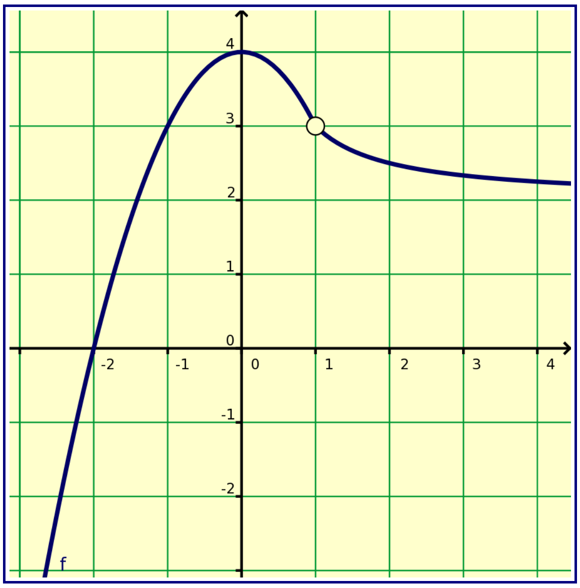
Nombre: ____ ***1º***	
Funciones: conceptos, gráficas y operaciones	

✗ Ejercicio1 [4'5]: La gráfica de la función $y=f(x)$ es la mostrada a continuación. Responde razonadamente a las cuestiones siguientes:



a) Obtén la imagen de $x=0$ y de $x=4$.

b) ¿Cuál es la anti–imagen de $y=3$?

c) ¿Cuál es su dominio?

d) Indica su recorrido.

e) Estudia la monotonía de la función.

f) ¿Cuáles son sus extremos?

g) Señala en qué intervalos es positiva y negativa.

h) ¿Cuál es la tendencia de la función cuando $x\to+\infty$? ¿Y cuando $x\to-\infty$?

i) Estudia la continuidad de f.

✗ Ejercicio 2 [1'5]: Dibuja la gráfica de la función f definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x & si \quad x<2 \\ -x+3 & si \quad x\geq 2 \end{cases}$$

✗ Ejercicio 3 [3]: Considera las funciones siguientes:

$$f(x)=x+1 \quad , \quad g(x)=\sqrt{2x-8} \quad \text{y} \quad h(x)=\frac{x-2}{3x-6}$$

a) Calcula $(f-h)(-1)$ y $(f\circ g)(4)$

b) Halla $\left(\frac{f}{h}\right)(x)$ y su dominio.

c) Obtén $(g\circ f)(x)$ y su dominio.

✗ Ejercicio 4 [1]: Plegando un alambre de x centímetros construimos un cuadrado. Expresa la longitud de su diagonal en función de x .

✗ Ejercicio 1:

a) En la gráfica vemos que si $x \to 0$ se tiene que $P=(x, y) \to (0, 1)$. Así, resulta ser:

$$\text{si } x \to 0 \text{ es } y \to 1$$

o lo que es igual:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

En la gráfica vemos que si $x \to 3$ se tiene que $P=(x, y) \to (3, 2)$. Así, resulta ser:

$$\text{si } x \to 3 \text{ es } y \to 2$$

o lo que es igual:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 2$$

En la gráfica vemos que si $x \to 3$ la función se va al infinito, debiendo distinguir los laterales:

$$\text{si } x \to 2- \text{ es } y \to -\infty \quad \text{y} \quad \text{si } x \to 2+ \text{ es } y \to +\infty$$

o lo que es igual:

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 2+} f(x) = +\infty$$

b) Observamos en la gráfica que la función sólo es discontinua para $x = 2$ (con discontinuidad de salto infinito) y para $x = 3$ (con discontinuidad de agujero o evitable).

c) En la gráfica observamos las siguientes tendencias en el infinito:

$$\text{si } x \to -\infty \text{ es } y \to 2 \quad \text{y} \quad \text{si } x \to +\infty \text{ es } y \to 1$$

o lo que es igual:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

d) La curva tiene las siguientes asíntotas:

Horizontales:

$y = 2$ (para $x \to -\infty$)

$y = 1$ (para $x \to +\infty$)

Verticales:

$x = 2$ (pues aquí tenemos una discontinuidad de salto infinito)

a) Observamos en la gráfica los puntos correspondientes:

$$x=0 \;\to\; y=4$$

$$x=4 \;\to\; y \approx 2{,}25$$

b) Observamos que hay sólo un punto en la gráfica cuya ordenada es 3, así:

$$y=3 \;\leftarrow\; x=-1$$

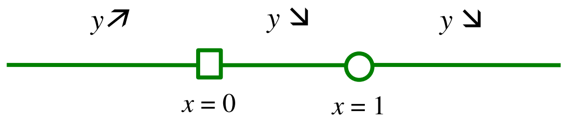
c) El dominio es el conjunto de los valores x para los que existe y. Apreciamos que hay gráfica para todo número real excepto para $x = 1$ (hay un agujero: dicho punto va abierto):

$$D = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

d) El conjunto de imágenes es el formado por todos los valores y que van desde menos infinito hasta $y = 4$ (incluido). Así:

$$R = (-\infty, 4]$$

e) Señalamos en un esquema los intervalos en los que crece y decrece la función representada:

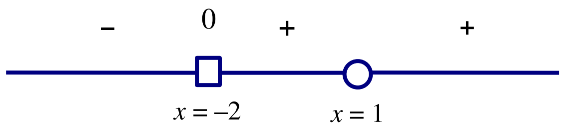


f) Extremos:

Máximo $(0,4)$: es $y = 4$ el valor máximo, que se alcanza para $x = 0$.

Mínimo no hay, pues la función baja hasta $-\infty$.

g) Señalamos en un esquema los ceros y los intervalos de signo de la función:



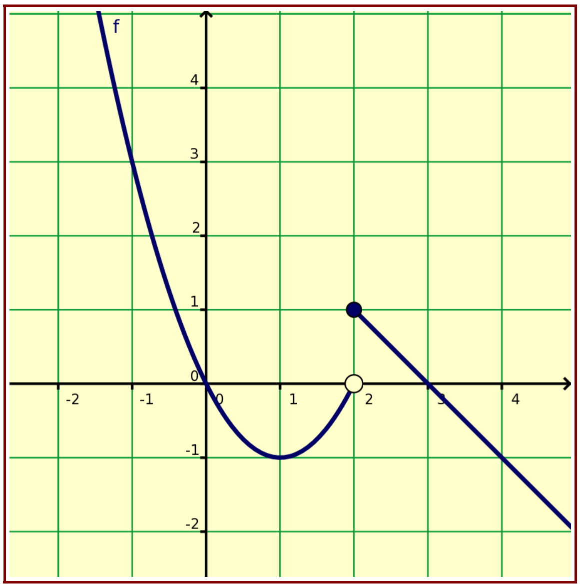
h) Las tendencias de prolongación hacia la izquierda y hacia la derecha son:

$$\text{si } x\to-\infty \text{ es } y\to-\infty \quad \text{y} \quad \text{si } x\to+\infty \text{ es } y\to 2$$

i) La gráfica es continua en todo punto, salvo para $x = 1$, donde presenta una discontinuidad de agujero.

✗ Ejercicio 2:

La gráfica se compondrá de un trozo de parábola (con vértice en $x_V=\frac{-b}{2a}=\frac{2}{2}=1$) para $x<2$, así como de un trozo de recta para $x\geq 2$. Con unas tablas de valores adecuadas:

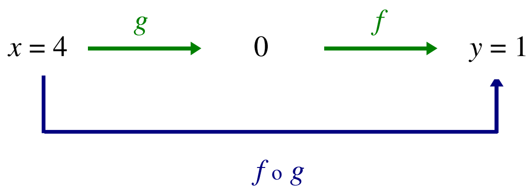


✗ Ejercicio 3:

a) $(f-h)(-1)=f(-1)-h(-1)=0-\frac{-3}{-9}=0-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$

$(f\circ g)(4)=f\left[g(4)\right]=f(0)=0+1=1$

El esquema de esta composición es:



b) La fórmula que define el cociente es:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=(x+1):\frac{x-2}{3x-6}=\frac{(x-1)\cdot(3x-6)}{x-2}=\frac{3x^2-3x-6}{x-2}$$

El denominador no puede ser cero:

$$x-2=0 \;\rightarrow\; x=2$$

Así:

$$D=\mathbb{R}-\{2\}$$

c) La fórmula que define a la función compuesta es:

$$(g\circ f)(x)=g[f(x)]=g(x+1)=\sqrt{2(x+1)-8}=\sqrt{2x-6}$$

El radicando no puede ser negativo:

$$2x-6\geq 0$$

Resolviendo la inecuación:

$$D=[3,+\infty)$$

✗ Ejercicio 4:

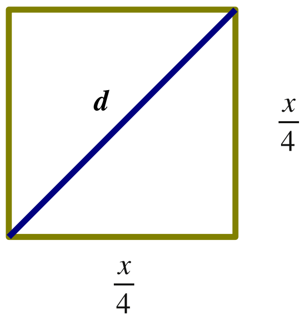
El perímetro del cuadrado será

$$p=x$$

Como el cuadrado tiene cuatro lados con igual longitud, cada lado medirá

$$l=\frac{x}{4}$$

Ahora, tenemos:



Por el Teorema de Pitágoras:

$$d=\sqrt{\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{x}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{2x^2}{16}}=\frac{\sqrt{2}\,x}{4}$$