TEMA 1

ARITMÉTICA

Contenidos

1. Números racionales. Caracterización.
2. Números irracionales. Caracterización.
3. Números radicales.
4. El número real: aproximación y error.
5. Notación científica.
6. Logaritmos decimales.
7. Ordenación. Intervalos y semirrectas.

Tiempo estimado

10 sesiones

Criterios de Evaluación

1. Distingue y clasifica los distintos tipos de números, comprendiendo especialmente la diferencia entre los racionales y los irracionales.
2. Representa los números racionales y los números radicales en la recta real.
3. Interpreta números en su notación científica.
4. Comprende el concepto de logaritmo, y sabe usarlo para despejar exponentes.
5. Aproxima cualquier número real a través de expresiones decimales, sabiendo acotar el error.
6. Domina con soltura las desigualdades y las diferentes formas de expresión de un intervalo de la recta real.

1.Números racionales.

Definición de $\mathbb{Q}$.

Recordemos que el conjunto de los números racionales, designado por $\mathbb{Q}$ es el formado por todas las fracciones $\frac{m}{n}$ de enteros con $n \neq 0$.

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z} \text{ con } n \neq 0\right\}$$

Es importante recordar que el denominador de una fracción nunca puede ser cero, ya que la división por cero no tiene sentido.

Debemos también observar que los enteros son números racionales, ya que pueden expresarse como fracciones: $-4=\frac{-8}{2}$, $3=\frac{3}{1}$, ...

Tenemos así que el conjunto de los números enteros forma parte del conjunto de los racionales:

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Dos fracciones representan un mismo número racional si son equivalentes. El criterio general de equivalencia es:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc$$

Expresión decimal de un número racional.

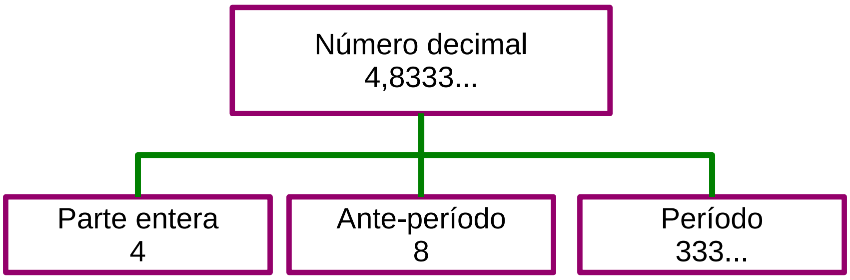
Todo número racional puede escribirse en forma decimal: basta con dividir el numerador entre el denominador. Dicha división puede:

- terminar tras varios pasos $\longrightarrow$ expresión decimal limitada.
- no terminar $\longrightarrow$ expresión decimal ilimitada.

En este último caso las cifras se repiten, a partir de una, en bloques. Ese bloque se denomina período y diremos que estamos ante un número decimal periódico. Veamos algunos ejemplos:

$\frac{273}{40}=6{,}825$	$\frac{1}{3}=0{,}333\ldots=0{,}\hat{3}$	$\frac{29}{6}=4{,}833\ldots=4{,}8\hat{3}$
Decimal "exacto"	Decimal "periódico puro"	Decimal "periódico mixto"

Aquí la composición de la expresión decimal de un número racional:



Todo número decimal exacto puede interpretarse como un número decimal periódico de período cero:

6,825=6,825000...

En general, tenemos:

$\boxed{\text{Todo racional puede expresarse como un número decimal periódico.}}$

❑ Expresión fraccionaria de un número decimal.

Vamos ahora a tratar el problema recíproco: expresar un número decimal periódico en forma de fracción.

Sólo hay una pequeña dificultad si es decimal ilimitado. Trataremos de conseguir dos números periódicos puros, con el mismo período, para a continuación restarlos.

Veamos, por ejemplo, cómo expresar en forma de fracción $0{,}5\hat{6}$. Pongamos $r=0{,}5666\ldots$:

$$\left.\begin{array}{rcl} 10\text{r} & = & 5{,}666\ldots \\ 100\text{r} & = & 56{,}666\ldots \end{array}\right\} \rightarrow 100\text{r}-10\text{r}=56-5\rightarrow 90\text{r}=51\rightarrow r=\frac{51}{90}=\frac{17}{30}$$

Llegamos así a la siguiente conclusión:

Todo número decimal periódico puede expresarse como una fracción de números enteros.

Un número decimal exacto es fácil representarlo en forma de fracción:

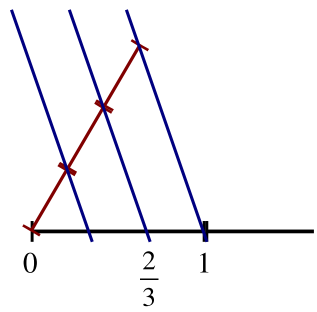
$0{,}7=\frac{7}{10}$ 7 décimas.

$0{,}038=\frac{38}{1000}$ 38 milésimas

❑ Representación geométrica de un número racional.

Dado un número racional y fijado un segmento unidad, podemos construir siempre un segmento cuya longitud sea la correspondiente a la de ese número. Recuerda que para ello se usa el Teorema de Tales.

En el margen hemos representado en la recta real el número racional $\frac{2}{3}$



2.Números irracionales. Caracterización.

❑ Existencia de números no periódicos.

Es fácil escribir números decimales ilimitados que no son periódicos. He aquí como ejemplo un par de ellos:

$0{,}1\,2\,11\,2\,111\,2\,1111\,2\ldots$

$0{,}\,3\,5\,33\,55\,333\,555\ldots$

¿Comprendes por qué no son periódicos?

Ellos no pueden ser la expresión decimal de ningún número racional, ya que el cociente de dos números enteros es siempre un decimal periódico. Es por ello que los números que no son periódicos son llamados números irracionales.

Los números cuya expresión decimal es no periódica se denominan números irracionales.

Tenemos así el siguiente esquema:

$$\text{Decimales}\begin{cases}\text{Periódicos = Racionales}\\ \text{No periódicos = Irracionales}\end{cases}$$

Insuficiencia del número racional.

Los números irracionales aparecen cuando se intentan resolver problemas como éste: ¿cuánto mide el lado de un cuadrado cuya superficie es 2 cm.?

Buscamos un número que multiplicado por sí mismo (esto es, elevado al cuadrado) dé como resultado 2. ¿Existe ese número? ¿Cómo podemos obtener su expresión decimal? ¿Qué tipo de expresión es ésta?

Ya sabemos que dicho número sí existe y cómo obtener su expresión decimal con tantas cifras como deseemos. El método es el conocido como método de aproximaciones sucesivas por tanteo:

$$\left.\begin{matrix}1^2=1\\2^2=4\end{matrix}\right\} \rightarrow \sqrt{2} \text{ está entre 1 y 2} \rightarrow \sqrt{2}=1'\ldots$$

$$\left.\begin{matrix}1'4^2=1'96\\1'5^2=2'254\end{matrix}\right\} \rightarrow \sqrt{2} \text{ está entre 1'4 y 1'5} \rightarrow \sqrt{2}=1'4\ldots$$

$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$

Actuando así, sucesivamente, podemos obtener tantos decimales como queramos de $\sqrt{2}$. Se demuestra que dicha expresión es ilimitada y que no es periódica. Tenemos, pues, que $\sqrt{2}$ es un número irracional.

En general, cualquier raíz de un número entero que no sea otro entero es un número irracional.

Un número irracional muy conocido por todos es el número "pi":

$$\pi=3{,}1415926535\ldots$$

que aparece allí donde haya una forma geométrica circular.

Recordemos las fórmulas de la superficie del círculo y de la longitud de la circunferencia.

$S = \pi r^2$

$L = 2 \pi r$

3. Números radicales.

Definición y existencia

Llamamos raíz *n*–ésima del número *a* al número *b*, que elevado a *n* nos da *a*:

$$\sqrt[n]{a}=b \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} b^n=a$$

$\sqrt[n]{a}$ se denomina radical, a radicando y n índice.

No siempre existe la raíz de un número real:

- Si $a \geq 0 \rightarrow \sqrt[n]{a}$ existe para n cualquiera.
- Si $a<0 \rightarrow \sqrt[n]{a}$ existe sólo para n impar.

☞ Ejemplos:

a) Hay dos números que elevados al cuadrado dan 25. Son:

$$\sqrt{25}=5 \text{ y } -\sqrt{25}=-5$$

b) Sólo hay un número que elevado al cubo da –8. Es $\sqrt[3]{-8}=-2$

No debemos confundir:

$\sqrt{-25}$ que no existe.

$-\sqrt{25}$ que es igual a –5.

❑ Equivalencia.

Se verifica: $\sqrt[n]{a}=\sqrt[np]{a^p}$

La propiedad de la izquierda nos dice que si en un radical multiplicamos el índice y el exponente del radicando por un mismo número obtenemos un radical equivalente.

☞ Ejemplo: Simplifiquemos $\sqrt[4]{25}$:

$$\sqrt[4]{25}=\sqrt[4]{5^2}=\sqrt[2]{5^1}=\sqrt{5}$$

☞ Ejemplo: expresemos con igual índice $\sqrt[4]{3}$ y $\sqrt[6]{5}$.

$$\text{m.c.m.}(4,6)=12 \rightarrow \begin{cases} 12:4=3 \\ 12:6=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{3^1}=\sqrt[4\cdot 3]{3^{1\cdot 3}}=\sqrt[12]{27} \\ \sqrt[6]{5^1}=\sqrt[6\cdot 2]{5^{1\cdot 2}}=\sqrt[12]{25} \end{cases}$$

❑ Producto de radicales.

Se verifica: $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$

La propiedad de la izquierda nos dice que el producto de dos radicales de igual índice es otro radical del mismo índice cuyo radicando es el producto de los radicandos de los factores.

☞ Ejemplo: Reduzcamos a un único radical el producto $\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}$:

$$\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{5\cdot 2}=\sqrt{10}$$

☞ Ejemplo: Saquemos factores del radical $\sqrt{12}$:

$$\sqrt{12}=\sqrt{4\cdot 3}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}=2\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

❑ Cociente de radicales.

Se verifica: $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

La propiedad de la izquierda nos dice que el cociente de dos radicales de igual índice es otro radical del mismo índice cuyo radicando es el cociente de los radicandos del dividendo y del divisor.

☞ Ejemplo: Reduzcamos a un radical $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$:

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{8}{2}}=\sqrt{4}=2$$

❑ Raíz de una raíz.

Se verifica: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$

La propiedad de la izquierda nos dice que la raíz de un radical es un radical con el radicando de éste y cuyo índice es el producto de los índices.

☞ Ejemplo: Reduzcamos a un radical $\sqrt{\sqrt[3]{5}}$:

$$\sqrt{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[2\cdot 3]{5}=\sqrt[6]{5}$$

❑ Suma y resta de radicales.

¿Será también $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$? Es fácil comprobarlo:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{3}+\sqrt{2}=3{,}146264\ldots \\ \sqrt{5}=2{,}236067\ldots \end{array}\right\} \rightarrow \sqrt{2}+\sqrt{3}\neq\sqrt{5}$$

No olvidemos que, en general, la suma de raíces no es igual a la raíz de la suma de los radicandos.

Sólo pueden sumarse (o restarse) los radicales que son iguales.

☞ Ejemplo: Efectuemos $\sqrt{8}+\sqrt{18}$:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{8}=\sqrt{4\cdot 2}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}=2\cdot\sqrt{2}\\ \sqrt{18}=\sqrt{9\cdot 2}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}=3\cdot\sqrt{2}\end{array}\right| \rightarrow \sqrt{8}+\sqrt{18}=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=5\sqrt{2}$$

❑ Racionalización de denominadores.

A veces es conveniente que en una expresión fraccionaria no aparezcan raíces en el denominador. Cuando ello es posible, se consigue multiplicando numerador y denominador por una misma expresión adecuada:

☞ Ejemplo: Quitemos la raíz del denominador en $\frac{3}{\sqrt{2}}$ y en $\frac{1}{5-\sqrt{2}}$:

$$\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{5-\sqrt{3}}=\frac{1}{5-\sqrt{3}}\cdot\frac{5+\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}=\frac{5+\sqrt{3}}{5^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{5+\sqrt{3}}{25-3}=\frac{5+\sqrt{3}}{22}$$

4. El número real. Aproximación y error.

❑ Definición de $\mathbb{R}$.

Al conjunto formado por todos los números racionales e irracionales se le llama conjunto de los números reales, y se designa por $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R}=\{x : x \text{ es un número racional o x es un número irracional}\}$$

Observemos así que los números reales cubren todos los números decimales: dado un número decimal cualquiera, tenemos que es un número real. Así, por ejemplo:

-2 , $\frac{7}{34}$, 2,35 , … son números reales.

$\sqrt[3]{5}$, π , $\sqrt{2}$, … son números reales.

Son constructibles:

- los enteros, que pueden dibujarse con un simple compás y los racionales con escuadra y cartabón usando el Teorema de Tales.
- Todas las raíces cuadradas de los enteros, que pueden representarse usando un poco el ingenio y el Teorema de Pitágoras.

❑ Completitud de la recta real.

Una propiedad muy importante de los números reales es la denominada "completitud": dado un origen y un segmento unidad

a cada punto de la recta $\xrightarrow{\text{le corresponde}}$ un número real

a cada número real $\xrightarrow{\text{le corresponde}}$ un punto de la recta

Muchos números reales pueden dibujarse en la recta con regla y compás utilizando propiedades más o menos complicadas: son los llamados números constructibles. Pero no todos lo son: π no lo es, por ejemplo.

❑ Aproximación y error.

Todo número real puede aproximarse mediante números decimales exactos. Es claro que cuando sustituimos un número por una aproximación cometemos un error. Veamos con un caso concreto. Sabemos que es

$$\sqrt{2}=1{,}414213562373\ldots$$

Si elegimos el número 1'41 como aproximación de él hemos cometido un error (es por defecto, pues el valor aproximado es menor que $\sqrt{2}$).

El error es la diferencia entre el número y la aproximación:

$$\epsilon=\sqrt{2}-1{,}41=0{,}004213562373\ldots$$

El error cometido no se conoce exactamente, pues ¿qué cifras que quedan? Pero sí podemos acotarlo: es menor que una centésima.

- Dado el número real x , si lo sustituimos por el número r se dice que hemos aproximado x por r , o que r es una aproximación de x.
- Si r es menor que x se dice que la aproximación es por defecto

  Si r es mayor que x se dice que la aproximación es por exceso.
- Se llama

  Error absoluto a $\varepsilon=|x-r|$

  Error relativo a $\varepsilon_r=\frac{|x-r|}{x}$

En cualquier tipo de cálculo los números racionales deben escribirse siempre en forma de fracción y los números irracionales con la notación que los designe.

Una vez hechas las operaciones y simplificaciones pertinentes, puede darse la aproximación decimal con las cifras que la situación demande.

Como ejemplo, veamos a continuación una tabla que nos muestra las sucesivas aproximaciones de $\sqrt{2}$:

Aproximaciones de $\sqrt{2}$			
Hasta las	**Por defecto**	**Por exceso**	**Error menor que**
Unidades	1	2	Una unidad
Décimas	1,4	1,5	Una décima
Centésimas	1,41	1,42	Una centésima
…	…	…	…

5.Potencias de diez: notación científica.

Qué es la notación científica.

En el estudio del Universo nos encontramos con magnitudes que, desde nuestro punto de vista, son enormemente grandes o pequeñas. Por ejemplo, ¿cuál es la masa de la Tierra? ¿Y la masa de un electrón? Para expresar esas masas se usa la denominada notación científica:

$$M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg} = 5\underbrace{980000000000000000000000}_{24\ \text{cifras}}\ \text{kg}$$

$$m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} = 0{,}\underbrace{0000000000000000000000000000009}_{31\ \text{cifras}}11\ \ \text{kg}$$

Si no se está acostumbrado a usarla puede parecer un tanto confusa. Pero, todo lo contrario: con ella vemos en el exponente de 10 las cifras del número, con lo que el orden de la magnitud del número es claro.

Es una manera compacta y simple de escribir números de esos órdenes usada en todas las Ciencias: Física, Química, Biología, Astronomía,...

Un número en notación científica consta de:

$$N = \underbrace{a}_{\text{parte entera}}, \underbrace{bcd\ldots}_{\text{parte decimal}} \cdot \underbrace{10^n}_{\text{potencia de 10}}$$

- Una parte entera formada por una sola cifra que no es cero.
- Una parte decimal (el resto de las cifras significativas).
- Una potencia de 10 (que da el orden de la magnitud del número).
- Si n es positivo, entonces N es “grande”, y si n es negativo N es “pequeño".
- El exponente n indica el orden de la magnitud.

Los prefijos más usados para designar órdenes de magnitud son:

- tera: 10^{12}
- giga: 10^{9}
- mega: 10^{6}
- kilo: 10^{3}
- hecto: 10^{2}
- deca: 10
- deci: 10^{-1}
- centi: 10^{-2}
- mili: 10^{-3}
- micro: 10^{-6}
- nano: 10^{-9}
- pico: 10^{-12}

Operaciones con la notación científica.

El producto y el cociente de dos números en notación científica es inmediato. Sin embargo, para sumarlos o restarlos es preciso que ambos tengan la misma potencia de base 10. Por ejemplo:

$$5{,}2 \cdot 10^{12} \cdot 3{,}01 \cdot 10^{4} = 15{,}652 \cdot 10^{16} = 1{,}5652 \cdot 10^{17}$$
$$3{,}1 \cdot 10^{7} + 2{,}2 \cdot 10^{5} = 3{,}1 \cdot 10^{7} + 0{,}0223 \cdot 10^{7} = 3{,}1223 \cdot 10^{7}$$

Todos estos cálculos pueden realizarse con gran rapidez y facilidad gracias con cualquier calculadora científica. El siguiente ejemplo nos muestra cómo introducir en la calculadora las masas de la Tierra y del electrón:

5.98 EXP 24 $\Rightarrow$ 5.98 ^{24}

9.11 EXP -31 $\Rightarrow$ 9.11 $^{-31}$

¡Cuidado! No debemos confundir la tecla de las potencias:

x^y

con la de la notación científica

EXP

6. Logaritmos decimales.

Como nuestro sistema de numeración usa como base el número diez, las potencias de diez tienen una importancia trascendental. En el apartado anterior hemos recordado cómo se usan para expresar directamente el orden de la magnitud de una cifra. Los logaritmos decimales están directamente relacionados con las potencias de diez.

Vamos a introducirlos con la calculadora. Así que tomemos varias potencias

100	log	2
10 000	log	5
1 000 000	log	6

A la vista de lo anterior:

¿Qué es el logaritmo de 1 000?

El número al que debemos elevar 10 para obtener mil

$\log 1000=3$

Veamos la definición:

Se llama logaritmo decimal del número x, y se designa por $\log x$, al exponente al que hay que elevar 10 para obtener x:

$$\log x = y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} 10^y = x$$

☞ Ejemplo:

$\log 10=1$ porque $10^1=10$

$\log 1000=3$ porque $10^3=1000$

$\log 0{,}01=-2$ porque $10^{-2}=\frac{1}{100}=0{,}01$

☞ Ejemplo: ¿cuál es el logaritmo de 15? Podríamos responder apresuradamente: "no existe, porque 15 no es potencia de 10". Lo que en realidad ocurre es que $\log 15$ es un número irracional, cuyas

15	log	**1.17609125**

Una pequeña comprobación:

1.17609	SHIFT log	**14.9999565**

Las teclas de la calculadora dedicadas al cálculo de logaritmos son:

log ln

- La primera calcula los logaritmos decimales
- La segunda los logaritmos denominados "neperianos", en honor a Neper.

Recuerda que

$$a^{-x}=\frac{1}{a^x}$$

Los logaritmos son útiles para poder despejar incógnitas que se encuentran en los exponentes, debido a la siguiente propiedad:

$$\text{Si } a^x = b \quad \to \quad x = \frac{\log b}{\log a}$$

☞ Ejemplo: Hallemos el número x al hay que elevar 3 para obtener 5:

$$3^x = 5 \;\to\; x = \frac{\log 5}{\log 3} = 1{,}4649\ldots$$

Compruébalo con la calculadora.

7. Ordenación. Intervalos y semirrectas.

❑ La relación de orden en R .

La relación de orden queda definida así:

Se dice que el número a es mayor que el número b, y se escribe $a > b$, si $a - b$ es positivo. Esto es:

$$a > b \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} a - b \text{ es positivo.}$$

Observemos que si x es un número real positivo:

- $x > 0$
- x está a la derecha de 0 en la recta real:

Es interesante introducir una relación en la que se mezclen la igualdad con la desigualdad. Veamos un caso típico:

¿Para qué valores de x existe tiene sentido $\sqrt{x}$? Tendemos a decir, sin reflexionar: debe ser x un número positivo. Así daríamos como solución: "tiene sentido para $x > 0$ ".

Aquí hay un sutil error: la raíz cuadrada de cero también existe (es cero). Así, la expresión tiene sentido para x positivo o cero: "tiene sentido cuando es $x > 0$ ó $x = 0$ ". Estas dos expresiones pueden resumirse en una sola:

$$x \geq 0 \quad .$$

Demos una definición del símbolo:

Dados dos números reales a y b :

$$a \geq b \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} a > b \text{ o } a = b$$

❑ Intervalos y semirrectas.

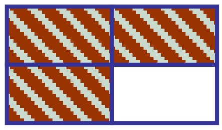
La ordenación de los números reales permite considerar ciertos subconjuntos de la recta real denominados intervalos y semirrectas. Éstos aparecen frecuentemente en el estudio de la variación de funciones de todo tipo.

A continuación vemos una tabla que nos muestra todos los casos y las distintas formas que hay para designarlos:

Nombre	***Símbolo***	***Significado***	***Representación***
Intervalo abierto desde *a* hasta *b*	(a, b)	$\{x : a < x < b\}$	
Intervalo cerrado desde *a* hasta *b*	$[a, b]$	$\{x : a \leq x \leq b\}$	
Intervalo abierto – cerrado desde *a* hasta *b*	$(a, b]$	$\{x : a < x \leq b\}$	
Intervalo cerrado – abierto desde *a* hasta *b*.	$[a, b)$	$\{x : a \leq x < b\}$	
Intervalo abierto hasta *b*	$(-\infty, b]$	$\{x : -\infty < x < b\}$	
Intervalo cerrado hasta *b*	$(-\infty, b)$	$\{x : -\infty < x \leq b\}$	
Intervalo abierto desde *a*	$(a, +\infty)$	$\{x : a < x < +\infty\}$	
Intervalo cerrado desde *a*	$[a, +\infty)$	$\{x : a \leq x < +\infty\}$	

8. Anexo I: repaso del cálculo con racionales.

❑ Concepto de fracción.



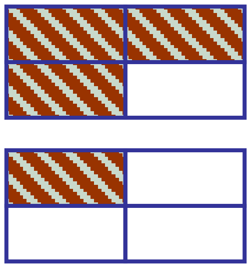
Consideremos una unidad que, por ejemplo, puede representarse como una tarta. Dividámosla en cuatro partes iguales. Cada una de las partes en que está dividida es una cuarta parte. Tómense tres de estas partes. De este modo se tienen las tres cuartas partes de una tarta.

Los números que representan estas cantidades se llaman fracciones, quebrados o números racionales., y se representan por medio de dos números enteros separados por una línea horizontal. El que está bajo la barra se llama denominador y el que está sobre la barra numerador.

En este caso se divide la tarta en 4 partes. Se toman 3 y se deja 1, así se han tomado $\frac{3}{4}$ de la tarta y se ha dejado $\frac{1}{4}$ de ella.

Observemos que el denominador de una fracción no puede ser cero: no tiene sentido dividir una unidad en cero partes.

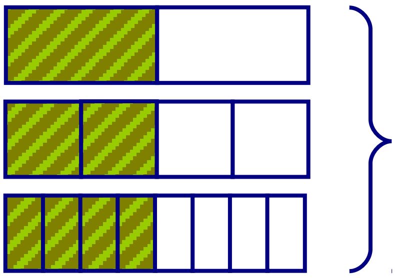
❑ La fracción como cociente.



Las fracciones se emplean también para expresar el cociente de dos enteros. Por ejemplo, si disponemos de 5 tartas y las repartimos equitativamente entre 4 personas, cada una recibirá $\frac{5}{4}$ de tarta. Se divide cada unidad en 4 partes iguales y cada uno recibe 5 de esas porciones. Como el resultado de dividir 5 entre 4 es 1,25, se establece la equivalencia entre la forma decimal y la fraccionaria: $\frac{5}{4}=1{,}25$

❑ Igualdad o equivalencia de fracciones.

Dos fracciones se dice que son equivalentes cuando representan el mismo cociente de números enteros. Por ejemplo:



$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}$$

Para obtener fracciones equivalentes entre sí multiplicamos o dividimos sus dos términos por un mismo número.

Siempre que podamos debemos simplificar una fracción; esto es, sustituirla por otra equivalente con los términos más sencillos. Esto podrá hacerse cuando numerador y denominador sean divisibles por un mismo número.

No debemos olvidar el criterio general de equivalencia:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d=b \cdot c$$

❑ Reducción a común denominador.

En muchas ocasiones, dadas varias fracciones conviene convertirlas en otras equivalentes que tengan los mismos denominadores. Basta para ello tomar como denominador común el producto de todos los denominadores.

Ahora bien, si deseamos que los números sean lo menor posible tomaremos como denominador común el m.c.m. de todos los denominadores.

Por ejemplo, para reducir a común denominador a $\frac{7}{6}$ y $\frac{9}{10}$:

$$\mathrm{mcm}(6,10)=30\rightarrow\left\{\begin{matrix}30:6=5\\30:10=3\end{matrix}\right\}\rightarrow\frac{7}{6}=\frac{7\cdot5}{6\cdot5}=\frac{35}{30}\ \text{ y }\ \frac{9}{10}=\frac{9\cdot3}{10\cdot3}=\frac{27}{30}$$

❑ Comparación.

Los números fraccionarios están ordenados de manera que de dos fracciones con igual denominador natural es mayor que de mayor numerador.

Para comparar fracciones las reducimos previamente a común denominador. También podemos intentar compararlas a través de su expresión decimal.

Comparemos, usando ambos métodos $\frac{5}{4}$ y $\frac{7}{6}$:

$$\frac{5}{4}=\frac{15}{12}\ \text{ y }\ \frac{7}{6}=\frac{14}{12}\ \Rightarrow\ \frac{7}{6}<\frac{5}{4}\qquad\frac{5}{4}=1{,}25\ \text{ y }\ \frac{7}{6}=1{,}\hat{6}\ \Rightarrow\ \frac{7}{6}<\frac{5}{4}$$

❑ Suma y resta.

La suma / resta de fracciones con igual denominador es otra fracción con igual denominador, cuyo numerador es la suma / resta de los numeradores. Si no tienen igual denominador, reducimos antes a común denominador.

$$2+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}=\frac{12}{6}+\frac{4}{6}-\frac{5}{6}=\frac{12+4-5}{6}=\frac{11}{6}$$

❑ Producto.

El producto de fracciones es otra fracción cuyo numerador es el producto de sus numeradores, y cuyo denominador es el producto de sus denominadores.

Por ejemplo: $\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{4}=\frac{3\cdot7}{5\cdot4}=\frac{21}{20}$ y $3\cdot\frac{2}{9}=\frac{3\cdot2}{9}=\frac{2}{3}$.

❑ Cociente.

El cociente de dos fracciones es el producto de la primera por la inversa de la segunda. Veamos algunos cálculos como ejemplo:

$$\frac{3}{5}:\frac{4}{9}=\frac{3\cdot9}{5\cdot4}=\frac{27}{20}\ \text{ y }\ 3:\frac{5}{2}=\frac{3\cdot2}{1\cdot5}=\frac{6}{5}$$

Algunas calculadoras científicas permiten realizar cálculos con números racionales en forma fraccionaria. La tecla que permite introducir quebrados es:

a b/c

Para introducir ¾ pulsaremos la combinación

3 **a b/c** **4**

Aparecerá en la pantalla de la siguiente forma:

3 _I 4

Observa que la fracción es simplificada automáticamente hasta su equivalente irreducible.

Es muy probable que necesites usar la tecla de la fracción en combinación con la tecla de 2ª función

INV

Para escribir un número mixto como 2½ en forma fraccionaria: 5/2.

Practica con la máquina para conocer las posibilidades que ofrece.

Recetas de cálculo rápido:

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$$

$$a\cdot\frac{b}{c}=\frac{ab}{c}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{bc}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{a}{bc}\ \text{ y }\ \frac{a}{\frac{b}{c}}=\frac{ac}{b}$$

Ejercicios

1. Completa la siguiente tabla con SÍ o NO:

	$\frac{7}{3}$	$\sqrt{3}$	-3	0,54
Entero				
Racional				
Irracional				
Real				

2. Obtén la expresión decimal de los siguientes números:

$$\frac{5}{4}, \frac{7}{15}, -\frac{5}{11}, \frac{8}{4}$$

3. Dados los números

$r=0{,}3434$
$s=0{,}3434\ldots$
$t=0{,}3\hat{4}$

Explica las características de cada uno, e indica si hay alguna coincidencia. Pásalos a forma fraccionaria y compruébalo.

4. Representa en la recta real $-\frac{7}{4}$ y $\frac{12}{5}$

5. Hace unos años se usaban con asiduidad los "números mixtos". Por ejemplo: 3½ es un número que se compone de una parte entera (3) y una parte fraccionaria inferior a la unidad (½). Es:

$$3\frac{1}{2}=3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2} \quad (=3{,}5)$$

a) Pasa a fracción: $5\frac{1}{4}$ y $4\frac{2}{3}$.

b) Pasa a nº mixto: $\frac{15}{2}$, $\frac{13}{4}$ y $\frac{7}{3}$.

6. En un rectángulo de perímetro 8 cm., la altura mide 1 cm.

¿Cuál es la longitud de la diagonal? ¿Cómo es ese número? Redondéala hasta las centésimas.

7. Representa en la recta real a $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ y $\sqrt{12}$.

8.

a) Expresa $\frac{4}{9}$ con dos decimales exactos. ¿Cuál es el error cometido? Acótalo.

b) La aproximación $\pi \simeq 3{,}1416$, ¿es por defecto o por exceso? Obtén el error absoluto cometido y acótalo.

9. Obtén las sucesivas aproximaciones por defecto y por exceso de $\sqrt[5]{2}$ hasta las milésimas.

10. Calcula el área y el perímetro de un triángulo equilátero de lado 6 cm. ¿Cómo son esos números? Aproxima el área hasta las milésimas.

11. Al pesar 252 gr. de fruta se dio como aproximación 250 gr. , y al medir el peso de un automóvil de 1902 kg. se dio 1900 kg. Calcula:

a) El error absoluto de cada medida.

b) Los errores relativos cometidos.

c) ¿Cuál es la aproximación más precisa?

12. Recuerda que

$$a^{-n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n$$

Realiza los siguientes cálculos, convirtiendo los exponentes negativos en fracciones:

a) $2+5\cdot 2^{-3}$ b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}+3\cdot 2^{-1}$

c) $2+\left(1-\frac{1}{5}\right)^{-2}$ d) $3^{-2} : \frac{1}{3}$

e) $\left(5-\frac{1}{2}\right)^{-1}+1$ f) $3-4^{-2}$

13. Efectúa las siguientes operaciones, simplificando todo lo posible:

a) $\sqrt{2}+\sqrt{8}$

b) $\sqrt{12}+3\sqrt{27}-\sqrt{75}$

c) $2\sqrt{2}-\sqrt{18}+\sqrt{50}$

14. Calcula las siguientes operaciones, dejando como resultado un único radical:

a) $\sqrt{x\,y}\cdot\sqrt{x^2 y^3}$ b) $\dfrac{\sqrt{a^3 b^5}}{\sqrt{a^2 b^2}}$

15. Ídem.:

a) $\sqrt[3]{a\,b^{-4}}\cdot\sqrt[3]{a^{-2} b^3}$ b) $\dfrac{\sqrt[5]{x^3 y^{-4}}\cdot\sqrt[5]{x\,y}}{\sqrt[5]{x^{-3} y^2}}$

16. Calcula:

a) $(2\sqrt{3})^2$

b) $3\cdot(\sqrt{2})^2$

c) $(5+\sqrt{2})(5-\sqrt{2})$

d) $(\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5})$

17. Racionaliza las siguientes expresiones (esto es, escribe una igual a ella sin radicales en el "denominador"):

a) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$

c) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

e) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-2}$ f) $\dfrac{\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$

18. Expresa usando notación científica:

a) 12 gigavatios (en vatios)

b) 2 nanosegundos (en segundos).

c) 13 micras (en metros).

19. Efectúa con la calculadora las siguientes operaciones con notación científica, señalando la combinación de teclas:

a) $\dfrac{3\cdot 10^{-5}-2\cdot 10^{-4}}{4\cdot 10^{6}+3\cdot 10^{5}}$

b) $\dfrac{2\cdot 10^{3}+3{,}5\cdot 10^{5}}{2{,}25\cdot 10^{-5}-4\cdot 10^{-6}}$

20. Expresa en notación científica:

a) La velocidad de la luz, en m/s (c es aproximadamente 340.000 km/s).

b) La milésima parte de 3 cm., en metros.

c) El volumen de una caja (en mm^3) que tenga de alto 3 m., de largo 2'5 m. y de ancho 5 m.

d) El peso, en kg., del Sol.

21. Obtén, sin calculadora, los logaritmos decimales siguientes:

a) $\log 10000$ b) $\log 0{,}01$

c) $\log 1$ d) $\log\dfrac{1}{10000}$

22. Halla el valor de x y obtén sus cuatro primeras cifras decimales:

a) $2^x=7$ b) $3^x=-9$

c) $5^x=\dfrac{1}{2}$ d) $3^{x-1}=27$

23. Averigua a qué exponente hay que elevar 7 para obtener como resultado 2, dando una aproximación hasta las milésimas.

24. Si es $a>0$, se llama logaritmo en base a de x, y se designa $\log_a x$, al exponente al que hay que elevar a para obtener x:

$$\log_a x=y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} a^y=x$$

Obtén razonadamente los logaritmos siguientes:

a) $\log_2 8$, $\log_2\dfrac{1}{4}$, $\log_2 1$

b) $\log_3\dfrac{1}{3}$, $\log_3 1$, $\log_3 27$

25. Obtén el valor de x en las igualdades:

a) $\log_3 x=-1$, $\log_5 25=x$, $\log_x 5=2$

b) $\log_5 x=-2$, $\log_2\dfrac{1}{8}=x$, $\log_x 3=5$

26. Ordena los siguientes números reales:

$$-\frac{1}{3}\ ;\ 1{,}25\ ;\ \sqrt{2}\ ;\ \frac{13}{5}\ ;\ \sqrt[3]{4}$$

27. Expresa los siguientes intervalos o semirrectas de todas las formas posibles:

a) $A=\{x\ :\ 1\leq x<3\}$

b) $B=(1,+\infty)$

c) C es el intervalo cerrado desde -1 hasta 2.

d) D es la semirrecta de la figura:

28. Si A y B son dos conjuntos se define

Su unión como el conjunto:

$$A\cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{x\ :\ x\in A \text{ o } x\in B\}$$

Su intersección como:

$$A\cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x\ :\ x\in A \text{ y } x\in B\}$$

Obtén la unión y la intersección de:

a) $A=[2,5)$ y $B=\{x\ :\ 1<x<7\}$

b) $A=\{x\ :\ x>3\}$ y $B=[0,4]$

c) $A=\{x\ :\ -1\leq x<1\}$ y $B=[1,4]$

d) $A=(0,1)$ y $B=[1,+\infty)$

29. Una desigualdad de la forma

$$\frac{x-2}{x+4}>0$$

donde x es una variable se denomina inecuación.

Resolver la inecuación es obtener todos los valores reales tales que al sustituir x por dichos números se verifique la desigualdad.

a) ¿Es $x=1$ solución? ¿Y $x=3$? ¿Y $x=-5$?

a) Haz un estudio de signo detallado de la fracción.

b) Comprueba que el conjunto solución es

$$S=(-\infty,-5)\ \cup\ (-2,+\infty)$$

30. Dada la inecuación

$$\frac{x+3}{x-1}<0$$

a) Haz un estudio de signo detallado de la fracción.

b) Obtén el conjunto solución

c) ¿Es $x=1$ solución? ¿Y $x=3$? ¿Y $x=-2$?

31. Resuelve las siguientes inecuaciones de segundo grado:

a) $x^2-5x+4>0$

b) $x^2-16<0$

c) $(x-1)(x+2)>0$

d) $x^2-5x<0$

e) $3x-6>0$

f) $-2x+10<2$

32. Resuelve las siguientes inecuaciones fraccionarias:

a) $\dfrac{x-1}{x-5}<0$

b) $\dfrac{x-2}{x+3}>0$

c) $\dfrac{2x+6}{2-x}<0$

d) $\dfrac{x-1}{x^2-9}>0$

Cuestiones

1. Razona sobre la veracidad o falsedad de los siguientes asertos:

a) Todo número racional es real.

b) Todo número real es racional.

c) Algunos números reales son racionales.

d) Todo número entero es racional.

e) Algunos números racionales son enteros.

f) Todos los números decimales son racionales.

g) Los números racionales llenan la recta.

2. Dados los números

$x=0'1343434343434...$

$y=0'1343344333444...$

responde sobre la certeza o no de:

$$x\in\mathbb{R}\ ,\ y\in\mathbb{R}\ ,\ x\in\mathbb{Q}\ ,\ y\in\mathbb{Q}$$

3. Responde razonadamente sobre la certeza de:

a) La suma de dos irracionales es un irracional.

b) La suma de un racional y de un irracional es un número irracional.

4. Si x es un número negativo, ordena de mayor a menor:

$$x \ , \ 2x \ , \ \frac{x}{2} \ , \ 3x \ , \ -x \ , \ -3x \ , \ 0$$

5. Me he liado con las propiedades de las potencias y he escrito las siguientes igualdades, que son todas falsas. Compruébalo y sustitúyela por una que sí sea cierta:

a) $3^2+3^3=3^{2+3}$ b) $3^5-3^2=3^{5-2}$

c) $\left(3^2\right)^4=3^{\left(2^3\right)}$ d) $3^2\cdot 5^4=(3\cdot 5)^{2+4}$

e) $(3+5)^2=3^2+5^2$ f) $(5-2)^2=5^3-2^3$

g) $2^{-3}=(-2)^3$ h) $25^{\frac{1}{2}}=25^{-2}$

6. Escribe el menor y el mayor número real perteneciente a los siguientes intervalos o semirrectas:

a) $I=[2,+\infty)$

b) $J=[-4,5)$

c) $K=[3,7]$

7. Investiga si el cuadrado de un número es siempre mayor que dicho número.

8. Si el producto de dos números a y b es –3, ¿cuál es el valor del doble del producto de sus cuadrados?

9. Se define el valor absoluto de un número real de la siguiente forma:

$$|x| \stackrel{\text{def}}{=} \text{máx}(-x,x)$$

a) Calcula, aplicando la definición, el valor de absoluto de –2, 3 y 0.

b) Halla los valores de x para los cuales se tiene que es $|x|=3$

c) Idem. $|x|<5$

10. Se define la distancia entre dos números mediante:

$$d(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} |x-y|$$

Comprueba mediante algunos ejemplos, dibujándolos en la recta, que dicha fórmula da efectivamente la distancia entre los puntos que representan a dos números.

Ejercicios de Fracciones

1. Calcula:

a) $2\cdot(-3)-4\cdot4+(-7)\cdot2$

b) $-3\cdot4+(-6)\cdot3+9$

c) $7-(-2)\cdot(-3)+4\cdot(-2)-9$

d) $7-3^2+(-3)^2$

2. Efectúa:

a) $3-\left(\frac{-2}{4}+\frac{1}{3}\right)$ b) $\frac{2}{3}\cdot3+\frac{1}{6}$

c) $\frac{1}{9}:\frac{1}{18}-(-3)\cdot\frac{2}{9}$ d) $\frac{2}{\frac{3}{2}}-\frac{4}{9}\cdot2$

3. Simplifica:

a) $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}:\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$ b) $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}:\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)$

c) $-\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\left(1-\frac{1}{2}\cdot5\right)$ d) $\frac{1+\frac{1}{3}\cdot2}{3}+7:\frac{3}{2}$

e) $\left(2-\frac{1}{1+3^{-1}}\right)\cdot3-6^{-1}$ f) $\frac{7}{\frac{2}{3}}-\frac{\frac{7}{2}}{2}$

4. Opera hasta la fracción irreducible:

a) $\dfrac{1}{2+\dfrac{-1+2\cdot\frac{1}{4}}{3}}$ b) $\dfrac{2-\frac{2}{9}\cdot\frac{6}{8}-\left(\frac{-1}{3}\right)}{2+\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{20}+\left(-\frac{5}{12}\right)}$

c) $2+\frac{1}{2+3^{-1}}+\frac{4}{3}$ d) $\left(1-\dfrac{1}{1-\frac{4}{7}}\right)^{-1}$

5. Ordena, de menor a mayor:

$$\frac{-2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{-4}{3},\ \frac{4}{9},\ \frac{7}{6},\ \frac{15}{4}$$

6. Dibuja en la recta real:

$$\frac{7}{3},\ \frac{-5}{4},\ \frac{6}{4},\ 1{,}75$$

7. Escribe la expresión decimal de:

$$\frac{3}{5},\ \frac{7}{9},\ \frac{4}{15},\ \frac{-7}{2},\ \frac{8}{7}$$

8. Escribe en forma de fracción:

a) $0{,}625$ b) $-1{,}025$

c) $0,\hat{4}$ d) $3{,}4\overline{52}$

9. Calcula:

a) $(0,\hat{6}-1):8$

b) $0,\hat{6}+0,\hat{3}$

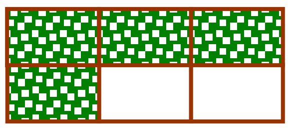
10. Expresa como

a) fracción y decimal el 40%.

b) fracción y porcentaje 0,28.

c) decimal y porcentaje 3/5.

d) fracción, porcentaje y decimal la proporción rayada respecto del total:



11. Calcula:

a) El 15% de 1 000

b) Las dos quintas partes de 35

c) La tercera parte de la mitad de 21

d) El doble de los 2/3 de 150

12. Juan va de compras a unos almacenes. En un CD se gasta la tercera parte del dinero que lleva. Luego, en un libro, las dos quintas partes del dinero inicial. Y, por último, gasta en un aperitivo los 4 € que le quedan.

¿Con cuánto dinero salió de compras?

13. Una tableta de calmante contiene el 20% de A.A.S., el 40% de vitamina C y el esto es excipiente. Si pesa 2 gr., ¿cuántos gramos hay de cada componente?

Autoevaluación

1. Considera el número $\sqrt{5}$.

a) ¿Cómo se define dicho número?

b) ¿Es igual a alguna fracción de números enteros?

c) Su expresión decimal, ¿cómo es?

d) Aproxímalo hasta las milésimas por exceso. Calcula el error cometido ϵ .

e) Represéntalo en la recta real.

2. Efectúa las siguientes operaciones con radicales, racionalizando cuando sea necesario:

a) $\dfrac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a\,b^3}}{\sqrt{b}}$

b) $\sqrt{32}-3\sqrt{8}$

c) $\dfrac{\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$

3.

a) Averigua a qué exponente debemos elevar 3 para obtener 5.

b) Halla x en las siguientes expresiones:

$$\log_3 x=-2\ ,\ \log_x 3=2\ ,\ \log_5 25=x$$

4. Considera

$$A=[-2,1)\ \text{ y }\ B=(-1,\infty)$$

a) Expresa de todas las formas posibles esos conjuntos.

b) ¿Cuántos números enteros hay en ellos? ¿Y cuántos racionales?

c) Obtén $A\cup B$ y $A\cap B$.

5. Consideremos el polinomio

$$p=x^2-5x+4$$

a) ¿Para qué valores de x es positivo? ¿Para qué valores es negativo?

b) Resuelve la inecuación $p>0$.

José Álvarez Fajardo

Autoevaluación

1.

a) Es un número real que al cuadrado da como resultado 5.

b) No, ya que es un número irracional.

c) Es una expresión decimal ilimitada no periódica.

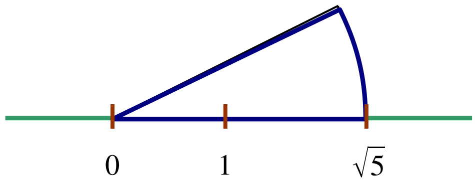
d) Aproximación:

$$\sqrt{5} \approx 2{,}237$$

Error cometido:

$$\varepsilon = |\sqrt{5} - 2{,}237| = 0{,}000932\ldots < 0{,}001$$

e) Utilizaremos el Teorema de Pitágoras:



2.

a) $= \sqrt{\dfrac{a \cdot a\, b^3}{b}} = \sqrt{\dfrac{a^2 b^3}{b}} = \sqrt{a^2 b^2} = a\, b$

b) $= \sqrt{16 \cdot 2} - 3\sqrt{4 \cdot 2} = 4\sqrt{2} - 3 \cdot 2\sqrt{2} =$

$= 4\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$

c) $= \dfrac{\sqrt{5} \cdot (3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5}) \cdot (3+\sqrt{5})} = \dfrac{\sqrt{5} \cdot 3 + \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{3^2 - (\sqrt{5})^2} =$

$= \dfrac{3\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2}{9-5} = \dfrac{3\sqrt{5}+5}{4}$

3.

a) Sea x ese número:

$$3^x = 5 \ \rightarrow \ x = \frac{\log 5}{\log 3} = 1{,}46497\ldots$$

b) $\log_3 x = -2 \ \rightarrow \ 3^{-2} = x \ \rightarrow \ x = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$

c) $\log_x 3 = 2 \ \rightarrow \ x^2 = 3 \ \rightarrow \ x = \sqrt{3}$

d) $\log_5 25 = x \ \rightarrow \ 5^x = 25 \ \rightarrow \ x = 2$

4.

a) A es el intervalo cerrado–abierto de -2 a 1.

$$A = \{x \ : \ -2 \leq x < 1\}$$

A es el conjunto de todos los números reales comprendidos entre -2 y 1, incluido -2.

A es el intervalo:

B es la semirrecta abierta desde -1.

$$B = \{x \ : \ x > -1\}$$

B es el conjunto de los números reales superiores a -1.

B es la semirrecta:

b) En A hay tres enteros: –2, –1 y 0.

En B hay infinitos enteros: 0, 1, 2, 3, 4, ...

En ambos hay infinidad de racionales, ya que entre dos reales cualesquiera hay infinitos números racionales e irracionales.

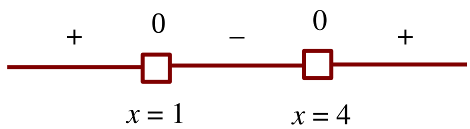
c) La unión e intersección son, respectivamente:

$$A \cup B = [-2, +\infty)$$
$$A \cap B = (-1, 1)$$

5. Haremos un estudio de signo:

Ceros: $\quad x^2 - 5x + 4 = 0 \ \rightarrow \ \begin{vmatrix} x=1 \\ x=4 \end{vmatrix}$

Intervalos de signo:



En el esquema de signos anterior podemos apreciar claramente en qué intervalos es p positivo y negativo.

La solución de $p > 0$ es claramente

$$S = (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$$