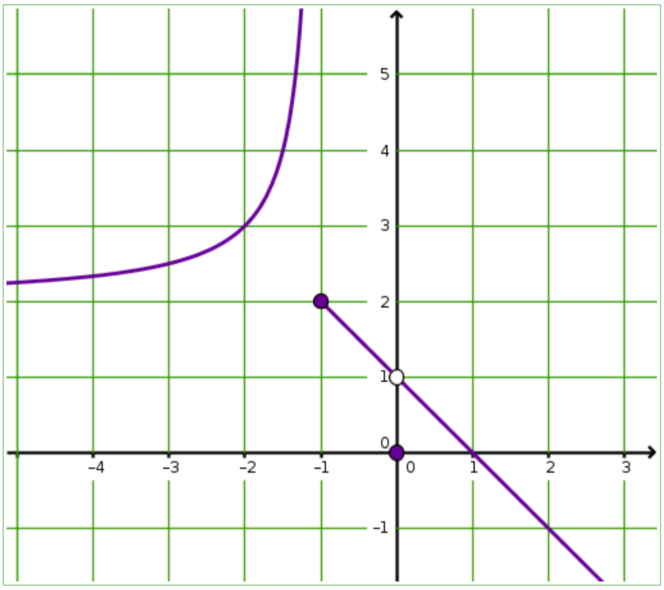
Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas Aplicadas I – Límites y continuidad de funciones – 27/02/2014	

EJERCICIO 1:

La gráfica de la función $y = f(x)$ es la mostrada a continuación:



a) [1,5] Estudia la continuidad de la función, señalando valor y tendencias en las discontinuidades.

b) [0,5] Indica las tendencias de $f(x)$ para $x \to -\infty$ y para $x \to +\infty$.

c) [1] ¿Qué asíntotas tiene la curva?

EJERCICIO 2:

Considera la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si} \quad x < 1 \\ -2x + 5 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

a) [0,5] Calcula las tendencias de $f(x)$ para $x \to -\infty$ y para $x \to +\infty$.

b) [1,5] Estudia algebraicamente la continuidad.

c) [0,5] ¿Qué asíntotas tiene la gráfica de la función?

d) [1] Dibuja su gráfica.

EJERCICIO 3:

Considera la función f definida por:

$$f(x) = \frac{6x + 18}{x^2 + 3x}$$

a) [0,5] Calcula los límites de $f(x)$ para $x \to \pm\infty$.

b) [2] Estudia algebraicamente la continuidad.

c) [1] ¿Qué asíntotas tiene la gráfica de la función?

EJERCICIO 1:

a) Observamos en la gráfica que la función sólo es discontinua para $x = -1$ (con discontinuidad de salto infinito) y para $x = 0$ (con discontinuidad de agujero o evitable):

$\boxed{x=-1}$ VALOR: si $x = -1$ es $y = 2$

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si } x \to -1_- \text{ es } y \to +\infty \\ \text{si } x \to -1_+ \text{ es } y \to 2 \end{cases}$

Por eso hay discontinuidad de salto infinito para $x = -1$.

$\boxed{x=0}$ VALOR: si $x = 0$ es $y = 0$

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si } x \to 0_- \text{ es } y \to 1 \\ \text{si } x \to 0_+ \text{ es } y \to 1 \end{cases}$

Concluimos que hay discontinuidad de agujero para $x = 0$.

b) En la gráfica observamos las siguientes tendencias en el infinito:

$$\text{si } x \to -\infty \text{ es } y \to 2 \quad , \quad \text{si } x \to +\infty \text{ es } y \to -\infty$$

o lo que es igual:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2 \quad , \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

c) La curva tiene las siguientes asíntotas:

Horizontales:

$y = 2$ (para $x \to -\infty$)

Verticales:

$x = -1$ (pues aquí tenemos una discontinuidad de salto infinito)

EJERCICIO 2:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x < 1 \\ -2x + 5 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) Debemos elegir la fórmula conveniente:

si $x \to -\infty$ es $y = x^2 - 3 \to +\infty$ $[\ (-\infty)^2 = +\infty\ ]$

si $x \to +\infty$ es $y = -2x + 5 \to -\infty$ $[\ -2 \cdot (+\infty) = -\infty\ ]$

b) La función sólo puede ser discontinua en $x = 1$ [separa-fórmulas].

$\boxed{x=1}$ VALOR: si $x = 1$ es $y = 3$

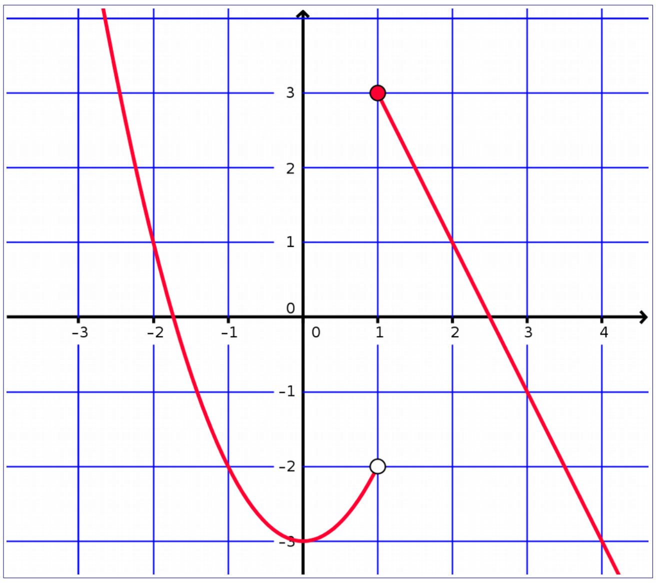
TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si } x \to 1_- \text{ es } y \to -2 \\ \text{si } x \to 1_+ \text{ es } y \to 3 \end{cases}$

Concluimos que hay discontinuidad de salto finito ($s = 5$) para $x = 1$.

c) Del apartado (a) se deduce que no hay asíntota horizontal [no se tiende a un número]

Del apartado (b) se deduce que o hay asíntota vertical [no hay salto infinito]

d) La gráfica se compondrá de un trozo de parábola ($x < 1$) y de recta ($x \geq 1$) . Con un par de tabla de valores:



EJERCICIO 3:

a) Aplicamos la regla de los grados; como el grado del numerador es menor que el y del denominador:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{6x+18}{x^2+3x} = 0$$

b) La función sólo puede ser discontinua en los ceros del denominador:

$$x^2+3x=0 \ \rightarrow \ x\cdot(x+3)=0 \ \rightarrow \ x=0\,, x=-3$$

Veamos en estos dos puntos:

$\boxed{x\!=\!0}$ VALOR: si $x=0$ es $y=$ no existe

TENDENCIAS: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{6x+18}{x^2+3x} = \left[\frac{18}{0}\right] = \pm\infty$

Concluimos que hay discontinuidad de salto infinito para $x=0$.

$\boxed{x\!=\!-3}$ VALOR: si $x=-3$ es $y=$ no existe

TENDENCIAS $\lim\limits_{x\to -3} \frac{6x+18}{x^2+3x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to -3} \frac{6\cancel{(x+3)}}{x\cancel{(x+3)}} = \frac{6}{-3} = -2$

Concluimos que hay discontinuidad de agujero para $x=-3$.

c) Del apartado (a) se deduce que la recta $y=0$ es una asíntota horizontal.

Del apartado (b) se deduce que la recta $x=-3$ es una asíntota vertical.