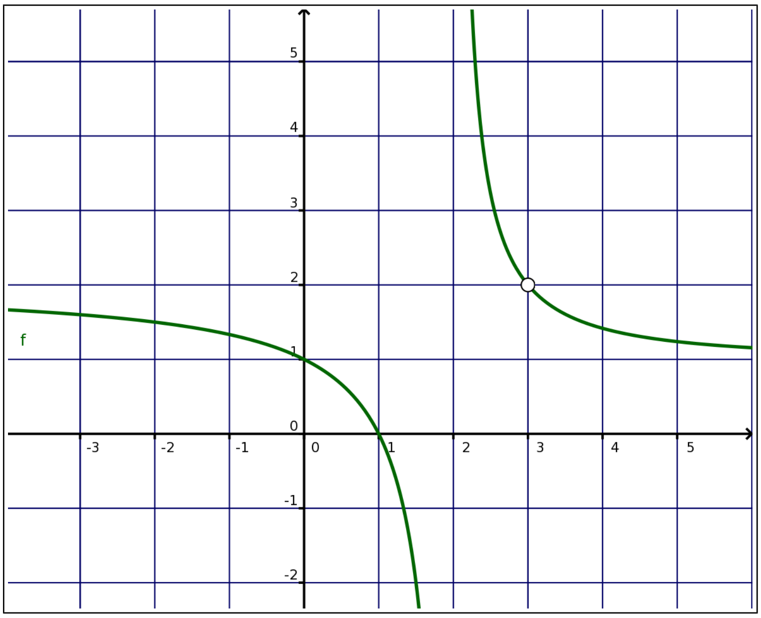
Nombre:____ *Curso*:_____

Matemáticas Aplicadas I – Límites y continuidad de funciones – 27/02/2014

EJERCICIO 1:

La gráfica de la función $y = f(x)$ es la mostrada a continuación:



a) [1,5] Estudia la continuidad de la función, señalando valor y tendencias en las discontinuidades.

b) [0,5] Indica las tendencias de $f(x)$ para $x \to -\infty$ y para $x \to +\infty$.

c) [1] ¿Qué asíntotas tiene la curva?

EJERCICIO 2:

Considera la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 2 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ x^2 - 2x & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$

a) [0,5] Calcula las tendencias de $f(x)$ para $x \to -\infty$ y para $x \to +\infty$.

b) [1,5] Estudia algebraicamente la continuidad.

c) [0,5] ¿Qué asíntotas tiene la gráfica de la función?

d) [1] Dibuja su gráfica.

EJERCICIO 3:

Considera la función f derfinida por:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x}{x^2 - 4}$$

a) [0,5] Calcula los límites de $f(x)$ para $x \to \pm\infty$.

b) [2] Estudia algebraicamente la continuidad.

c) [1] ¿Qué asíntotas tiene la gráfica de la función?

EJERCICIO 1:

a) Observamos en la gráfica que la función sólo es discontinua para $x = 2$ (con discontinuidad de salto infinito) y para $x = 3$ (con discontinuidad de agujero o evitable):

$\boxed{x=2}$ VALOR: si $x = 2$ es $y =$ no existe

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si } x \to 2_- \text{ es } y \to -\infty \\ \text{si } x \to 2_+ \text{ es } y \to +\infty \end{cases}$

Por eso hay discontinuidad de salto infinito para $x = 2$.

$\boxed{x=3}$ VALOR: si $x = 3$ es $y =$ no existe

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si } x \to 3_- \text{ es } y \to 2 \\ \text{si } x \to 3_+ \text{ es } y \to 2 \end{cases}$

Concluimos que hay discontinuidad de agujero para $x = 3$.

b) En la gráfica observamos las siguientes tendencias en el infinito:

$$\text{si } x \to -\infty \text{ es } y \to 2 \quad , \quad \text{si } x \to +\infty \text{ es } y \to 1$$

o lo que es igual:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2 \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

c) La curva tiene las siguientes asíntotas:

Horizontales:

$y = 2$ (para $x \to -\infty$)

$y = 1$ (para $x \to +\infty$)

Verticales:

$x = 2$ (pues aquí tenemos una discontinuidad de salto infinito)

EJERCICIO 2:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 2 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ x^2 - 2x & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$

a) Debemos elegir la fórmula conveniente:

si $x \to -\infty$ es $y = -2x + 2 \to +\infty$ $\quad [\, -2 \cdot (-\infty) = +\infty \,]$

si $x \to +\infty$ es $y = x^2 - 2x \to +\infty$ $\quad [\, (-\infty)^2 = +\infty \,]$

b) La función sólo puede ser discontinua en $x = -1$ [separa-fórmulas].

$\boxed{x=-1}$ VALOR: si $x = -1$ es $y = 4$

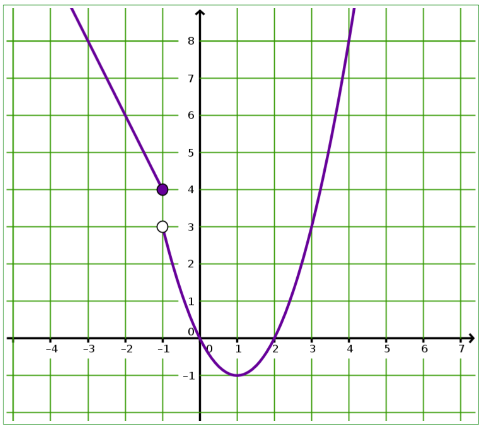
TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si } x \to -1_- \text{ es } y \to 4 \\ \text{si } x \to -1_+ \text{ es } y \to 3 \end{cases}$

Concluimos que hay discontinuidad de salto finito ($s = -1$) para $x = -1$.

c) Del apartado (a) se deduce que no hay asíntota horizontal [no se tiende a un número]

Del apartado (b) se deduce que o hay asíntota vertical [no hay salto infinito]

d) La gráfica se compondrá de un trozo de recta ($x \leq -1$) y de parábola ($x > -1$) . Con un par de tabla de valores:



EJERCICIO 3:

a) Aplicamos la regla de los grados; como el grado del numerador y del denominador es el mismo:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 - 4x}{x^2 - 4} = \frac{2}{1} = 2$$

b) La función sólo puede ser discontinua en los ceros del denominador:

$$x^2 - 4 = 0 \ \to \ x^2 = 4 \ \to \ x = \pm 2$$

Veamos en estos dos puntos:

$\boxed{x = -2}$ VALOR: si $x = -2$ es $y =$ no existe

TENDENCIAS: $\lim_{x \to -2} \frac{2x^2 - 4x}{x^2 - 4} = \left[\frac{16}{0}\right] = \pm\infty$

Concluimos que hay discontinuidad de salto infinito para $x = -2$.

$\boxed{x = 2}$ VALOR: si $x = 2$ es $y =$ no existe

TENDENCIAS $\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 4x}{x^2 - 4} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 2} \frac{2x\cancel{(x-2)}}{(x+2)\cancel{(x-2)}} = \frac{4}{4} = 1$

Concluimos que hay discontinuidad de agujero para $x = 2$.

c) Del apartado (a) se deduce que la recta $y = 2$ es una asíntota horizontal.

Del apartado (b) se deduce que la recta $x = 2$ es una asíntota vertical.