Nombre: ____ **1º**	
Problemas de Análisis	

✗ Ejercicio1: En un experimento que dura cinco horas se estudia la temperatura de un objeto. Ésta varía en función del tiempo transcurrido desde el inicio de la experiencia según la fórmula

$$T=t^2-4t \quad , \quad 0\leq t\leq 5$$

donde el tiempo (t) está medido en horas y la temperatura (T) en grados centígrados.

a) ¿Cuál es la temperatura al inicio del experimento? ¿Y al final?

b) Dibuja la gráfica tiempo – Temperatura.

c) ¿En qué período de tiempo aumenta la temperatura del objeto? ¿En cuál disminuye?

d) Señala las temperatura máxima y mínima alcanzadas.

e) Indica cuándo la temperatura está bajo cero y cuándo por encima.

f) Construye un esquema de variación de la función.

✗ Ejercicio 2: Considera la función f definida por:

$$f(x)=\begin{cases} 2^x-1 & \text{si} \quad x<2 \\ 4-x & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$$

a) Dibuja su gráfica.

b) Estudia su continuidad.

c) ¿Cuál es la tendencia de la función cuando $x\rightarrow+\infty$? ¿Y cuando $x\rightarrow-\infty$?

✗ Ejercicio 3: Considera las funciones siguientes:

$$f(x)=x+1 \quad , \quad g(x)=\sqrt{2x-4} \quad \text{y} \quad h(x)=\frac{x-3}{x-1}$$

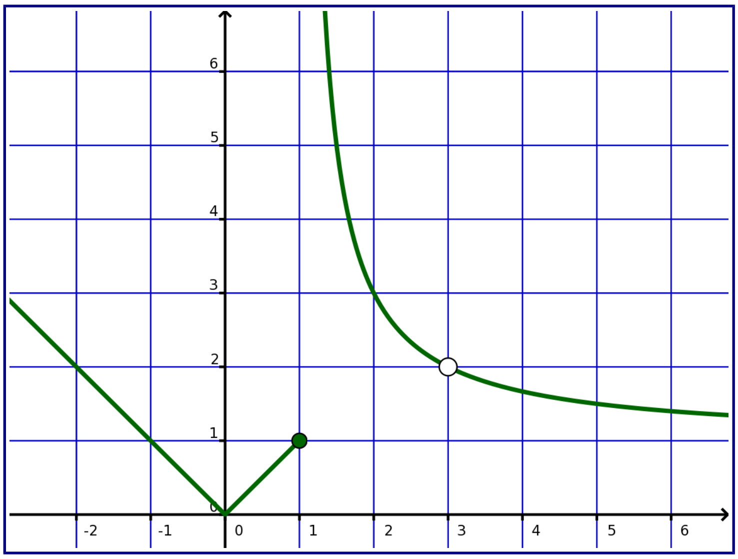
a) Calcula $(f-h)(0)$ y $(f\circ g)(2)$

b) Halla $\left(\frac{h}{f}\right)(x)$ y su dominio.

c) Obtén $(g\circ f)(x)$ y su dominio.

Nombre: ____ **1º**	
Problemas de Análisis	

✗ Ejercicio 4: La gráfica de la función $y=f(x)$ es la mostrada a continuación:



a) Estudia la continuidad de la función, señalando valor y tendencias en las discontinuidades.

b) Indica las tendencias de la función para $x \to \pm\infty$.

c) ¿Qué asíntotas tiene la curva?

✗ Ejercicio 5: Sea

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x & \text{si} \quad x\leq 1 \\ -x+3 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

a) Calcula los límites de $f(x)$ para $x \to \pm\infty$. ¿Tiene asíntotas horizontales?

b) Razona cuál es el único punto en el que la función f puede ser discontinua. Estudia algebraicamente la continuidad en él.

c) Dibuja su gráfica y compruébalo.

✗ Ejercicio 6: Sea

$$f(x)=\frac{2x}{x^2-4x}$$

a) Calcula los límites de $f(x)$ para $x \to \pm\infty$.

b) Calcula las tendencias de la función para $x \to 0$ y $x \to 4$.

c) Estudia la continuidad de la función.

d) ¿Qué asíntotas tiene la gráfica de la función?

✗ <u>Ejercicio 1</u>:

a) Hacemos $t=0 \rightarrow T_i=-3$:

Al inicio del experimento la temperatura es de tres grados bajo cero.

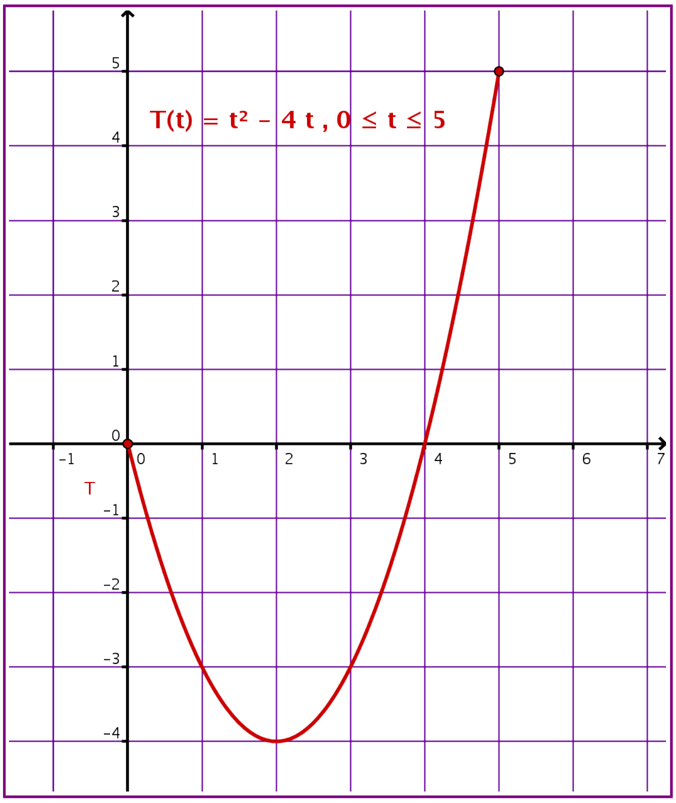
Haciendo $t=5 \rightarrow T=5$:

Al final de la experiencia la temperatura es de cinco grados.

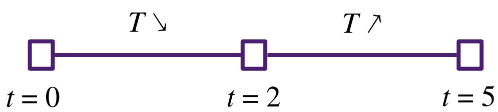
b) La gráfica será un trozo de parábola, cuyo vértice se encuentra cuando $t_V=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{4}{2}=2$.

t	0	1	2	3	4	5
T	0	–3	–4	–3	0	5

Con la anterior tabla de valores:



c) En el siguiente esquema mostramos cuándo aumenta o disminuye la temperatura:

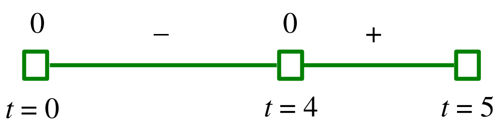


d) Las temperaturas extremas son:

$T_{max}=5$ºC que se alcanza para $t=5$ *h*.

$T_{min}=-4$ºC que se alcanza para $t=2$ *h*.

e) En el esquema siguiente señalamos cuándo la temperatura está sobre cero (+) y bajo cero (–):

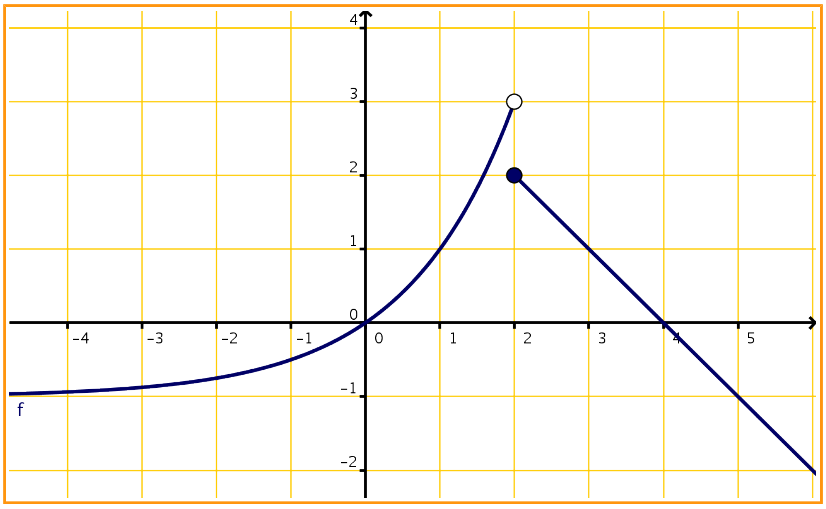


f) La siguiente tabla resume la variación de la función:

t	0		2		5
T	0	↘	–4	↗	5

✗ <u>Ejercicio 2</u>:

a) La gráfica se compondrá de un trozo de curva exponencial para $x<2$, así como de un trozo de recta para $x\geq 2$. Con unas tablas de valores adecuadas:



b) Apreciamos en la gráfica que la función es continua en todo punto excepto para $x = 2$, donde hay una discontinuidad de salto finito.

c) Si prolongamos hacia la izquierda, la gráfica se aproxima a la cuadrícula horizontal y = –1:

$$\text{si} \quad x\to-\infty \quad \text{es} \quad y\to-1$$

Si prolongamos hacia la derecha, la gráfica se va hacia abajo:

$$\text{si} \quad x\to+\infty \quad \text{es} \quad y\to-\infty$$

✗ <u>Ejercicio 3</u>:

a) $(f-h)(0)=f(0)-h(0)=1-3=-2$

$(f\circ g)(2)=f\left[g(2)\right]=f(0)=0+1=1$

El esquema de esta composición es:

$$\begin{tikzcd} x=2 \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f\circ g"'] & 0 \arrow[r, "f"] & y=1 \end{tikzcd}$$

b) La fórmula que define el cociente es:

$$\frac{h(x)}{f(x)}=\frac{x-3}{x-1}:(x+1)=\frac{x-3}{(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{x-3}{x^2-1}$$

El denominador no puede ser cero:

$$x^2-1=0 \;\;\to\;\; x=\pm 1$$

Así:

$$D=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$$

c) La fórmula que define a la función compuesta es:

$$(g\circ f)(x)=g[f(x)]=g(x+1)=\sqrt{2(x+1)-4}=\sqrt{2x-2}$$

El radicando no puede ser negativo:

$$2x-2\geq 0$$

Resolviendo la inecuación:

$$D=[1,+\infty)$$

✗ <u>Ejercicio 4</u>:

a) La función es continua en todo punto excepto en $x = 1$ (discontinuidad de salto infinito) y en $x = 3$ (discontinuidad evitable o de agujero). Veamos los valores y las tendencias en esas discontinuidades:

$\boxed{x=1}$ VALOR: si $x=1$ es $y=1$

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si} \quad x\to 1- \quad \text{es} \quad y\to 1 \\ \text{si} \quad x\to 1+ \quad \text{es} \quad y\to +\infty \end{cases}$

$\boxed{x=3}$ VALOR: si $x=1$ es $y=\text{No existe}$

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si} \quad x\to 3- \quad \text{es} \quad y\to 2 \\ \text{si} \quad x\to 3+ \quad \text{es} \quad y\to 2 \end{cases}$

b) En la gráfica observamos las siguientes tendencias en el infinito:

si $x\to -\infty$ es $y\to +\infty$ y si $x\to +\infty$ es $y\to 1$

o lo que es igual:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=+\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to +\infty} f(x)=1$$

c) La curva tiene las siguientes asíntotas:

Horizontales:

$y = 1$ (para $x\to +\infty$)

Verticales:

$x = 1$ (pues aquí tenemos una discontinuidad de salto infinito)

✗ <u>Ejercicio 5</u>:

a) Debemos elegir la fórmula conveniente:

si $x\to -\infty$ es $y=x^2+2x\to +\infty$ pues $(-\infty)^2=+\infty$

si $x\to +\infty$ es $y=-x+3\to -\infty$ pues $-(+\infty)+3=-\infty$

Deducimos de lo anterior que no hay asíntotas horizontales, pues la función no tiende hacia un número.

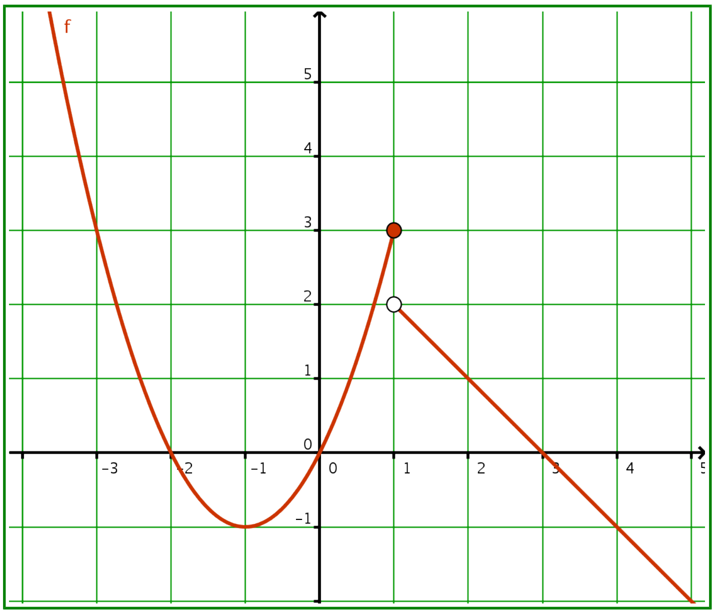
b) La función sólo puede ser discontinua en $x = 1$, que es el punto de conexión de ambas partes.

$\boxed{x=1}$ VALOR: si $x=1$ es $y=3$

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si} \quad x\to 1- \quad \text{es} \quad y=x^2+2x\to 3 \\ \text{si} \quad x\to 1+ \quad \text{es} \quad y=-x+3\to 2 \end{cases}$

Concluimos que hay discontinuidad de salto finito (–1 unidad) para $x = 1$.

c) La gráfica se compondrá de un trozo de parábola (con vértice en $x_V=\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{2}=-1$) para $x\leq 1$, así como de un trozo de recta para $x>1$. Con unas tablas de valores adecuadas:



✗ <u>Ejercicio 6</u>:

a) Usamos la regla de los grados: como el grado del numerador es menor que el del denominador es cero.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{x^2-4x}=0$$

b) Veamos primero $x\to 0$. Sustituimos: $\lim_{x\to 0} f(x)=\left[\frac{0}{0}\right]=¿?$

Simplificamos para evitar la indeterminación: $\frac{2x}{x^2-4x}=\frac{2x}{x\cdot(x-4)}=\frac{2}{x-4}$

Así, tomando ahora límite: $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x-4}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}$

Veamos ahora $x\to 4$. Sustituimos: $\lim_{x\to 4} f(x)=\left[\frac{8}{0}\right]=\pm\infty$

Precisemos el signo con los laterales: $\lim_{x\to 4-} f(x)=\left[\frac{8}{-0}\right]=-\infty$

$$\lim_{x\to 4+} f(x)=\left[\frac{8}{+0}\right]=+\infty$$

c) Para $x=0$ la función no tiene valor (pues el denominador es cero) y tiende hacia 0,5. Así que en este valor tiene una discontinuidad de agujero.

Para $x=4$ la función no tiene valor (pues el denominador es cero) y tiende hacia infinito. Así que en este valor tiene una discontinuidad de salto infinito.

d) Del apartado (a) se deduce que la recta $y=0$ es una asíntota horizontal.

Del apartado (b) se deduce que la recta $x=4$ es una asíntota vertical.