

Nombre: _____ 1º

Prueba de Suficiencia. Matemáticas Aplicadas I

x Ejercicio 1:

- En un rectángulo de perímetro 18 cm. la base mide 5,65 cm. Determina su área.
- Averigua a qué número debemos elevar 2 para obtener 3.
- Los números obtenidos en los apartados anteriores, ¿son racionales o irracionales? ¿Cómo es su expresión decimal?
- Redondéalos hasta las milésimas . Calcula el error cometido y acótalo.

x Ejercicio 2: Estudia el signo de la fracción $f = \frac{5-x}{x+4}$ según los distintos valores de x . Indica cuándo es $f > 0$?

x Ejercicio 3: Considera el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

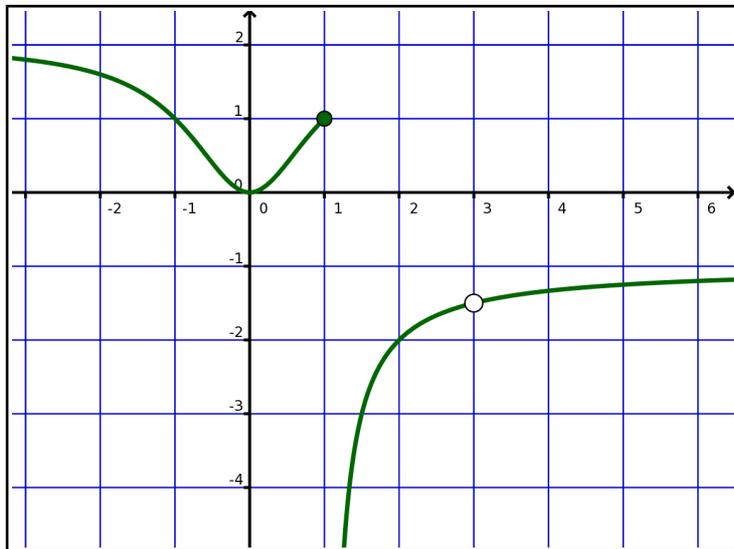
$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ -2x + y + 5 = 0 \end{cases}$$

- Resuelve algebraicamente ese sistema.
- Dibuja en unos ejes de coordenadas las gráficas de cada una de las ecuaciones. ¿Cómo pueden interpretarse en esa gráfica las soluciones del sistema?

x Ejercicio 4: Si a un número le sumamos la raíz de su triple obtenemos seis. Plantea una ecuación adecuada y averigua dicho número resolviéndola.



x **Ejercicio 5:** La gráfica de la función $y = f(x)$ es la mostrada a continuación:



- Analiza la continuidad de la función, estudiando el valor y las tendencias en cada uno de los valores en cada una de las discontinuidades.
- Averigua cuáles son las tendencias de la función para $x \rightarrow +\infty$ y para $x \rightarrow -\infty$?
- ¿Qué asíntotas tiene la curva?

x **Ejercicio 6:** En un experimento que dura seis horas se estudia la temperatura de un objeto. Ésta varía en función del tiempo transcurrido desde el inicio de la experiencia según la fórmula

$$T = t^2 - 5t + 4, \quad 0 \leq t \leq 6$$

donde el tiempo (t) está medido en horas y la temperatura (T) en grados centígrados.

- Dibuja la gráfica tiempo – Temperatura. ¿De qué tipo de gráfico se trata?
- Indica cuándo la temperatura está bajo cero y cuándo por encima.
- ¿En qué período de tiempo aumenta la temperatura del objeto? ¿En cuál disminuye?
- Señala las temperatura extremas, indicando en qué momento se alcanzan.

x **Ejercicio 7:** Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & \text{si } x \leq 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- Obtén razonadamente los límites de $f(x)$ para $x \rightarrow \pm\infty$. ¿Tiene asíntotas horizontales?
- Estudia algebraicamente su continuidad.
- Dibuja su gráfica.

x **Ejercicio 8:** Sea $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$

- Calcula los límites de $f(x)$ para $x \rightarrow \pm\infty$.
- Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. ¿Es continua la función cuando $x = 0$?
- ¿Qué ocurre con $f(x)$ cuando $x \rightarrow 2$? ¿Es continua la función cuando $x = 2$?
- Señala cuáles son sus asíntotas horizontales y verticales.

Nombre: _____ 1º

Prueba de Suficiencia. Matemáticas Aplicadas I

- x **Ejercicio 9:** Se lanzan dos dados de cuatro caras, numeradas del 1 al 4, y anotamos la pareja obtenida. Consideremos los sucesos:
- Determine el espacio muestral asociado a ese experimento.
 - Determine los sucesos y obtenga sus probabilidades:
A: "sacar doble"
B: "la suma de los puntos es al menos cuatro"
 - Otenga $A \cup \bar{B}$ y $\bar{A} \cap B$ y calcule sus probabilidades.
- x **Ejercicio 10:** En una población el 32% va usualmente al cine y el 15% al teatro. También se sabe que el 10% va a ambos.
- Calcule la probabilidad de que un individuo vaya al cine o al teatro.
 - ¿Qué porcentaje de individuos va al teatro pero no al cine?
- x **Ejercicio 11:** Estamos ante dos urnas exteriormente idénticas de modo que la situada a nuestra izquierda contiene cinco bolas rojas y tres negras, y la de la derecha contiene dos rojas y tres negras. Elegimos una urna al azar y sacamos una bola.
- Calcule la probabilidad de elegir la urna de la derecha y sacar la bola negra.
 - ¿Cuál es la probabilidad de que la bola sea roja?
- x **Ejercicio 12:** El coeficiente intelectual en una población se distribuye siguiendo una ley normal de media 80 puntos y una desviación típica de 30 puntos.
- ¿Qué porcentaje de la población tiene un coeficiente inferior a los 75 puntos?
 - En una muestra de 60 individuos, ¿cuántos esperamos que tengan un coeficiente inferior a esos 75 puntos?
- x **Ejercicio 13:** En un grupo de 1º de Bachillerato las calificaciones de Lengua han sido las siguientes:
- 2 3 3 4 4 4 5 5 5 5 6 6 6 7 7 8 8 8 9 9
- Construye la tabla en la que aparezcan todas las frecuencias. ¿Qué porcentaje de alumnos ha conseguido siete o más?
 - ¿Cuál es la variable estadística estudiada? ¿De qué tipo es? Representa su diagrama de barras y el polígono de frecuencias.
 - Calcula los siguientes parámetros: la moda, la mediana, la media y la desviación típica.

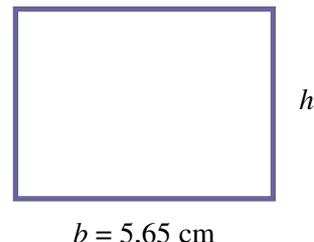


x Ejercicio 1:

- a) Recordemos que el perímetro es la suma de todos los lados, y se nos dice que es 18 cm.

Las dos bases miden $5,65 \times 2 = 11,3$. Así, las dos alturas miden $18 - 11,3 = 6,7$. Luego cada una mide $6,7 : 2 = 3,35$. Concluimos que la altura mide 3,35 cm.

$$\text{Área} = b \times h = 6,65 \times 3,35 = 18,9275 \text{ cm}^2$$



- b) Sea x ese exponente:

$$2^x = 3 \rightarrow x = \frac{\log 3}{\log 2} = 1,5849625 \dots$$

- c) El área del rectángulo es un número racional pues se trata de un decimal exacto.

El exponente es un número irracional, tratándose de un número periódico ilimitado no periódico.

- d) Veamos esas aproximaciones:

$$A = 18,9275 \approx 18,928 \rightarrow \epsilon = 18,9275 - 18,928 = -0,0005 \text{ es menor que una milésima}$$

$$x = 1,5849625 \dots \approx 1,585 \rightarrow \epsilon = 1,5849625 \dots - 1,585 = -0,000037 \dots \text{ es menor que una diezmilésima}$$

- e) Estudiemos el signo de

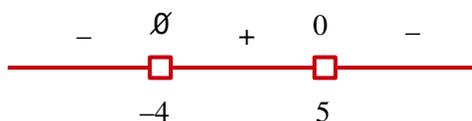
$$f = \frac{5-x}{x+4}$$

Obtengamos los ceros:

• Veamos cuándo es cero el numerador: $5 - x = 0 \rightarrow x = 5$

• Veamos cuándo lo es el denominador: $x + 4 = 0 \rightarrow x = -4$

Intervalos de signo:



Concluimos que es $f > 0$ cuando x está entre -4 y 5 :

$$S = (-4, 5)$$

x Ejercicio 2:

- a) Vamos a resolver por sustitución el sistema

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ -2x + y + 5 = 0 \end{cases}$$

Ya tenemos despejada la incógnita y en la primera ecuación. Sustituyendo su valor en la segunda:

$$-2x + (x^2 - 4x) + 5 = 0$$

Simplificamos y aplicamos la fórmula de la ecuación de 2º grado:

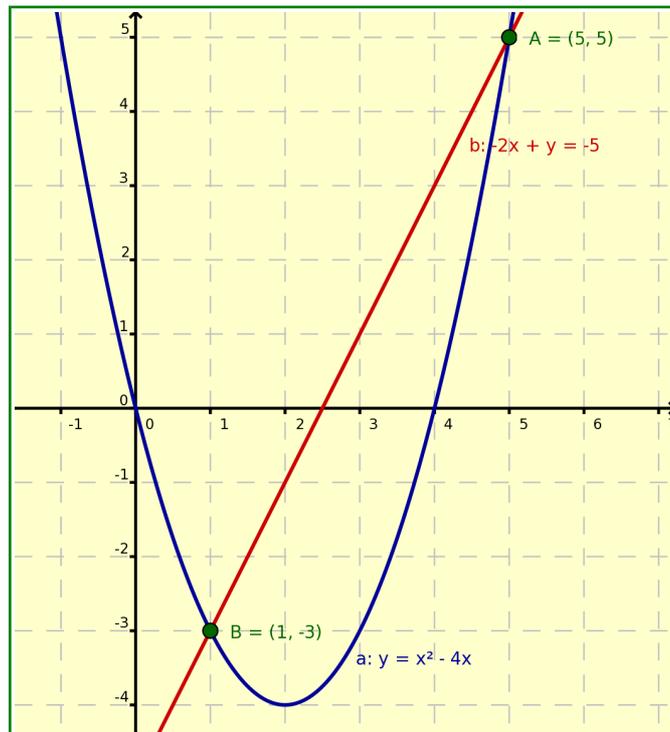
$$x^2 - 6x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 4}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 1 & \rightarrow & y = -3 \\ x = 5 & \rightarrow & y = 5 \end{cases}$$

Observemos que el sistema tiene dos soluciones.

b) La ecuación $y = x^2 - 4x$ se representará como una parábola. Su vértice estará en $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$.

La segunda ecuación $y = 2x - 5$ se trata de una recta.

Con un par de tablas de valores obtenemos:



Vemos que las soluciones se corresponden con los puntos de corte de la recta con la parábola.

x Ejercicio 4:

Sea x ese número.

Así, su triple será $3x$ y, por consiguiente, la raíz de su triple será $\sqrt{3x}$.

La ecuación que nos permitirá obtener x es:

$$\underbrace{x + \sqrt{3x}}_{\text{El número más la raíz del triple}} = \underbrace{6}_{\text{es seis}}$$

Resolvamos la ecuación:

Ecuación original:	$x + \sqrt{3x} = 6$
Dejamos sola la raíz:	$\sqrt{3x} = 6 - x$
Elevamos al cuadrado:	$(\sqrt{3x})^2 = (6 - x)^2$
Desarrollamos:	$3x = 36 - 12x + x^2$
Limpiamos y resolvemos:	$x^2 - 15x + 36 = 0 \rightarrow x = 3 \text{ ó } x = 12$

Al elevar al cuadrado ambos miembros obtenemos una ecuación que puede tener más soluciones que la propuesta (no tienen por qué ser equivalentes). Es preciso comprobarlas:

$$\begin{aligned}
 x = 3 &\rightarrow 3 + \sqrt{9} = 6 \rightarrow 3 + 3 = 6 \quad \text{SI} \\
 x = 12 &\rightarrow 12 + \sqrt{36} = 6 \rightarrow 12 + 6 = 6 \quad \text{NO}
 \end{aligned}$$

Concluimos: el número buscado es el 3.

x Ejercicio 5:

a) La función es continua en todo punto excepto en $x = 1$ (discontinuidad de salto infinito) y en $x = 3$ (discontinuidad evitable o de agujero). Veamos los valores y las tendencias en esas discontinuidades:

$x=1$	VALOR:	si $x=1$ es $y=1$
	TENDENCIAS:	$\begin{cases} \text{si } x \rightarrow 1^- \text{ es } y \rightarrow 1 \\ \text{si } x \rightarrow 1^+ \text{ es } y \rightarrow -\infty \end{cases}$
$x=3$	VALOR:	si $x=3$ es $y=\text{No existe}$
	TENDENCIAS:	$\begin{cases} \text{si } x \rightarrow 3^- \text{ es } y \rightarrow 2 \\ \text{si } x \rightarrow 3^+ \text{ es } y \rightarrow 2 \end{cases}$

b) En la gráfica observamos las siguientes tendencias en el infinito:

$$\text{si } x \rightarrow -\infty \text{ es } y \rightarrow 2 \quad \text{y} \quad \text{si } x \rightarrow +\infty \text{ es } y \rightarrow -1$$

o lo que es igual:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$$

c) La curva tiene las siguientes asíntotas:

Horizontales:

$$y = 2 \quad (\text{para } x \rightarrow -\infty)$$

$$y = -1 \quad (\text{para } x \rightarrow +\infty)$$

Verticales:

$$x = 1 \quad (\text{pues aquí tenemos una discontinuidad de salto infinito})$$

x Ejercicio 6:

a) La gráfica será un trozo de parábola, cuyo vértice se encuentra cuando $t_v = \frac{-b}{2a} = \frac{5}{2} = 2,5$.

t	0	1	2	2,5	3	4	5	6
T	4	0	-2	-2,25	-2	0	4	10

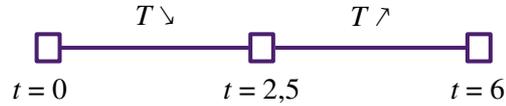
Con la anterior tabla de valores:



b) En el esquema siguiente señalamos cuándo la temperatura está sobre cero (+) y bajo cero (-):



c) En el siguiente esquema mostramos cuándo aumenta o disminuye la temperatura:



d) Las temperaturas extremas son:

$$T_{max} = 5^{\circ}\text{C} \text{ que se alcanza para } t = 4 \text{ h.}$$

$$T_{min} = -4^{\circ}\text{C} \text{ que se alcanza para } t = 1 \text{ h.}$$

x Ejercicio 7:

a) Debemos elegir la fórmula conveniente:

$$\text{si } x \rightarrow -\infty \text{ es } y = x^2 + 4x \rightarrow +\infty \text{ pues } (-\infty)^2 = +\infty$$

$$\text{si } x \rightarrow +\infty \text{ es } y = x + 1 \rightarrow +\infty \text{ pues } (+\infty) + 1 = +\infty$$

Deducimos de lo anterior que no hay asíntotas horizontales, pues la función no tiende hacia un número.

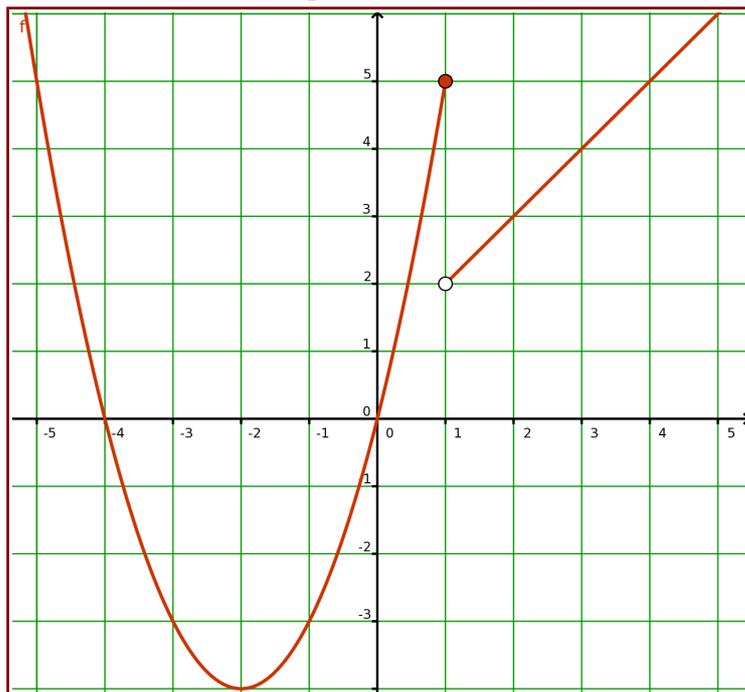
b) La función sólo puede ser discontinua en $x = 1$, que es el punto de conexión de ambas partes.

$$\boxed{x=1} \quad \text{VALOR:} \quad \text{si } x=1 \text{ es } y=5$$

$$\text{TENDENCIAS:} \quad \begin{cases} \text{si } x \rightarrow 1- \text{ es } y = x^2 + 4x \rightarrow 5 \\ \text{si } x \rightarrow 1+ \text{ es } y = x + 1 \rightarrow 2 \end{cases}$$

Concluimos que hay discontinuidad de salto finito (-3 unidades) para $x = 1$.

c) La gráfica se compondrá de un trozo de parábola (con vértice en $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2$) para $x \leq 1$, así como de un trozo de recta para $x > 1$. Con unas tablas de valores adecuadas:



x Ejercicio 8:

a) Aplicamos la regla de los grados; como el grado del numerador y del denominador es el mismo:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} = \frac{1}{1} = 1$$

b) Sustituimos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \left[\frac{-4}{0} \right] = \pm\infty$$

Precisemos el signo con los laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \left[\frac{-4}{+0} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \left[\frac{-4}{-0} \right] = +\infty$$

Para $x = 0$ la función no tiene valor (pues el denominador es cero) y tiende hacia el infinito. Así que en este valor tiene una discontinuidad de salto infinito.

c) Sustituimos:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \left[\frac{0}{0} \right] = ?$$

Simplificamos para evitar la indeterminación:

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} = \frac{(x+2) \cdot (x-2)}{x \cdot (x-2)} = \frac{x+2}{x}$$

Así, tomando ahora límite:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x} = \frac{4}{2} = 2$$

Para $x = 2$ la función no tiene valor (pues el denominador es cero) y tiende hacia 2. Así que en este valor tiene una discontinuidad de agujero.

d) Del apartado (a) se deduce que la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal.

Del apartado (b) se deduce que la recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

x Ejercicio 9:

a) El espacio muestral es:

$$E = \{1-1, 1-2, 1-3, 1-4, 2-1, 2-2, 2-3, 2-4, 3-1, 3-2, 3-3, 3-4, 4-1, 4-2, 4-3, 4-4\}$$

$$b) A = \{1-1, 2-2, 3-3, 4-4\} \rightarrow p(A) = \frac{n^\circ \text{ de casos favorables}}{n^\circ \text{ de casos posibles}} = \frac{4}{16}$$

$$B = \{1-3, 1-4, 2-2, 2-3, 2-4, 3-1, 3-2, 3-3, 3-4, 4-1, 4-2, 4-3, 4-4\} \rightarrow p(B) = \frac{13}{16}$$

$$c) A \cup \bar{B} = \{1-1, 2-2, 3-3, 4-4, 1-2, 2-1\} \rightarrow p(A \cup \bar{B}) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$\bar{A} \cap B = \{1-3, 1-4, 2-3, 2-4, 3-1, 3-2, 3-4, 4-1, 4-2, 4-3\} \rightarrow p(\bar{A} \cap B) = \frac{13}{16}$$

x Ejercicio 10: Llamemos:

$$C = \text{"un individuo va al cine"} \rightarrow p(C) = 0,32$$

$$T = \text{"un individuo va al teatro"} \rightarrow p(T) = 0,15$$

$$\text{También conocemos} \quad p(C \cap T) = 0,10$$

a) Se nos pide la probabilidad de la unión:

$$p(C \cup T) = p(C) + p(T) - p(C \cap T) = 0,32 + 0,15 - 0,10 = 0,37$$

b) Organicemos todo en una tabla:

	C	\bar{C}	
T	0,1	0,05	0,15
\bar{T}	0,22	0,63	0,85
	0,32	0,68	1

La probabilidad pedida está en la tabla: $p(\bar{C} \cap T) = 0,05$

Concluimos que el 5% va al teatro pero no al cine.

x Ejercicio 11: Podemos considerarlo una experiencia compuesta de dos fases

Fase 1: "elegimos la urna"

Fase 2: "sacamos la bola de la urna elegida"

Las fases son dependientes, pues las probabilidades de sacar una bola u otra varían según la urna elegida.

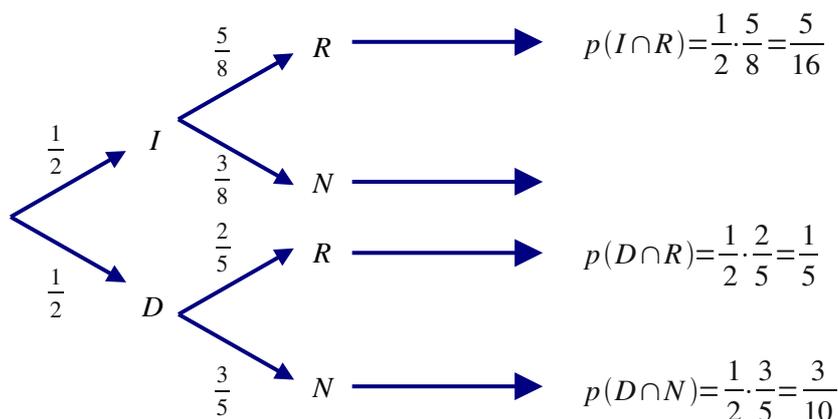
Pongamos $I = \text{"elegimos la urna izquierda"}$

$D = \text{"elegimos la urna derecha"}$

$C = \text{"sacamos una bola negra"}$

$B = \text{"sacamos unas braguitas"}$

El diagrama de árbol nos muestra esquemáticamente la estructura de la experiencia:



a) La probabilidad pedida es: $p(D \cap N) = \frac{3}{10}$

b) Es una probabilidad total:

$$p(R) = \frac{5}{16} + \frac{1}{5} = \frac{41}{80}$$

x Ejercicio 12:

Es X = “coeficiente intelectual de los individuos” normal con $\begin{cases} \mu = 80 \text{ p.} \\ \sigma = 30 \text{ p.} \end{cases}$

a) Es: $p(X < 75) = p(Z < -0,17) = 1 - 0,5675 = 0,4325$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{75 - 80}{30} \approx -0,17$$

b) $E = n \cdot p = 60 \cdot 0,4325 = 25,95 \rightarrow$ Esperamos unos 26 individuos

x Ejercicio 13:

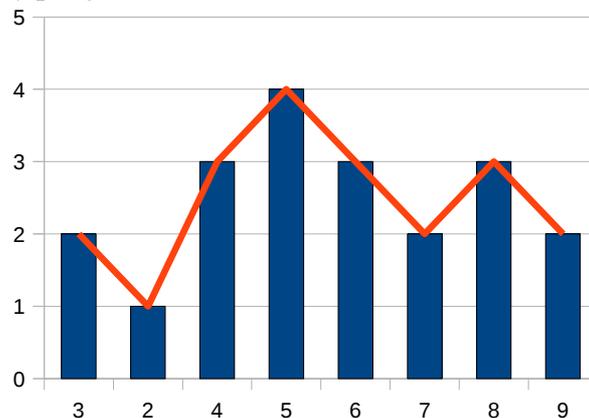
a) La tabla de frecuencias es:

x_i	n_i	N_i	f_i	F_i
2	1	1	$\frac{1}{20} = 0,05$	$\frac{1}{20} = 0,05$
3	2	3	$\frac{2}{20} = 0,10$	$\frac{3}{20} = 0,15$
4	3	6	$\frac{3}{20} = 0,15$	$\frac{6}{20} = 0,30$
5	4	10	$\frac{4}{20} = 0,20$	$\frac{10}{20} = 0,50$
6	3	13	$\frac{3}{20} = 0,15$	$\frac{13}{20} = 0,65$
7	2	15	$\frac{2}{20} = 0,10$	$\frac{15}{20} = 0,75$
8	3	18	$\frac{3}{20} = 0,15$	$\frac{18}{20} = 0,90$
9	2	20	$\frac{2}{20} = 0,10$	$\frac{20}{20} = 1,00$

Han sacado 7 o más un total de 7 alumnos de 20 que hay en total, lo que representa un 35%.

b) La variable estadística estudiada es “la calificación obtenida en Lengua”, siendo cuantitativa discreta.

Diagrama de barras y polígono de frecuencias:



c) Moda: $Mo = 5$ (porque es el dato de mayor frecuencia)

Mediana: $Me = \frac{5+6}{2} = 5,5$ pues hasta $x = 5$ se acumula exactamente el 50% de los datos.

Media: $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{114}{20} = 5,7$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{730}{20} - 5,7^2} = \sqrt{4,01} \approx 2,0025$