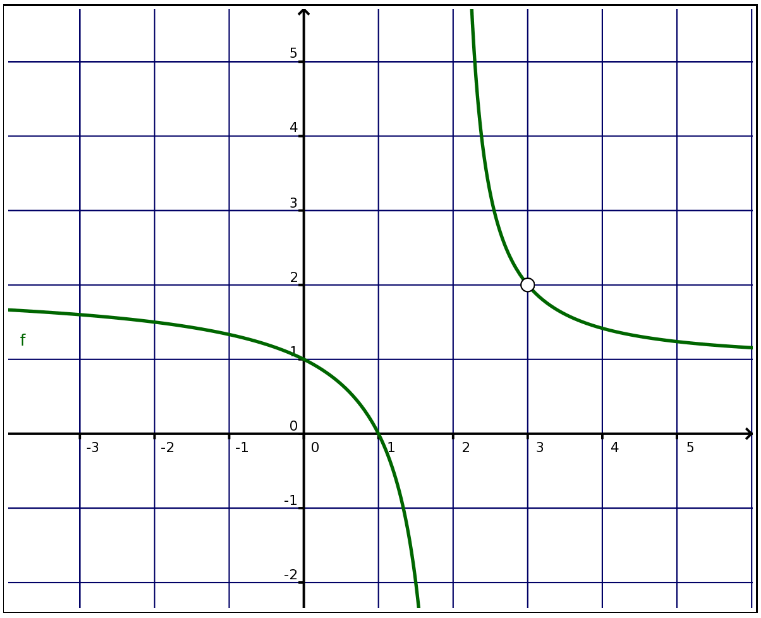
Nombre: ______________________________________ ***1º***	
Funciones: límites y continuidad	

✗ Ejercicio 1: La gráfica de la función $y=f(x)$ es la mostrada a continuación:



a) Calcula los límites de $f(x)$ para $x \to 0$, $x \to 2$ y $x \to 3$.

b) Estudia la continuidad de la función.

c) ¿Cuál es la tendencia de la función cuando $x \to -\infty$? ¿Y cuando $x \to +\infty$?

d) ¿Qué asíntotas tiene la curva?

✗ Ejercicio 2: Sea $f(x)=\begin{cases} x^2-4x & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 2x-1 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

a) Calcula los límites de $f(x)$ para $x \to \pm\infty$. ¿Tiene asíntotas horizontales?

b) Estudia numéricamente su continuidad.

c) Dibuja su gráfica.

✗ Ejercicio 3: Sea $f(x)=\dfrac{x^2-4}{3x^2-6x}$

a) Calcula los límites de $f(x)$ para $x \to \pm\infty$.

b) Calcula $\lim_{x \to 0} f(x)$, distinguiendo los laterales si es preciso.

c) ¿Qué ocurre con $f(x)$ cuando $x \to 2$?

d) Estudia la continuidad de la función.

e) ¿Qué asíntotas tiene la gráfica de la función?

✗ <u>Ejercicio 1</u>:

a) En la gráfica vemos que si $x \to 0$ se tiene que $P=(x, y) \to (0, 1)$. Así, resulta ser:

$$\text{si } x \to 0 \text{ es } y \to 1$$

o lo que es igual:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

En la gráfica vemos que si $x \to 3$ se tiene que $P=(x, y) \to (3, 2)$. Así, resulta ser:

$$\text{si } x \to 3 \text{ es } y \to 2$$

o lo que es igual:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 2$$

En la gráfica vemos que si $x \to 3$ la función se va al infinito, debiendo distinguir los laterales:

$$\text{si } x \to 2- \text{ es } y \to -\infty \quad \text{y} \quad \text{si } x \to 2+ \text{ es } y \to +\infty$$

o lo que es igual:

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 2+} f(x) = +\infty$$

b) Observamos en la gráfica que la función sólo es discontinua para $x = 2$ (con discontinuidad de salto infinito) y para $x = 3$ (con discontinuidad de agujero o evitable).

c) En la gráfica observamos las siguientes tendencias en el infinito:

$$\text{si } x \to -\infty \text{ es } y \to 2 \quad \text{y} \quad \text{si } x \to +\infty \text{ es } y \to 1$$

o lo que es igual:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

d) La curva tiene las siguientes asíntotas:

Horizontales:

$y = 2$ (para $x \to -\infty$)

$y = 1$ (para $x \to +\infty$)

Verticales:

$x = 2$ (pues aquí tenemos una discontinuidad de salto infinito)

✗ <u>Ejercicio 2</u>:

a) Debemos elegir la fórmula conveniente:

si $x \to -\infty$ es $y = x^2 - 4x \to +\infty$

si $x \to +\infty$ es $y = 2x - 1 \to +\infty$

Deducimos de lo anterior que no hay asíntotas horizontales, pues la función no tiende hacia un número.

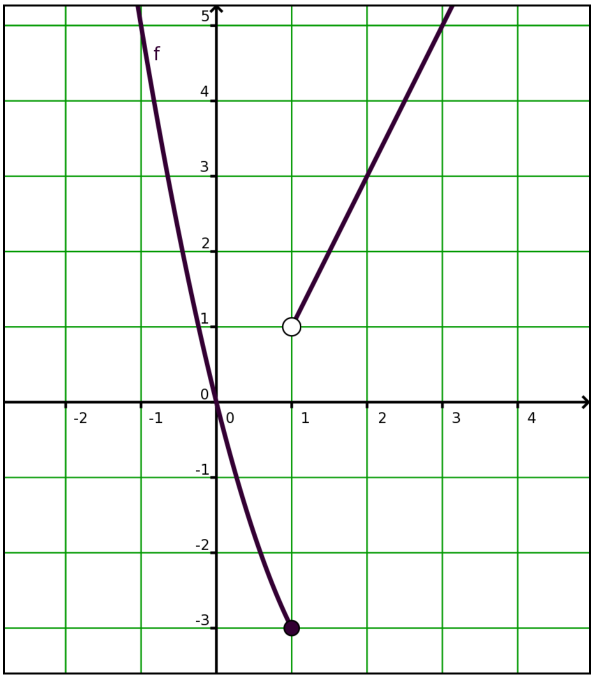
b) La función sólo puede ser discontinua en $x = 1$, que es el punto de conexión de ambas partes.

$\boxed{x=1}$ VALOR: si $x = 1$ es $y = -3$

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si } x \to 1- \text{ es } y = x^2 - 4x \to -3 \\ \text{si } x \to 1+ \text{ es } y = 2x - 1 \to 1 \end{cases}$

Concluimos que hay discontinuidad de salto finito (4 unidades) para $x = 1$.

c) La gráfica se compondrá de un trozo de parábola ($x \leq 1$) y de recta ($x > 1$):



✗ <u>Ejercicio 3</u>:

a) Aplicamos la regla de los grados; como el grado del numerador y del denominador es el mismo:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2-4}{3x^2-6x} = \frac{1}{3}$$

b) Sustituimos:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \left[\frac{-4}{0}\right] = \pm\infty$$

Precisemos el signo con los laterales:

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \left[\frac{-4}{+0}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \left[\frac{-4}{-0}\right] = +\infty$$

c) Sustituimos:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \left[\frac{0}{0}\right] = ¿?$$

Simplificamos para evitar la indeterminación:

$$\frac{x^2-4}{3x^2-6x} = \frac{(x+2)\cdot(x-2)}{3x\cdot(x-2)} = \frac{x+2}{3x}$$

Así, tomando ahora límite:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x+2}{3x} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

d) La función sólo es discontinua en los ceros del denominador:

$\boxed{x=0}$ VALOR: si $x=0$ es $y=$ no existe

TENDENCIAS: si $x \to 0$ es $y \to \pm\infty$

Concluimos que hay discontinuidad de salto infinito para $x = 0$.

$\boxed{x=2}$ VALOR: si $x=2$ es $y=$ no existe

TENDENCIAS: si $x \to 2$ es $y \to \frac{2}{3}$

Concluimos que hay discontinuidad de agujero para $x = 2$.

e) Del apartado (a) se deduce que la recta $y = \frac{1}{3}$ es una asíntota horizontal.

Del apartado (b) se deduce que la recta $x = 0$ es una asíntota vertical.