuándo es cero el numerador: $x-1=0 \ \rightarrow \ x=1$
- Veamos cuándo lo es el denominador: $x-5=0 \ \rightarrow \ x=5$

Estudiemos el signo de $\dfrac{x-1}{x-5}$:



Tomaremos x menor o igual que 1 o mayor que 5, pues ahí es positiva o cero la fracción:

$$S=(-\infty,1]\cup(5,+\infty)$$

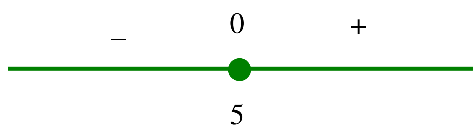
☞ Ejemplo: resolvamos la inecuación $2x - 6 > 4$.

Tenemos que $2x-6>4 \rightarrow 2x-10>0$.

Debemos, pues, estudiar para qué valores de x es $2x - 10$ positivo:

Ceros: $2x-10=0 \rightarrow x=5$

El esquema de los signos de $2x - 10$ es:



Hemos de tomar x mayor que 5 , pues ahí $2x - 10$ es positivo:

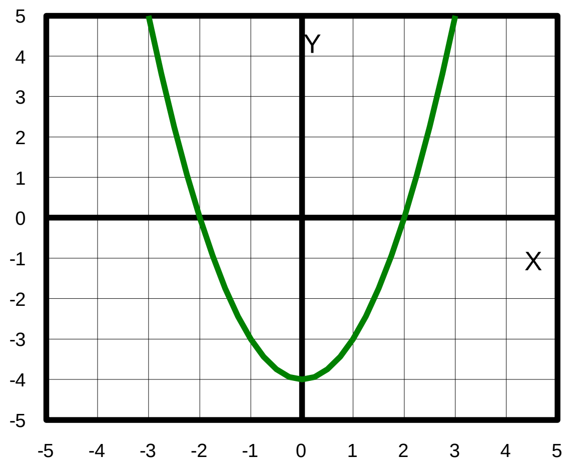
$$S=\{x \ : \ x>5\}=(5,+\infty)$$

❑ Interpretación gráfica de una inecuación.

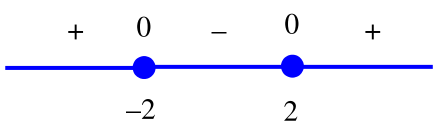
Dada la gráfica de una función, es fácil realizar su estudio de signo. Y a partir de éste podremos dar respuesta a inecuaciones referentes a dicha función.

Veremos a continuación un par de gráficas de funciones y los correspondientes estudios de signo.

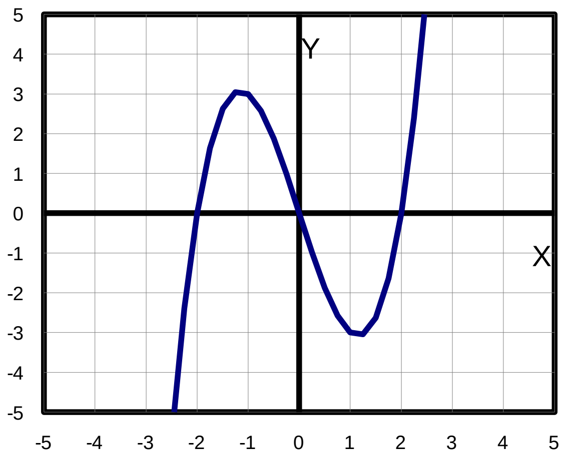
A1. Aquí la función de segundo grado $y=x^2-4$:



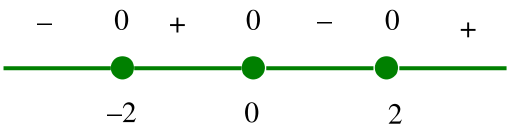
A2. El signo de x^2-4 viene dado en el esquema siguiente:



B.1 Aquí una función de tercer grado $y = x^3 - 4x$:



B.2 El signo de $x^3 - 4x$ viene dado en el esquema siguiente:



Como vemos, conociendo la gráfica de $y = f(x)$ es fácil hacer el estudio del signo de $f(x)$: basta identificar en qué intervalos del eje **X** la curva está por encima del eje ($y > 0$), y en qué intervalos del eje **X** la curva está por debajo del eje ($y < 0$).

8. Anexo: factorización de polinomios.

❑ Divisores y ceros.

Hay una estrecha relación entre los divisores (o factores) de un polinomio de primer grado y sus ceros (o raíces).

Así, por ejemplo, consideremos el polinomio $x^2-4=(x-2)(x-2)$.

Es claro que sus divisores son $(x-2)$ y $(x+2)$, y que si igualamos a cero resulta que sus ceros son $x=2$ y $x=-2$.

En general, tenemos:

> Dado cualquier polinomio $p(x)$, se tiene que equivalen:
>
> a) El número a es un cero del polinomio $p(x)$.
>
> b) El polinomio $x-a$ un divisor de $p(x)$.

> Observemos que dado un polinomio p(x) :
> - los ceros son las soluciones de la ecuación p(x) = 0 .
> - si no tiene ceros no puede tener divisores de la forma x – a .

☞ Ejemplo: comprobemos si x^5+x^4+2 es divisible entre $x+2$.

$$p(-2)=(-2)^5+(-2)^4+2=-14\neq 0$$

Como $x=-2$ no es un cero tenemos que $x+2$ no es un divisor.

❑ Factorización de un polinomio.

Al igual que ocurre con los números, factorizar un polinomio es expresarlo como producto de otros de menor grado que él. Por ejemplo, aquí tenemos factorizado x^2-9 :

$$x^2-9=(x+3)\cdot(x-3)$$

Y al igual que sucede con los números, hay algunos polinomios que no pueden expresarse como producto de otros de menor grado: son los llamados polinomios irreducibles o primos.

☞ Ejemplo: factoricemos el polinomio $x-2$.

Es un polinomio primo pues no puede descomponerse como producto de otros más simples.

☞ Ejemplo: factoricemos el polinomio x^2+4 .

Es fácil observar que este polinomio no tiene ceros ($x^2+4=0$ no tiene solución). Por tanto el polinomio no tiene ningún divisor de la forma $x\pm a$.

> Observemos que todo polinomio p(x) de 2º grado en el que la ecuación
>
> p(x) = 0
>
> no tenga solución es un polinomio primo, ya que no puede tener ningún divisor de primer grado.

Concluimos que el polinomio es primo.

En general:

> Los únicos polinomios primos son los de primer grado y los de 2º grado sin ceros reales.

☞ Ejemplo: factoricemos el polinomio $x^2-4x+3=0$.

Busquemos sus ceros:

$$x^2-4x+3=0 \rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2\cdot 1} \rightarrow \left| \begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array} \right.$$

Así tenemos que $x-1$ y $x-3$ son sus divisores primos. Luego:

$$x^2-4x+3=(x-1)\cdot(x-3)$$

☞ Ejemplo: factoricemos el polinomio $p(x)=x^3-1$.

Si $p(x)$ es un polinomio entero, sus ceros enteros son divisores del término independiente (si existen, claro).

Busquemos un cero del polinomio. Es fácil observar que $x = 1$ es un cero del polinomio:

$$p(1)=1^3-1=1-1=0$$

Así, el polinomio $x-1$ es un divisor.

Efectuando la división $(x^3-1):(x-1)$ obtenemos x^2+x+1 de cociente. Así:

x^3-1	(x - 1)
x^2+x+1	

Para proseguir hemos de intentar factorizar x^2+x+1 . Buscamos sus ceros a través de la ecuación:

$$x^2+x+1=0 \rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} \rightarrow \text{no hay solución}$$

Éste es un polinomio primo.

Concluimos que $p(x)$ totalmente factorizado es:

x^3-1	(x - 1)
x^2+x+1	(x^2+x+1)
1	

$$\Rightarrow \quad x^3-1=(x-1)\cdot(x^2+x+1)$$

Recapitulemos definiendo las nociones básicas:

- Factorizar un polinomio es expresarlo como producto de otros de menor grado.
- Un polinomio primo es aquél que no es producto de otros polinomios de menor grado que él.
- Factorizar totalmente un polinomio es expresarlo como producto de polinomios primos.

Ejercicios

1. De las siguientes igualdades, indica la que es identidad y la que es ecuación. En el primer caso demostrarla, y en el segundo caso resolverla y comprobar las soluciones:

a) $(x+2)^2=x^2+4x+4$

b) $2x+1=x+3$

c) $(x+2)(x-2)=x^2-4$

d) $x^2+4x=5$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x}{3}-\frac{2x+1}{4}=\frac{x-1}{6}$

b) $\frac{x-3}{2}-\frac{x-8}{12}=\frac{5-x}{4}-\frac{x}{3}$

c) $\frac{3-x}{x}+\frac{x-1}{2}=\frac{2x+1}{4}$

d) $\frac{x-3}{x-1}+\frac{2x-1}{x-3}=3$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $4x^2=32x$

b) $12x^2-18=0$

c) $x^2+6x=7$

d) $(4x^2-25)(2x^2+5x)=0$

e) $x^4-29x^2+100=0$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{4}{x}+\frac{x}{2}=\frac{12}{x}$

b) $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=\frac{13}{6}$

c) $2+\frac{12}{x-3}=x+3$

5. Resuelve la siguiente ecuación fraccionaria:

$$\frac{3x-4}{5x-16}=\frac{4x+1}{6x-11}$$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones "radicales":

a) $\sqrt{7-3x}-x=7$

b) $\sqrt{x+5}-5=x$

c) $x=\sqrt{4x+13}-2$

d) $1+\sqrt{2x+1}=x$

7. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x-y = 2 \\ xy = 35 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y = 0 \\ \frac{y}{x^2} = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+y = 3 \\ y^2-xy = 0 \end{cases}$

8. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x-y=0 \\ x+2y=5 \end{cases}$$

a) Resuélvelo por los métodos de sustitución, de igualación y de reducción.

b) Dibuja las rectas asociadas al sistema y señala el punto solución.

9. Resuelve gráficamente el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x-y=1 \\ y=x^2-4x+3 \end{cases}$$

Comprueba algebraicamente lo que has obtenido.

10. Estudia algebraicamente si las líneas cuyas ecuaciones son:

$$2x-y-3=0 \text{ e } y=x^2-2x$$

se interceptan o no, y en qué puntos.

Compruébalo después representando las gráficas.

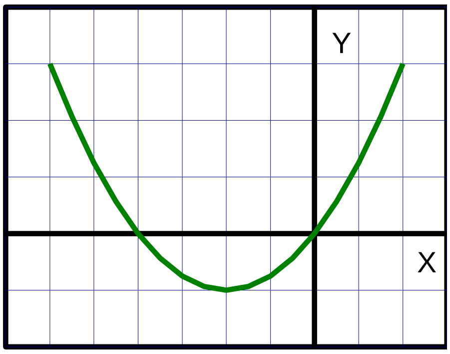
11. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $3x+12\leq 0$

b) $\frac{x-1}{x+3}\leq 0$

c) $x^2+3x+2\geq 0$

12. Sabiendo que la gráfica de $y=x^2+4x$ es:



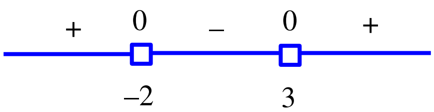
resuelve la inecuación $x^2+4x>0$.

13. Sabiendo que la gráfica de $y=x^3+x^2-2x$ es:

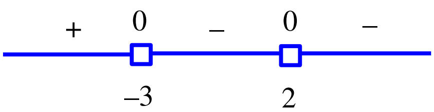
resuelve la inecuación $x^3+x^2-2x>0$

14. Dibuja una gráfica cuyo signo sea:

a)



b)



15. Recordemos que el dominio de definición de una función es el conjunto de valores "*x*" para los que existe "*y*". Halla el dominio de definición de la funcines definidas por las siguientes fórmulas:

a) $y=3x-6$ b) $y=\frac{x+1}{3x-9}$

c) $y=\frac{2}{x^2-5x+4}$ d) $y=\sqrt{2x+4}$

e) $y=\frac{2}{\sqrt{x-5}}$ f) $y=\log(2x+2)$

16. Halla un número sabiendo:

a) El doble de su cuadrado, menos ocho, es cero.

b) La suma de su cuadrado y de su triple es cuatro.

17. Obtén el número (o números) que verifica:

a) El número más su quinta parte es 12.

b) El doble del número, más su triple, es quince.

c) Si incrementamos en 4 el cuadrado de un número, obtenemos su doble.

d) La raíz cuadrada coincide con su tercera parte.

18. Encuentra un número cuyo cuadrado coincide con su cuarta parte.

19. Halla dos enteros consecutivos cuyo producto sea 182.

20. Halla dos números tales que su suma es 90, y su cociente es 9.

21. Descompón el número 23 en dos sumandos, de modo que al dividir el mayor entre el menor obtengamos de cociente 6 y de resto 2.

22. El producto de dos números es 4, y la suma de sus cuadrados 17. Halla esos números.

23. Halla una fracción equivalente a $\frac{5}{7}$, de modo que la suma de la suma de los cuadrados de sus términos sea 1.184.

24. Si de un depósito saco la mitad de su contenido y luego la tercera parte de lo que resta, he de agregar 8 litros para rellenarlo.

¿Cuál es la capacidad del depósito?

25. Si Pedro da 30€ a José, ambos tendrán el mismo dinero. Pero si es José el que da a Pedro los 30€ entonces éste tendría el doble de dinero que el otro.

¿Cuánto tiene cada uno?

26. Unos amigos van a comprar un regalo que cuesta 6€. A la hora de pagar, como dos no llevan dinero, los demás deben abonar 80 céntimos más. ¿Cuántos amigos son?

27. Dispongo de dos barriles con ciertas cantidades de vino.

Si saco del mayor la tercera parte de su contenido, ambos tendrán la misma cantidad.

Pero si de éste paso 1 litro al menor, ambos tendrían la misma cantidad de vino.

Di los litros de vino que hay en dada barril.

28. Dos kilos de peras y uno de manzanas cuestan 4,05€ Y un kilo y medio de peras y dos de manzanas cuestan 4,35€

Hoy he mandado a mi hijo por un kilo de peras y uno de manzanas, cobrándole el vendedor 3€.

¿Lo han engañado cobrándole más de la cuenta?

29. Un libro de Matemáticas cuesta 5€ menos que veinte tebeos de Mortadelo y Filemón, pero 5€ más que quince tebeos.

¿Qué te comprarías: el libro o los tebeos? Bueno, bueno,... averigua el precio del libro y de cada tebeo.

30. Un padre tiene 39 años y su hijo 15. ¿Cuántos años hace que la edad del padre fue el triple de la que tenía su hijo?

31. La edad de una madre triplica a la de su hijo, aunque dentro de seis años sólo la doblará.

Halla sus edades actuales.

32. La suma de las edades de una madre y sus dos hijos es 73 años.

Dentro de 10 años la edad de la madre doblará de su hijo menor.

Y hace doce años la edad de éste era la mitad de la que tenía su hermano mayor.

Plantea un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas y averigua las edades de cada cual.

33. En un número de dos cifras, las decenas son el triple de las unidades. Si se invierte el orden de las cifras, se obtiene un número 54 unidades menor. Calcula el número inicial.

34. Dos grifos llenan un depósito de 1500 litros en una hora y doce minutos. Manando por separado, el primero tardaría una hora más que el segundo.

¿Cuánto tardaría en llenar el depósito cada grifo por separado?

(Sugerencia: elige como incógnitas los litros que echa cada grifo por hora)

35. Una ganadera da a su ganado una mezcla de dos tipos de piensos A y B. Un kilo de pienso A proporciona a una res el 6% de sus necesidades diarias de proteínas y el 14% de sus necesidades de carbohidratos.

Un kilo de B contiene el 35% del requerimiento diario de proteínas y el 15% de carbohidratos.

Si la ganadera desea que su ganado tenga cubiertas, pero sin excedentes, sus necesidades diarias de proteínas y carbohidratos, ¿cuántos Kg. de cada tipo de pienso deberá proporcionar a cada res?

36. Disponemos de dos tipos de café: el arábiga a 6€ el kilo y el robusta a 4,5€ el kilo. Deseamos realizar una mezcla de ambos para obtener 60 kilos a un precio de 5€ el kilo. ¿Cuántos kilos de cada tipo debemos tomar?

37. Dos trenes salen al mismo tiempo desde dos ciudades que distan 576 km. Cuando van al encuentro, se cruzan a las 4 horas. Pero cuando van en la misma dirección, el más veloz alcanza al otro tras 16 horas. Halla sus velocidades.

38. Dos autobuses de línea salen simultáneamente, y en direcciones opuestas, de dos ciudades que distan entre sí 600 km. Si uno lleva una velocidad de 56 km./h y el otro 64 km./h, ¿tras cuánto tiempo y a qué distancia de las ciudades se encontrarán?

39. Un automóvil sale de una ciudad a 68 km./h. A la hora y cuarto sale otro en la misma dirección alcanzándolo 5 h. más tarde. ¿Cuál es la velocidad de éste vehículo?

40. La diagonal de un rectángulo mide 26 cm., y su perímetro 68 cm. Obtén sus dimensiones y su área.

41. En un rectángulo de perímetro 20 mm., la base mide 2 mm. más que la altura.

Obtén sus dimensiones y su área.

42. Un rectángulo es el triple de ancho que de alto, y tiene de perímetro 20 cm.

Calcula sus dimensiones, su área y su perímetro.

43. Determina el largo y el ancho de una habitación rectangular con superficie 12 m^2 y con una diagonal de 5m.

44. Calcula la medida de los lados de un rectángulo tal que si se aumenta la base en 5 cm. y se disminuye la altura en otros 5 cm., la superficie no varía.

Pero si se aumenta la base en 5 cm. y se disminuye la altura en 4 cm., la superficie aumenta en 4 cm^2.

45. Para solar una habitación, un albañil dispone de dos tipos de baldosas: unas de tipo A con medidas 30 cm x 40 cm y otras B con medidas 20 cm x 50 cm.

Si eligiéramos las del tipo A se necesitarían 40 baldosas menos que si se eligiesen las de tipo B.

¿Cuál es la superficie de la habitación?

46. Calcula los ángulos de un triángulo sabiendo que uno es la mitad del otro, y que el tercero es la cuarta parte de la suma de los dos anteriores.

47. El cateto menor de un triángulo rectángulo mide 11 cm. y la hipotenusa mide 1 cm. más que el otro cateto.

Obtén su área y su perímetro.

48. El perímetro de un triángulo isósceles es 16 cm., y la altura (trazada sobre el lado desigual) mide 4 cm. Halla los lados del triángulo.

49. Un rectángulo de 12 cm^2 de superficie está inscrito en una circunferencia de 5 cm de diámetro. Obtén sus dimensiones.

50. La diferencia de las diagonales de un rombo es de 2 dm. Si a ambas las aumentamos en 2 dm., el área aumenta en 16 dm^2. Obtén las diagonales, el perímetro y el área de dicho rombo.

51. Un rombo, cuyo perímetro mide 100 cm., está circunscrito a una circunferencia de radio 12 cm. Halla las diagonales del rombo y su área.

(Ayuda: $S=2lr$ donde S es la superficie del rombo, l la longitud del lado y r el radio de la circunferencia inscrita)

52. La altura de un trapecio isósceles mide 4cm y sus lados oblicuos miden 5 cm.

Halla las bases, sabiendo que suman 14 cm.

53. Un depósito de agua tiene forma de ortoedro con altura 10 m., siendo su capacidad 4.000 m3.

Sabiendo que es de base cuadrada, obtén el lado de dicha base.

54. Una pieza rectangular de cinc es 4 cm. más larga que ancha. Con ella se construye una caja de 840 cm^3 cortando un cuadrado de 6 cm. de lado en cada esquina y doblando los bordes.

Halla las dimensiones de la caja.

55. Halla "*m*" para que al dividir $6x^3+mx^2-9x+2$ entre $x+2$ se obtenga de resto -4 .

56. Halla a y b en el polinomio x^3+ax+b sabiendo que es divisible por $x-1$ y por $x+1$.

57. Obtén la ecuación de una recta sabiendo que:

a) Pasa por los puntos $A(1,2)$ y $B(3,6)$.

b) Su pendiente es $m=-2$ y pasa por el punto $P(0,-2)$.

58. Obtén la ecuación de una parábola que corta al eje X en los puntos de abcisas –2 y 1, pasando además por el punto $(0,4)$.

59. ¿Para qué valor de m el polinomio $3x^2-mx+3$ es primo?

Cuestiones

1. ¿Es lo mismo ecuación que identidad? Pon un ejemplo de cada clase.

2. Escribe una ecuación que tenga:

a) Ninguna solución.

b) Dos soluciones.

c) Cuatro soluciones distintas..

3. Cuando en la ecuación $3x = 4$ multiplicamos ambos miembros por x obtenemos otra ecuación: $3x^2 = 4x$.

¿Son ecuaciones equivalentes?

4. ¿Puede una ecuación tener infinitas soluciones?

5. Escribe una ecuación de tercer grado cuyas soluciones sean $x = -1$, $x = 3$ y $x = 5$.

6. Escribe una ecuación de cuarto grado cuyos ceros sean los números a , b , c y d.

7. ¿Cuántos ceros distintos puede tener una ecuación polinómica de grado tres como máximo? ¿Y una de grado n?

8. ¿Puede tener una ecuación de tercer grado sólo dos soluciones distintas?

9. En la ecuación de segundo grado

$$x^2+bx+c=0$$

demuestra que la suma de sus soluciones es $-b$ y que el producto de sus soluciones es c.

10. En la ecuación $x^2+ax-3=0$ se sabe que una solución es $x = 2$. Obtén el valor de a y la otra solución.

11. Escribe una ecuación con una incógnita que no tenga solución.

12. Observando las gráficas $y = f(x)$ resuelve las ecuaciones $f(x) = 0$ propuestas:

13. Observando las gráficas $y = f(x)$ resuelve las inecuaciones propuestas:

14. Escribe un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que no tenga solución.

¿Cómo es su interpretación gráfica?

15. Escribe un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas que tenga sólo una solución.

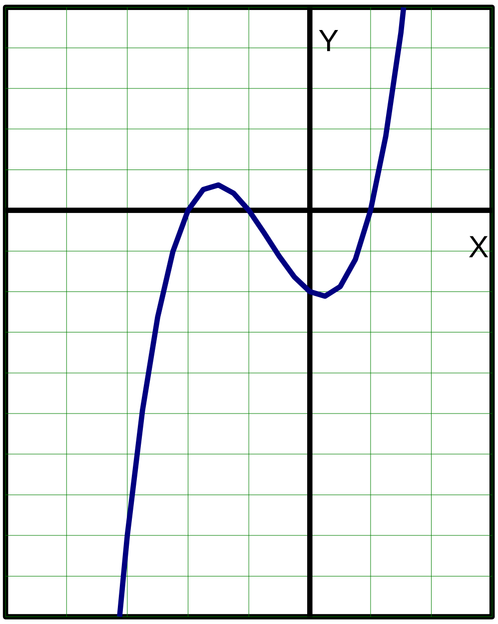
¿Cómo es su interpretación gráfica?

16. Escribe un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que tenga infinitas soluciones.

¿Cómo es su interpretación gráfica?

Autoevaluación

1. La gráfica de $y = x^3 + 2x^2 - x - 2$ es la mostrada:



a) Resuelve la ecuación:

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$$

b) Resuelve la inecuación:

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 < 0$$

c) Resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = x^3 + 2x^2 - x - 2 \\ 2x - y - 2 = 0 \end{cases}$$

2. La suma de un número entero con la raíz del siguiente es 5.

¿Cuál es ese número?

3. Obtén el dominio de las funciones

a) $y = \dfrac{2}{\sqrt{2x+4}}$

b) $y = \dfrac{x+1}{x^3 - 9x}$

4. Considera las líneas dadas por las ecuaciones:

$$y = x^2 - 2x \quad , \quad x - y = 0$$

a) Obtén algebraicamente los puntos en que se interceptan.

b) Represéntalas en unos ejes de coordenadas y corrobóralo.

5. El cateto menor de una triángulo rectángulo mide 11 cm. y la hipotenusa mide 1 cm. más que el otro cateto.

Obtén su área y su perímetro.

Autoevaluación

1. De la gráfica deducimos:

a) Las soluciones de la ecuación $f(x)=0$ son las abscisas de los puntos en que la gráfica corta al eje **X**. Son $x = -2, -1, 1$.

b) Debemos averiguar para qué valores de x es

$$y=f(x)>0$$

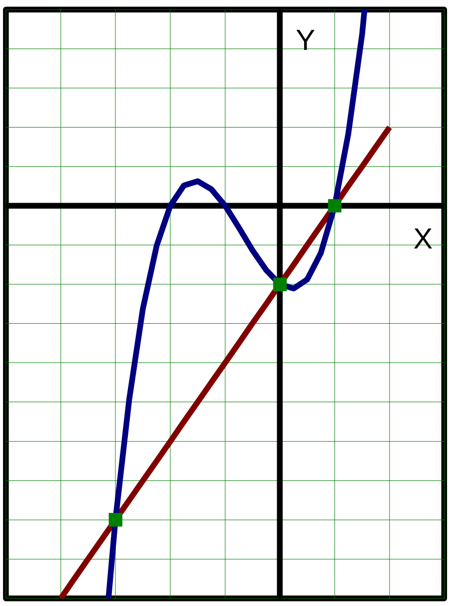
Esto ocurre en aquellos intervalos en los que la curva está sobre el eje **X**:

$$S=(-\infty,-2)\cup(-1,1)$$

c) Las soluciones del sistema son los puntos en que se cortan

- la recta $y=2x-2$
- la curva $y=x^3+2x^2-x-2$

Al dibujar ambas gráficas en unos mismos ejes de coordenadas:



Apreciamos que hay tres soluciones que son:

$$(x,y)=(-3,-8)\ ,\ (0,-2)\ ,\ (1,0)$$

2. Sea x ese número entero:

$$\text{Número}=x \ \rightarrow\ \text{Siguiente}=x+1$$
$$\downarrow$$
$$\text{Número más raíz del siguiente}=x+\sqrt{x+1}$$

La ecuación que nos permitirá obtener x es:

$$\underbrace{x+\sqrt{x+1}}_{\text{El número más la raíz del siguiente}}\ \underbrace{=}_{\text{es}}\ \underbrace{5}_{\text{cinco}}$$

Resolvamos la ecuación:

$$x+\sqrt{x+1}=5 \ \rightarrow\ \sqrt{x+1}=5-x \ \rightarrow$$
$$\left(\sqrt{x+1}\right)^2=(5-x)^2 \ \rightarrow\ x+1=25-10x+x^2 \ \rightarrow$$
$$x^2-11x+24=0 \ \rightarrow\ \begin{cases} x=3 \\ x=8 \end{cases}$$

Al elevar al cuadrado ambos miembros obtenemos una ecuación que puede tener más soluciones que la propuesta (no tienen por qué ser equivalentes). Es preciso comprobarlas:

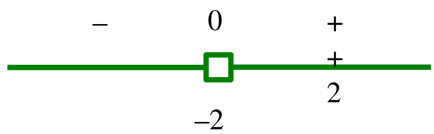
$$x=3 \ \rightarrow\ 3+\sqrt{4}=5 \ \rightarrow\ 3+2=5 \quad \text{SI}$$
$$x=8 \ \rightarrow\ 8+\sqrt{9}=5 \ \rightarrow\ 8+3=11 \quad \text{NO}$$

El número buscado es el 3.

3.

a) Debe ser $2x+4>0$.

El estudio de signo es fácil:



Luego el dominio es

$$D_f=(-2,+\infty)$$

b) El cociente existe salvo para los valores que hacen cero el denominador:

$$x^3-9x=0 \ \rightarrow\ x\cdot(x^2-9)=0 \ \rightarrow\ \begin{cases} x=0 \\ x=\pm 3 \end{cases}$$

Luego:

$$D_f=\mathbb{R}-\{-3,0,3\}$$

4.

a) Los puntos en que se cortan son las soluciones (si las hay) del sistema

$$\begin{cases} y=x \\ y=x^2-2x \end{cases}$$

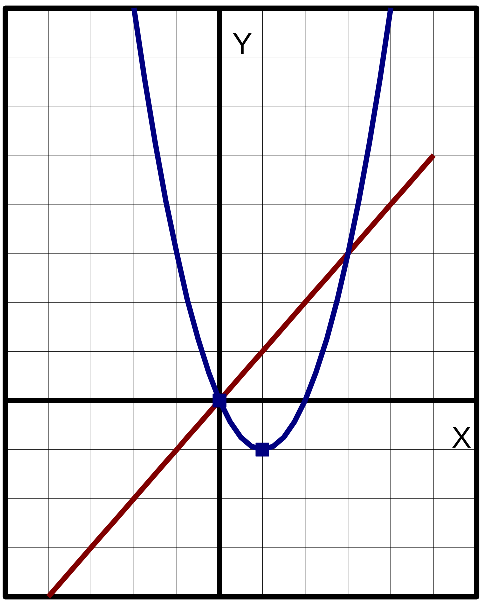
Igualando:

$$x^2-2x=x \rightarrow x^2-3x=0 \rightarrow$$

$$x\cdot(x-3)=0 \rightarrow \begin{vmatrix} x=0 \underset{sustituyendo}{\rightarrow} y=0 \\ x=3 \underset{sustituyendo}{\rightarrow} y=3 \end{vmatrix}$$

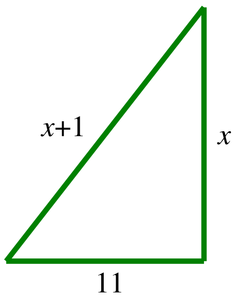
Se cortan, pues, en los puntos $(0\ ,\ 0)$ y $(3\ ,\ 3)$.

b) Representemos ambas:



Los puntos de corte que son, efectivamente, los anteriormente obtenidos.

5. Si x es la longitud del cateto desconocido, el triángulo será:



Por el Teorema de Pitágoras, tenemos:

$$(x+1)^2=x^2+11^2$$

Resolvamos la ecuación:

$$(x+1)^2=x^2+11^2 \rightarrow x^2+1+2x=x^2+121 \rightarrow$$

$$2x=120 \rightarrow x=\frac{120}{2} \rightarrow x=60$$

Tenemos así que los lados miden 11, 60 y 61 centímetros respectivamente.

Tenemos así que:

Perímetro = 11 + 60 + 61 = 132 *cm*.

$$Área=\frac{11\cdot 60}{2}=330\,cm^2$$