***Nombre***:____________________________________________________________ ***Curso***:_____

*Mates Aplicadas I a las CCSS – 02/09/2014*

EJERCICIO 1:

a) [0,75] ¿A qué numero debemos elevar 5 para obtener 10? Redondea el resultado hasta las milésimas.

b) [1,25] Estudia el signo de la fracción $f = \dfrac{x-3}{x+1}$ según los valores de $x$ . ¿Cuándo es $f > 0$?

EJERCICIO 2: Considera el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} x^2 - 4x - y = 0 \\ -2x + y + 5 = 0 \end{cases}$$

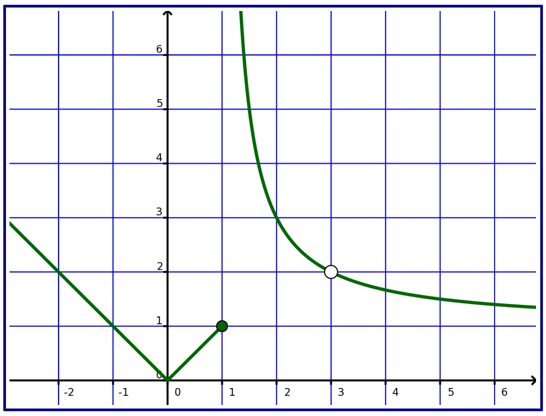
a) [1] Resuelve algebraicamente ese sistema.

b) [1] Dibuja en unos ejes de coordenadas las gráficas las gráficas de cada una de las ecuaciones. ¿Cómo pueden interpretarse en esa gráfica las soluciones del sistema?

EJERCICIO 3: En las funciones siguientes, estudia su continuidad -indicando valor y tendencias en las discontinuidades- así como la existencia de asíntotas.

a) [1] La función $f$ viene definida por $f(x) = \dfrac{2x+4}{x-5}$.

b) [1] La función $g$ tiene la siguiente gráfica:




EJERCICIO 4: En un polideportivo el 50% de los abonados practica fútbol y el 25% baloncesto. También se sabe que el 15% practica ambos deportes.

a) [0,5] ¿Son independientes los sucesos “practicar fútbol” y “jugar al baloncesto”?

b) [0,75] Calcule la probabilidad de que un individuo practique alguno de los dos.

c) [0,75] Halla la probabilidad de que un individuo juegue al fútbol sabiendo que no practica baloncesto.

EJERCICIO 5: El coeficiente intelectual (CI) en una población se distribuye siguiendo una ley normal de media 75 puntos y una desviación típica de 20 puntos.

a) [1] ¿Qué porcentaje de la población tiene un CI superior a los 80 puntos?

b) [1] En una muestra de 120 individuos, ¿cuántos esperamos que tengan un CI inferior a los 85 puntos?

EJERCICIO 1: D

a) Primero calculemos la base. Recordemos que el perímetro es la suma de las longitudes de los lados:

2.5

$b$

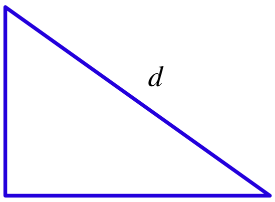
$$p = 12$$
$$\downarrow$$
$$2 \cdot b + 2 \cdot 2{,}5 = 12$$
$$\downarrow$$
$$2b = 7$$
$$\downarrow$$
$$b = 3{,}5$$

Ahora calculamos la superficie:

$$S = b \cdot h = 3.5 \cdot 2.5 = 8.75 \text{ cm}^2$$

Observemos que se trata de un número racional cuya expresión decimal es exacta.

b) Si trazamos una diagonal, aparece un triángulo rectángulo. Por el Teorema de Pitágoras:



$d$

2.5

3.5

$$d^2 = 3{,}5^2 + 2{,}5^2$$
$$\downarrow$$
$$d^2 = 12{,}25 + 6,25$$
$$\downarrow$$
$$d^2 = 18,5$$
$$\downarrow$$
$$d = \sqrt{18{,}5}$$

La diagonal mide $\sqrt{18.5}$ cm

c) $\sqrt{18.5} = 4.30116263352\ldots$

$\sqrt{18.5} \approx 4.302$

$\epsilon = 4.302 - \sqrt{18.5} = 0.00083736647868\ldots$ El error es inferior a una milésima.

EJERCICIO 1:

a) Sea $x$ ese número: $3^x = 10 \;\rightarrow\; x = \dfrac{\log 10}{\log 3} = 2.09590327\ldots \approx 2.096$

b) Con la calculadora: $\dfrac{2.5 \cdot 10^{24} + 3.25 \cdot 10^{25}}{4.25 \cdot 10^{-6} - 5 \cdot 10^{-5}} = -7.65 \cdot 10^{29}$

EJERCICIO 2:

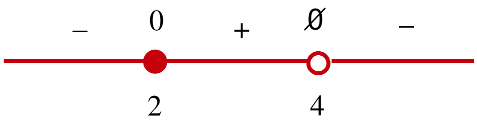
Estudiamos el signo de

$$f = \frac{3x - 6}{4 - x}$$

Obtengamos los ceros:

- Veamos cuándo es cero el numerador: $3x - 6 = 0 \rightarrow x = 2$
- Veamos cuándo lo es el denominador: $4 - x = 0 \rightarrow x = 4$

Intervalos de signo:




Concluimos que es $f < 0$ cuando $x$ está en:

$$(-\infty\,,2) \cup (4\,,+\infty)$$

EJERCICIO 1:

a) Vamos a resolver por igualación el sistema. Para ello despejamos la $y$ también en la 2ª ecuación:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x \\ x - y = 2 \;\rightarrow\; -y = 2 - x \rightarrow\; y = -2 + x \end{cases}$$

Ahora igualando ambos:

$$x^2 + 2x = -2 + x$$

Simplificamos y aplicamos la fórmula de la ecuación de 2º grado:

$$x^2 + x + 2 = 0\,, \rightarrow\; x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2} = \text{NO}$$

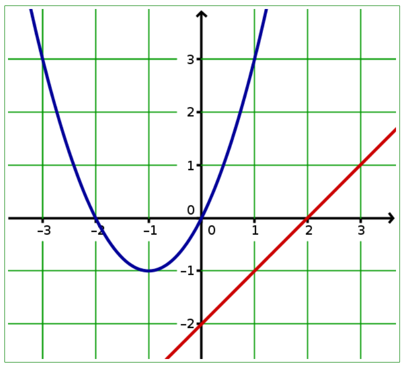
Observemos que el sistema no tiene solución.

b) La ecuación $y = x^2 + 2x$ se representará como una parábola. Su vértice estará en $x_V = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2}{2} = -1$.

La segunda ecuación $y = -2 + x$ se trata de una recta.

Con un par de tablas de valores obtenemos la gráfica.

Observemos que la parábola y la recta no se interceptan, no hay punto de corte: por eso el sistema no tiene solución.




EJERCICIO 2:

Sea $x$ ese número. Así, su triple será $3x$ y la raíz de su doble $\sqrt{2x}$.

La ecuación que nos permitirá obtener $x$ será:

$$\underbrace{3x - \sqrt{2x}}_{\text{su triple menos la raíz de su doble}} \quad \underbrace{=}_{\text{es}} \; \underbrace{4}_{\text{cuatro}}$$

Para resolver, primero aislamos la raíz:

$$3x - 4 = \sqrt{2x}$$

Elevamos al cuadrado y desarrollamos:

$$(3x-4)^2 = \left(\sqrt{2x}\right)^2 \rightarrow 9x^2 + 16 - 24x = 2x$$

Agrupamos y resolvemos:

$$9x^2 - 26x + 16 = 0 \rightarrow \left| \begin{array}{l} x = 2 \\ \\ x = \dfrac{8}{9} \end{array} \right.$$

Al elevar al cuadrado ambos miembros obtenemos una ecuación que puede tener más soluciones que la propuesta (no tienen por qué ser equivalentes). Es preciso comprobarlas:

$$x = 2 \rightarrow 6 - \sqrt{4} = 4 \rightarrow 6 - 2 = 4 \rightarrow \text{SI}$$
$$x = \frac{8}{9} \rightarrow 3 \cdot \frac{8}{9} - \sqrt{2 \cdot \frac{8}{9}} = 4 \rightarrow \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = 4 \rightarrow \text{NO}$$

El número buscado es el $2$.

EJERCICIO 1:

$$T = -5 + 6t - t^2 \quad , \quad 0 \leq t \leq 4$$

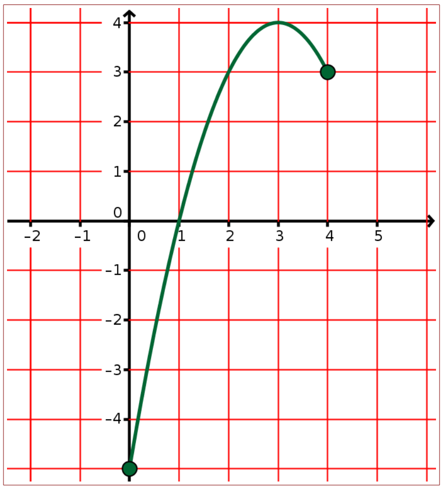
a) Hacemos $t = 0 \ \rightarrow \ T = -5$: al inicio del experimento la temperatura es de cinco grados bajo cero.

Haciendo $t = 4 \ \rightarrow \ T = 3$ : al final de la experiencia la temperatura es de tres grados.

b) Hacemos $T = 0 \rightarrow -t^2 + 6t - 5 = 0 \rightarrow t = 1\,,\, t = 5$

Como sólo dura cuatro horas, tenemos que la temperatura es de cero grados sólo a la hora del inicio.

c) La gráfica será un trozo de parábola con vértice para $t = 2.5$. Con una tabla de valores conseguimos:




d) Apreciamos que la temperatura aumenta desde el inicio hasta las 3 horas y disminuye desde ese momento hasta el final.

e) La temperatura máxima es 4 ºC y se alcanza a las 2 horas (vértice de la gráfica) .

La temperatura mínima es de -5ºC y se alcanza al principio del experimento (origen de coordenadas).

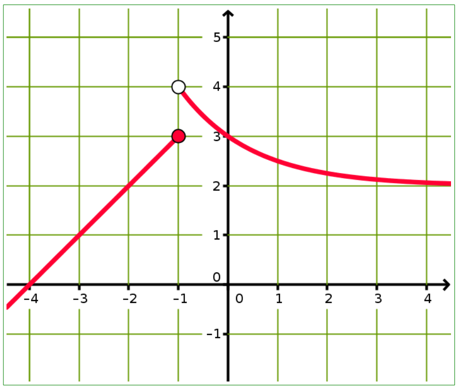
f) Observamos que la temperatura está bajo cero durante la primera hora y desde ese momento hasta el final está por encima de los cero grados

g) La siguiente tabla resume la variación de la función:

| $t$ | 0 | | 3 | | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $T$ | –5 | ↗ | 4 | ↘ | 3 |

EJERCICIO 2:

a) La gráfica se compone de un trozo de recta y de un trozo de curva exponencial. Con unas tablas:




b) La gráfica es continua en todo punto excepto para $x = -1$, donde presenta una discontinuidad de salto finito (salto de una unidad).

c) Cuando prolongamos hacia la derecha, observemos que $y$ se aproxima cada vez más a 2 ($y = 2$ es una asíntota horizontal para la curva). Así.

$$\text{si } x \rightarrow +\infty \text{ es } y \rightarrow 2$$

Cuando nos movemos hacia la izquierda observemos que $y$ toma valores cada vez más pequeños (línea recta). Así

$$\text{si } x \rightarrow -\infty \text{ es } y \rightarrow -\infty$$

EJERCICIO 1:

a) Observamos en la gráfica que la función sólo es discontinua para $x = -1$ (con discontinuidad de salto infinito) y para $x = 0$ (con discontinuidad de agujero o evitable):

$\boxed{x=-1}$ VALOR: si $x = -1$ es $y = 2$

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si } x \to -1_- \text{ es } y \to +\infty \\ \text{si } x \to -1_+ \text{ es } y \to 2 \end{cases}$

Por eso hay discontinuidad de salto infinito para $x = -1$.

$\boxed{x=0}$ VALOR: si $x = 0$ es $y = 0$

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si } x \to 0_- \text{ es } y \to 1 \\ \text{si } x \to 0_+ \text{ es } y \to 1 \end{cases}$

Concluimos que hay discontinuidad de agujero para $x = 0$.

b) En la gráfica observamos las siguientes tendencias en el infinito:

$$\text{si } x \to -\infty \text{ es } y \to 2 \quad , \quad \text{si } x \to +\infty \text{ es } y \to -\infty$$

o lo que es igual:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2 \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

c) La curva tiene las siguientes asíntotas:

Horizontales:

$y = 2$ ( para $x \to -\infty$ )

Verticales:

$x = -1$ (pues aquí tenemos una discontinuidad de salto infinito)

EJERCICIO 2:

a) Debemos elegir la fórmula conveniente:

si $x \to -\infty$ es $y = x^2 - 3 \to +\infty$ $\quad [\ (-\infty)^2 = +\infty\ ]$

si $x \to +\infty$ es $y = -2x + 5 \to -\infty$ $\quad [\ -2(+\infty) = -\infty\ ]$

b) La función sólo puede ser discontinua en $x = 1$ [separa-fórmulas].

$\boxed{x=1}$ VALOR: si $x = 1$ es $y = 3$

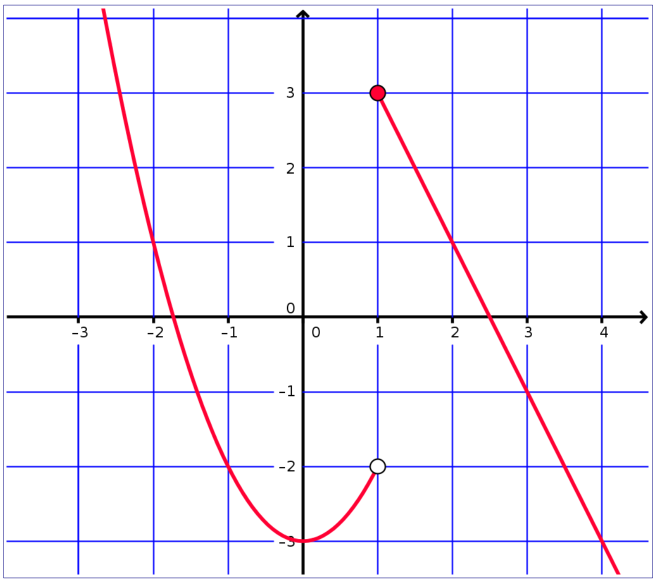
TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si } x \to 1_- \text{ es } y \to -2 \\ \text{si } x \to 1_+ \text{ es } y \to 3 \end{cases}$

Concluimos que hay discontinuidad de salto finito ($s = 5$) para $x = 1$.

c) Del apartado (a) se deduce que no hay asíntota horizontal [no se tiende a un número]

Del apartado (b) se deduce que o hay asíntota vertical [no hay salto infinito]

d) La gráfica se compondrá de un trozo de parábola $(x < 1)$ y de recta $(x \geq 1)$ . Con un par de tabla de valores:




EJERCICIO 3:

a) Aplicamos la regla de los grados; como el grado del numerador es menor que el y del denominador:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{6x+18}{x^2+3x} = 0$$

b) La función sólo puede ser discontinua en los ceros del denominador:

$$x^2 + 3x = 0 \ \rightarrow \ x \cdot (x+3) = 0 \ \rightarrow \ x = 0 \, , x = -3$$

Veamos en estos dos puntos:

$\boxed{x=0}$ VALOR: si $x = 0$ es $y =$ no existe

TENDENCIAS: $\lim_{x \to 0} \frac{6x+18}{x^2+3x} = \left[\frac{18}{0}\right] = \pm\infty$

Concluimos que hay discontinuidad de agujero para $x = 0$.

$\boxed{x=-3}$ VALOR: si $x = -3$ es $y =$ no existe

TENDENCIAS $\lim_{x \to -3} \frac{6x+18}{x^2+3x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to -3} \frac{6\cancel{(x+3)}}{x\cancel{(x+3)}} = \frac{6}{-3} = -2$

Concluimos que hay discontinuidad de salto infinito para $x = -3$.

c) Del apartado (a) se deduce que la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

Del apartado (b) se deduce que la recta $x = -3$ es una asíntota vertical.

EJERCICIO 2:

a) El espacio muestral está formada por las parejas siguientes:

$$E = \left\{ \begin{array}{ccc} 1-3 & 1-4 & 1-5 \\ 2-3 & 2-4 & 2-5 \\ 3-3 & 3-4 & 3-5 \\ 4-3 & 4-4 & 4-5 \end{array} \right\}$$

b) Veamos antes los sucesos y apliquemos la Regla de Laplace:

$$A = \left\{ \begin{array}{ccc} & & 1-5 \\ & 2-4 & 2-5 \\ 3-3 & 3-4 & 3-5 \\ 4-3 & 4-4 & 4-5 \end{array} \right\} \to \mathrm{p}\,(A) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \quad B = \left\{ \begin{array}{ccc} 1-3 & 1-4 & 1-5 \\ 2-3 & 2-4 & 2-5 \\ & 3-4 & 3-5 \\ & & 4-5 \end{array} \right\} \to \mathrm{p}\,(B) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

c) La intersección es:

$$A \cap B = \{1-5\,, 2-4\,, 2-5\,, 3-4\,, 3-5\,, 4-5\}$$

Veamos si $A$ y $B$ son independientes:

$$\left. \begin{array}{r} p(A \cap B) = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2} \\ p(A) \cdot p(B) = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{16} \end{array} \right\} \to p(A \cap B) \neq p(A) \cdot p(B) \to \text{ Son dependientes}$$

d) Es fácil comprobar, recordando que la intersección está formada por los repetidos, que:

$$A \cap \overline{B} = \{3-3\,, 4-3\,, 4-4\} \to p(A \cap \overline{B}) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

EJERCICIO 3:

Llamemos $B$ = "practicar baloncesto" y $F$ = "jugar al fútbol". Es:

$$p(F) = 0.65 \quad , \quad p(B) = 0.30 \quad , \quad p(F \cup B) = 0.75$$

a) Usamos la fórmula de la probabilidad de la unión para calcular la de la intersección (ambos):

$$p(F \cap B) = p(F) + p(B) - p(F \cup B) = 0.65 + 0.30 - 0.75 = 0.20 \to 20\%$$

Para las demás cuestiones organicemos todas las probabilidades en una tabla:

| | $F$ | $\overline{F}$ | |
|---|---|---|---|
| $B$ | 0,20 | 0,10 | 0,30 |
| $\overline{B}$ | 0,45 | 0,25 | 0,70 |
| | 0,65 | 0,35 | 1 |

b) Basta mirar en la tabla para hallar la probabilidad de que no juegue a ninguno de los dos:

$$p(\overline{F} \cap \overline{B}) = 0.25 \to 25\%$$

c) Si juega al fútbol y no al baloncesto:

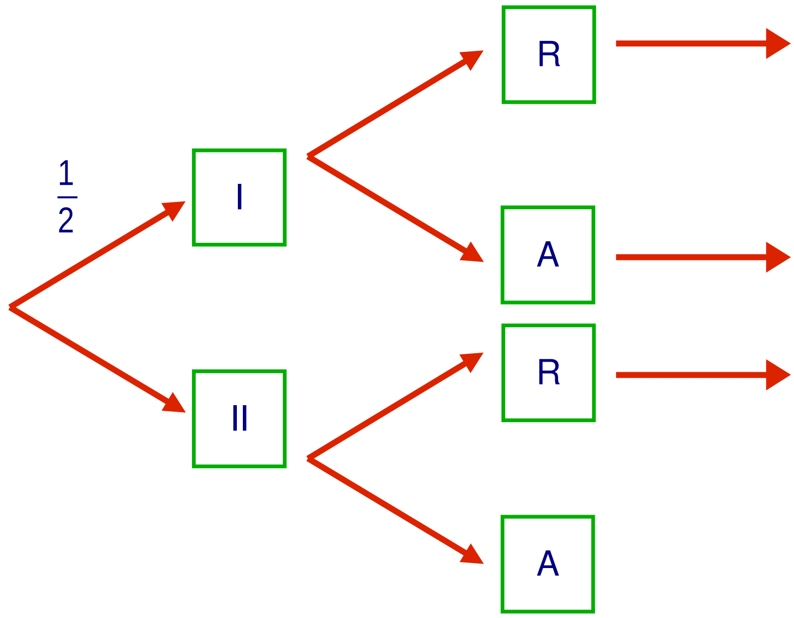
$$p(\overline{F} \cap \overline{B}) = 0.25$$

d) Si juega sólo a uno de los dos será “F sí y B no” o “F no y B sí”:

$$p(\text{"juega sólo a uno de los dos"}) = p(F \cap \overline{B}) + p(\overline{F} \cap B) = 0.10 + 0.45 = 0.55 \to 55\%$$

EJERCICIO 4:

El diagrama de árbol nos muestra esquemáticamente la estructura de la prueba:




a) Por el Teorema de la Probabilidad Total:

$$p(R) = \frac{5}{16} + \frac{2}{5} = \frac{57}{80}$$

b) Es una probabilidad condicionada:

$$p(II/A) = \frac{p(II \cap A)}{p(A)} = \frac{1/10}{1 - 57/80} = \frac{1/10}{23/80} = \frac{8}{23}$$

EJERCICIO 5:

La variable **X** = "consumo mensual en combustible" es normal con $\left\{ \begin{array}{lcr} \mu & = & 200 \\ \sigma & = & 15 \end{array} \right.$

a) La probabilidad pedida es:

$$\text{p}\,(x > 220) \overset{(*)}{=} \text{p}\,(z > 1.33) = 1 - 0.9082 = 0.0918$$

$$(*)\ z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{220 - 200}{15} \approx 1.33$$

b) $\text{p}\,(x \leq 240) \overset{(*)}{=} \text{p}\,(z \leq 2.67) = 0.9962$

$$(*)\ z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{240 - 200}{15} \approx 2.67$$

$$E = 36 \cdot 0.9962 = 35.8632 \approx 36 \text{ meses}$$