Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas Aplicadas I – Recuperación Funciones – 02/04/2014	

EJERCICIO 1: [3,5]

En un experimento que dura cinco horas se estudia la temperatura de un objeto. Ésta varía en función del tiempo transcurrido desde el inicio de la experiencia según la fórmula

$$T = t^2 - 4t + 3 \quad , \quad 0 \leq t \leq 5$$

donde el tiempo (t) está medido en horas y la temperatura (T) en grados centígrados.

a) ¿Cuál es la temperatura al inicio del experimento? ¿Y al final?

b) ¿En qué instante el cuerpo se halla a cero grados?

c) Dibuja la gráfica tiempo – Temperatura.

d) ¿En qué período de tiempo aumenta la temperatura del objeto? ¿En cuál disminuye?

e) Señala las temperatura máxima y mínima alcanzadas.

f) Indica cuándo la temperatura está bajo cero y cuándo por encima.

g) Construye un esquema de variación de la función.

EJERCICIO 2: [2,5]

Considera la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2^x + 1 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ -x + 3 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Dibuja su gráfica.

b) Estudia su continuidad.

c) ¿Cuál es la tendencia de la función cuando $x \to -\infty$? ¿Y cuando $x \to +\infty$?

EJERCICIO 3: [3]

Considera las funciones siguientes:

$$f(x) = x - 3 \quad , \quad g(x) = \sqrt{2x+2} \quad , \quad h(x) = \frac{4x-4}{x+2}$$

a) Calcula los dominios de esas funciones.

b) Calcula $(f - h)(1)$ y $(f \circ g)(1)$.

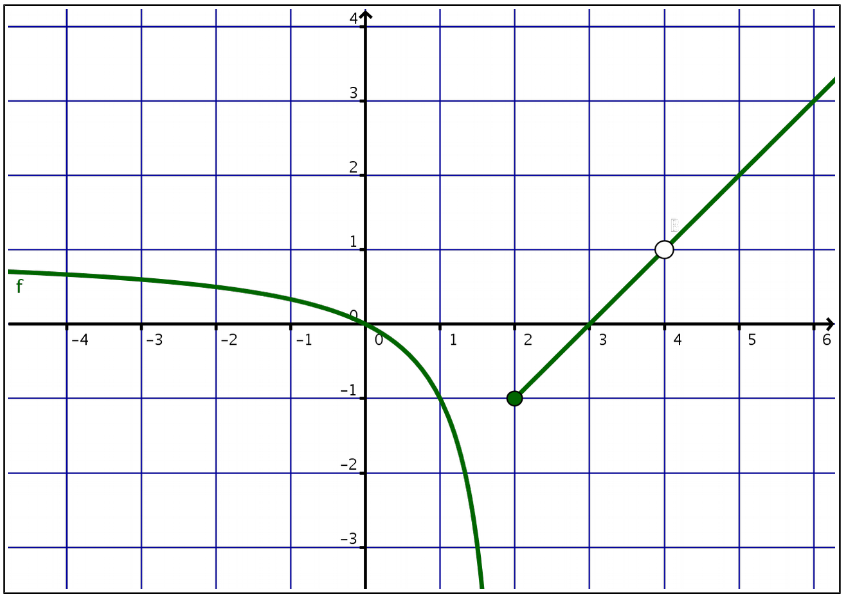
c) Halla las expresiones $\left(\frac{h}{f}\right)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

EJERCICIO 4: [1]

Considera un rectángulo de área 10 cm². Expresa su altura (h) y su diagonal (d) en función de su base (x).

EJERCICIO 5:

La gráfica de la función $y = f(x)$ es la mostrada a continuación:



a) [1,5] Estudia la continuidad de la función, señalando valor y tendencias en las discontinuidades.

b) [0,5] Indica las tendencias de $f(x)$ para $x \to -\infty$ y para $x \to +\infty$.

c) [1] ¿Qué asíntotas tiene la curva?

EJERCICIO 6:

Considera la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2 - 2x & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$$

a) [0,5] Calcula las tendencias de $f(x)$ para $x \to -\infty$ y para $x \to +\infty$.

b) [1,5] Estudia algebraicamente la continuidad.

c) [0,5] ¿Qué asíntotas tiene la gráfica de la función?

d) [1] Dibuja su gráfica.

EJERCICIO 7:

Considera la función f definida por:

$$f(x) = \frac{4x-8}{x^2-2x}$$

a) [0,5] Calcula los límites de $f(x)$ para $x \to \pm\infty$.

b) [2] Estudia algebraicamente la continuidad.

c) [1] ¿Qué asíntotas tiene la gráfica de la función?

EJERCICIO 1:

$$T = t^2 - 4t + 3 \quad , \quad 0 \leq t \leq 5$$

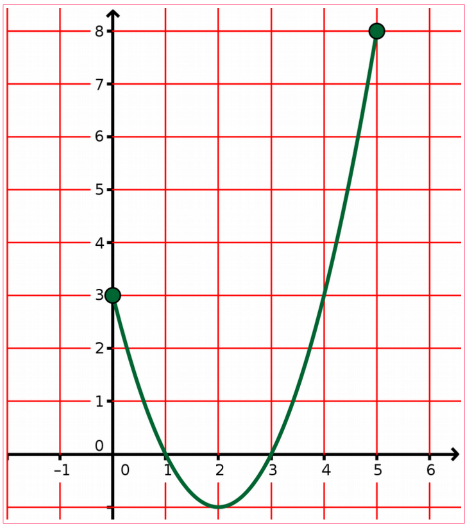
a) Hacemos $t = 0 \;\rightarrow\; T = +3$: al inicio del experimento la temperatura es de tres grados.

Haciendo $t = 5 \;\rightarrow\; T = 8$: al final de la experiencia la temperatura es de ocho grados.

b) Hacemos$T = 0 \rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \rightarrow t = 1\,,\, t = 3$

Tenemos que la temperatura es de cero grados a la hora y a las tres horas del inicio.

c) La gráfica será un trozo de parábola con vértice para $t = 2$. Con una tabla de valores conseguimos:



d) Apreciamos que la temperatura disminuye desde el inicio hasta las 2 horas y aumenta desde ese momento hasta el final.

e) La temperatura máxima es 8 ºC y se alcanza a las 5 horas (al final).

La temperatura mínima es de -1ºC y se alcanza a las 2 horas del principio del experimento (vértice).

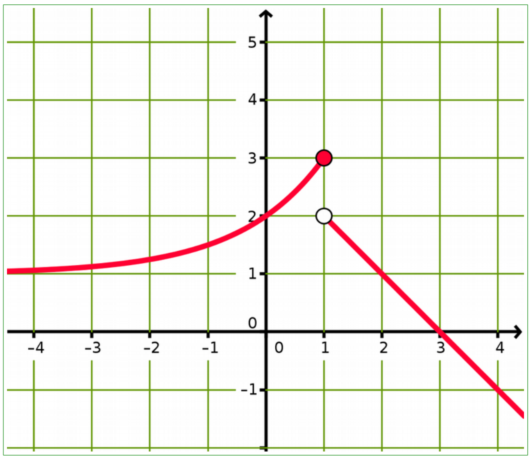
f) Observamos que la temperatura está bajo cero desde la hora 1 hasta las 3 horas y sobre cero desde el inicio hasta la hora 1 y desde las 3 horas hasta el final.

g) La siguiente tabla resume la variación de la función:

t	0		2		5
T	3	↘	–5	↗	8

EJERCICIO 2:

a) La gráfica se compone de un trozo de recta y de un trozo de curva exponencial. Con unas tablas:



b) La gráfica es continua en todo punto excepto para $x = 1$, donde presenta una discontinuidad de salto finito (salto de una unidad).

c) Cuando prolongamos hacia la izquierda, observemos que y se aproxima cada vez más a 1 ($y = 1$ es una asíntota horizontal para la curva): si $x \rightarrow -\infty$ es $y \rightarrow 1$

Cuando nos movemos hacia la derecha observemos que y toma valores cada vez más pequeños (línea recta): si $x \rightarrow +\infty$ es $y \rightarrow -\infty$

EJERCICIO 3:

$$f(x) = x - 3 \quad , \quad g(x) = \sqrt{2x+2} \quad , \quad h(x) = \frac{4x-4}{x+2}$$

a) Dominio de f: es fácil observar que $x - 3$ existe para cualquier número x. Así:

$$\mathbb{D}(f) = \mathbb{R}$$

Dominio de g: para que su fórmula exista, debe ser

$$2x + 2 \geq 0 \ \rightarrow \ 2x \geq -2 \ \rightarrow \ x \geq -1$$

Así:

$$\mathbb{D}(g) = [-1\,, +\infty)$$

Dominio de h: el denominador no puede ser cero.

$$x + 2 = 0 \ \rightarrow \ x = -2$$

Así:

$$\mathbb{D}(h) = \mathbb{R} - \{-2\}$$

b) $(f - h)(1) = -2 - 0 = -2$

$(f \circ g)(1) = f\,[g(1)] = f(2) = 2 - 3 = -1$

El esquema de esta composición es:

$$\begin{tikzcd} x=1 \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & 2 \arrow[r, "f"] & y=-1 \end{tikzcd}$$

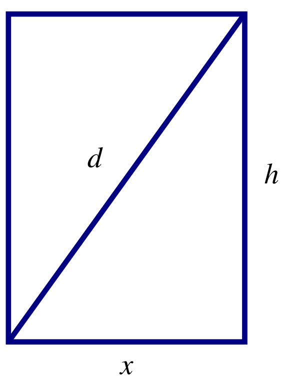
c) El cociente:

$$\left(\frac{h}{f}\right)(x) = \frac{4x-4}{x+2} : \frac{x-3}{1} = \frac{4x-4}{(x+2)(x-3)}$$

La composición:

$$(g \circ f)(x) = g(x-3) = \sqrt{2(x-3)+2} = \sqrt{2x-4}$$

EJERCICIO 4: e



Tenemos:

$$A = 10 \ \rightarrow \ x \cdot h = 10 \ \rightarrow \ h = \frac{10}{x}$$

Al trazar la diagonal aparece un triángulo rectángulo en el que aplicamos el Teorema de Pitágoras.

La diagonal del rectángulo es la hipotenusa:

$$d = \sqrt{x^2 + \left(\frac{10}{x}\right)^2}$$

EJERCICIO 5:

a) Observamos en la gráfica que la función sólo es discontinua para $x = 2$ (con discontinuidad de salto infinito) y para $x = 4$ (con discontinuidad de agujero o evitable):

$\boxed{x=2}$ VALOR: si $x = 2$ es $y = -1$

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si } x \to 2_- \text{ es } y \to -\infty \\ \text{si } x \to 2_+ \text{ es } y \to -1 \end{cases}$

Por eso hay discontinuidad de salto infinito para $x = 2$.

$\boxed{x=4}$ VALOR: si $x = 4$ es $y =$ no existe

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si } x \to 4_- \text{ es } y \to -1 \\ \text{si } x \to 4_+ \text{ es } y \to -1 \end{cases}$

Concluimos que hay discontinuidad de agujero para $x = 4$.

b) En la gráfica observamos las siguientes tendencias en el infinito:

$$\text{si } x \to -\infty \text{ es } y \to 1 \quad , \quad \text{si } x \to +\infty \text{ es } y \to +\infty$$

o lo que es igual:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1 \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

c) La curva tiene las siguientes asíntotas:

Horizontales:

$y = 1$ (para $x \to -\infty$)

Verticales:

$x = 2$ (pues aquí tenemos una discontinuidad de salto infinito)

EJERCICIO 6:

a) Debemos elegir la fórmula conveniente:

si $x \to -\infty$ es $y = 2x + 2 \to -\infty$ $[\, 2(-\infty) = -\infty \,]$

si $x \to +\infty$ es $y = x^2 - 2x \to +\infty$ $[\, (+\infty)^2 = +\infty \,]$

b) La función sólo puede ser discontinua en $x = -1$ [separa-fórmulas].

$\boxed{x=-1}$ VALOR: si $x = -1$ es $y = 3$

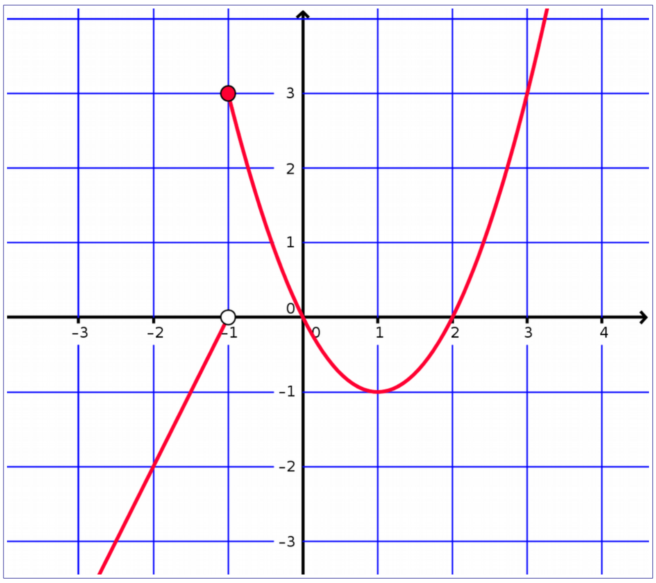
TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si } x \to -1_- \text{ es } y \to 0 \\ \text{si } x \to -1_+ \text{ es } y \to 3 \end{cases}$

Concluimos que hay discontinuidad de salto finito ($s = 3$) para $x = -1$.

c) Del apartado (a) se deduce que no hay asíntota horizontal [no se tiende a un número]

Del apartado (b) se deduce que o hay asíntota vertical [no hay salto infinito]

d) La gráfica se compondrá de un trozo de parábola $(x \geq -1)$ y de recta $(x < 1)$. Con un par de tabla de valores:



EJERCICIO 7:

a) Aplicamos la regla de los grados; como el grado del numerador es menor que el y del denominador:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{4x-8}{x^2-2x} = 0$$

b) La función sólo puede ser discontinua en los ceros del denominador:

$$x^2 - 2x = 0 \ \rightarrow \ x \cdot (x-2) = 0 \ \rightarrow \ x = 0\,, x = 2$$

Veamos en estos dos puntos:

$\boxed{x=0}$ VALOR: si $x = 0$ es $y =$ no existe

TENDENCIAS: $\lim_{x \to 0} \frac{4x-8}{x^2-2x} = \left[\frac{-8}{0}\right] = \pm\infty$

Concluimos que hay discontinuidad de salto infinito para $x = 0$.

$\boxed{x=2}$ VALOR: si $x = 2$ es $y =$ no existe

TENDENCIAS $\lim_{x \to 2} \frac{4x-8}{x^2-2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 2} \frac{4\cancel{(x-2)}}{x\cancel{(x-3)}} = \frac{4}{2} = 2$

Concluimos que hay discontinuidad de agujero para $x = 2$.

c) Del apartado (a) se deduce que la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

Del apartado (b) se deduce que la recta $x = 0$ es una asíntota vertical.