Nombre: ____ ***1º***		
Prueba de Suficiencia. Matemáticas Aplicadas I	16/06/09	

✗ Ejercicio1:

a) En un rectángulo de perímetro 18 cm. la base mide 5,65 cm. Determina su área.

b) Averigua a qué número debemos elevar 2 para obtener 3.

c) Los números obtenidos en los apartados anteriores, ¿son racionales o irracionales? ¿Cómo es su expresión decimal?

d) Redondéalos hasta las milésimas . Calcula el error cometido y acótalo.

✗ Ejercicio 2: Estudia el signo de la fracción $f=\frac{5-x}{x+4}$ según los distintos valores de x . Indica cuándo es $f>0$?

✗ Ejercicio 3: Considera el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} y=x^2-4x \\ -2x+y+5=0 \end{cases}$$

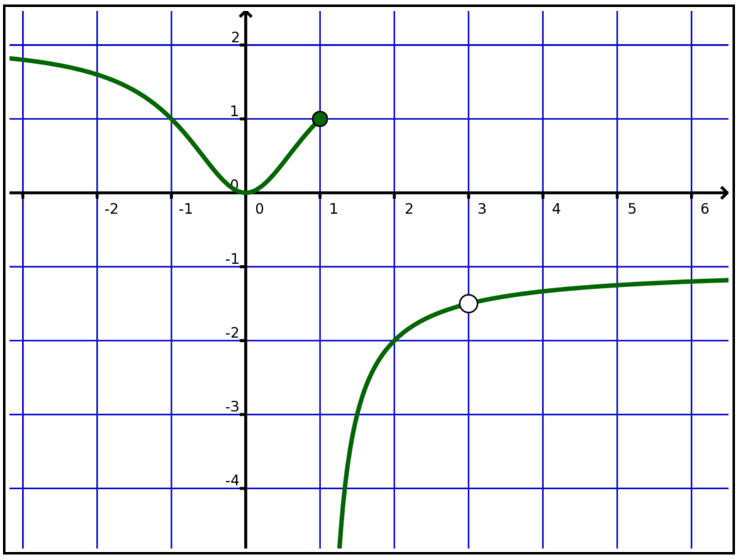
a) Resuelve algebraicamente ese sistema.

b) Dibuja en unos ejes de coordenadas las gráficas las gráficas de cada una de las ecuaciones. ¿Cómo pueden interpretarse en esa gráfica las soluciones del sistema?

✗ Ejercicio 4: Si a un número le sumamos la raíz de su triple obtenemos seis. Plantea una ecuación adecuada y averigua dicho número resolviéndola.

Nombre: ____ ***1º***		
Prueba de Suficiencia. Matemáticas Aplicadas I	16/06/09	

✗ Ejercicio 5: La gráfica de la función $y=f(x)$ es la mostrada a continuación:



a) Analiza la continuidad de la función, estudiando el valor y las tendencias en cada uno de los valores en cada una de las discontinuidades.

b) Averigua cuáles son las tendencias de la función para $x\to+\infty$ y para $x\to-\infty$?

c) ¿Qué asíntotas tiene la curva?

✗ Ejercicio 6: En un experimento que dura seis horas se estudia la temperatura de un objeto. Ésta varía en función del tiempo transcurrido desde el inicio de la experiencia según la fórmula

$$T=t^2-5t+4 \quad , \quad 0\leq t\leq 6$$

donde el tiempo (t) está medido en horas y la temperatura (T) en grados centígrados.

a) Dibuja la gráfica tiempo – Temperatura. ¿De qué tipo de gráfico se trata?

b) Indica cuándo la temperatura está bajo cero y cuándo por encima.

c) ¿En qué período de tiempo aumenta la temperatura del objeto? ¿En cuál disminuye?

d) Señala las temperatura extremas, indicando en qué momento se alcanzan.

✗ Ejercicio 7: Sea $f(x)=\begin{cases} x^2+4x & \text{si} \quad x\leq 1 \\ x+1 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

a) Obtén razonadamente los límites de $f(x)$ para $x\to\pm\infty$. ¿Tiene asíntotas horizontales?

b) Estudia algebraicamente su continuidad.

c) Dibuja su gráfica.

✗ Ejercicio 8: Sea $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$

a) Calcula los límites de $f(x)$ para $x\to\pm\infty$.

b) Calcula $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. ¿Es continua la función cuando $x = 0$?

c) ¿Qué ocurre con $f(x)$ cuando $x\to 2$? ¿Es continua la función cuando $x = 2$?

d) Señala cuáles son sus asíntotas horizontales y verticales.

Nombre: ____ ***1º***		
Prueba de Suficiencia. Matemáticas Aplicadas I	16/06/09	

✗ Ejercicio 9: Se lanzan dos dados de cuatro caras, numeradas del 1 al 4, y anotamos la pareja obtenida. Consideremos los sucesos:

a) Determine el espacio muestral asociado a ese experimento.

b) Determine los sucesos sucesos y obtenga sus probabilidades:

A: "sacar doble"

B: "la suma de los puntos es al menos cuatro"

c) Otenga $A \cup \overline{B}$ y $\overline{A} \cap B$ y calcule sus probabilidades.

✗ Ejercicio 10: En una población el 32% va usualmente al cine y el 15% al teatro. También se sabe que el 10% va a ambos.

a) Calcule la probabilidad de que un individuo vaya al cine o al teatro.

b) ¿Qué porcentaje de individuos va al teatro pero no al cine?

✗ Ejercicio 11: Estamos ante dos urnas exteriormente idénticas de modo que la situada a nuestra izquierda contiene cinco bolas rojas y tres negras, y la de la derecha contiene dos rojas y tres negras. Elegimos una urna al azar y sacamos una bola.

a) Calcule la probabilidad de elegir la urna de la derecha y sacar la bola negra.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola sea roja?

✗ Ejercicio 12: El coeficiente intelectual en una población se distribuye siguiendo una ley normal de media 80 puntos y una desviación típica de 30 puntos.

a) ¿Qué porcentaje de la población tiene un coeficiente inferior a los 75 puntos?

b) En una muestra de 60 individuos, ¿cuántos esperamos que tengan un coeficiente inferior a esos 75 puntos?

✗ Ejercicio 13: En un grupo de 1º de Bachillerato las calificaciones de Lengua han sido las siguientes:

2 3 3 4 4 4 5 5 5 5 6 6 6 7 7 8 8 8 9 9

a) Construye la tabla en la que aparezcan todas las frecuencias. ¿Qué porcentaje de alumnos ha conseguido siete o más?

b) ¿Cuál es la variable estadística estudiada? ¿De qué tipo es? Representa su diagrama de barras y el polígono de frecuencias.

c) Calcula los siguientes parámetros: la moda, la mediana, la media y la desviación típica.

✗ Ejercicio 1:

a) Recordemos que el perímetro es la suma de todos los lados, y se nos dice que es 18 cm.

Las dos bases miden $5{,}65\times 2=11{,}3$. Así, las dos alturas miden $18-11{,}3=6{,}7$. Luego cada una mide $6{,}7:2=3{,}35$. Concluimos que la altura mide 3,35 cm.

$$Área=b\times h=6{,}65\times 3{,}35=18{,}9275\ cm^2$$

b) Sea x ese exponente:

$$2^x=3\rightarrow x=\frac{\log 3}{\log 2}=1{,}5849625\ldots$$

c) El área del rectángulo es un número racional pues se trata de un decimal exacto.

El exponente es un número irracional, tratándose de un número periódico ilimitado no periódico.

d) Veamos esas aproximaciones:

$A=18{,}9275\approx 18{,}928\rightarrow \epsilon=18{,}9275-18{,}928=-0{,}0005$ es menor que una milésima

$x=1{,}5849625\ldots\approx 1{,}585\rightarrow \epsilon=1{,}5849625\ldots-1{,}585=-0{,}000037\ldots$ es menor que una diezmilésima

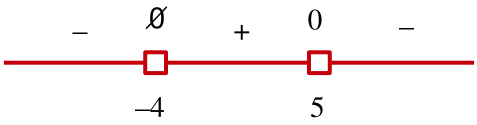
e) Estudiemos el signo de

$$f=\frac{5-x}{x+4}$$

Obtengamos los ceros:

- Veamos cuándo es cero el numerador: $5-x=0\ \rightarrow\ x=5$
- Veamos cuándo lo es el denominador: $x+4=0\ \rightarrow\ x=-4$

Intervalos de signo:



Concluimos que es $f>0$ cuando x está entre -4 y 5:

$$S=(-4,5)$$

✗ Ejercicio 2:

a) Vamos a resolver por sustitución el sistema

$$\begin{cases} y=x^2-4x \\ -2x+y+5=0 \end{cases}$$

Ya tenemos despejada la incógnita y en la primera ecuación. Sustituyendo su valor en la segunda:

$$-2x+(x^2-4x)+5=0$$

Simplificamos y aplicamos la fórmula de la ecuación de 2º grado:

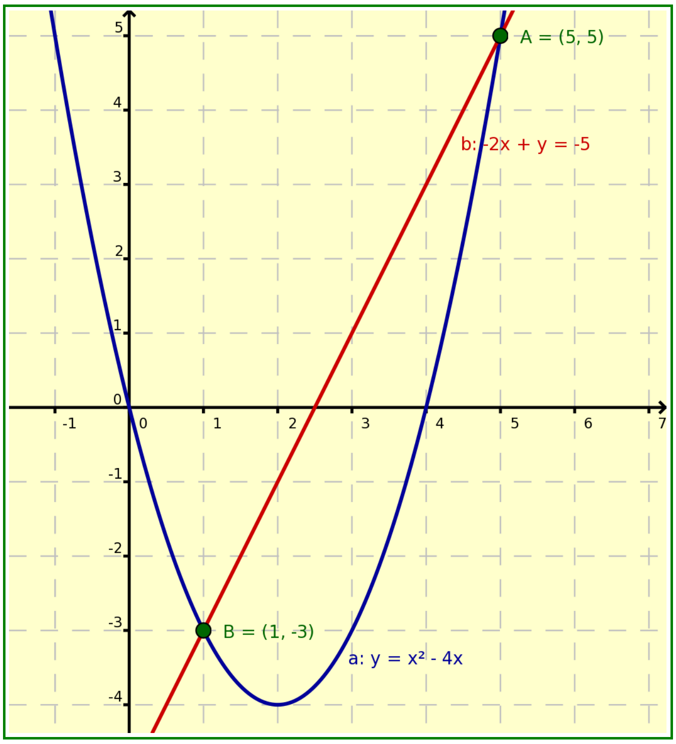
$$x^2-6x+5=0\rightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{2\cdot 1}=\frac{6\pm 4}{2}\ \rightarrow\ \left| \begin{array}{l} x=1\ \underset{sustituyendo}{\rightarrow}\ y=-3 \\ x=5\ \underset{sustituyendo}{\rightarrow}\ y=5 \end{array}\right.$$

Observemos que el sistema tiene dos soluciones.

b) La ecuación $y=x^2-4x$ se representará como una parábola. Su vértice estará en $x_V=\frac{-b}{2a}=\frac{4}{2}=2$.

La segunda ecuación $y=2x-5$ se trata de una recta.

Con un par de tablas de valores obtenemos:



Observemos que las soluciones se corresponden con los puntos de corte o intersección de la recta con la parábola.

✗ Ejercicio 4:

Sea x ese número.

Así, su triple será $3x$ y, por consiguiente, la raíz de su triple será $\sqrt{3x}$.

La ecuación que nos permitirá obtener x es:

$$\underbrace{x+\sqrt{3x}}_{\text{El número más la raíz del triple}} \underbrace{=}_{\text{es}} \underbrace{6}_{\text{seis}}$$

Resolvamos la ecuación:

Ecuación original:	$x+\sqrt{3x}=6$
Dejamos sola la raíz:	$\sqrt{3x}=6-x$
Elevamos al cuadrado:	$(\sqrt{3x})^2=(6-x)^2$
Desarrollamos:	$3x=36-12x+x^2$
Limpiamos y resolvemos:	$x^2-15x+36=0 \rightarrow x=3$ ó $x=12$

Al elevar al cuadrado ambos miembros obtenemos una ecuación que puede tener más soluciones que la propuesta (no tienen por qué ser equivalentes). Es preciso comprobarlas:

$$x=3 \rightarrow 3+\sqrt{9}=6 \rightarrow 3+3=6 \quad \text{SI}$$
$$x=12 \rightarrow 12+\sqrt{36}=6 \rightarrow 12+6=6 \quad \text{NO}$$

El número buscado es el 3.

✗ Ejercicio 5:

a) La función es continua en todo punto excepto en $x = 1$ (discontinuidad de salto infinito) y en $x = 3$ (discontinuidad evitable o de agujero). Veamos los valores y las tendencias en esas discontinuidades:

$\boxed{x=1}$ VALOR: si $x=1$ es $y=1$

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si} \quad x \to 1- \quad \text{es} \quad y \to 1 \\ \text{si} \quad x \to 1+ \quad \text{es} \quad y \to -\infty \end{cases}$

$\boxed{x=3}$ VALOR: si $x=1$ es $y=$No existe

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si} \quad x \to 3- \quad \text{es} \quad y \to 2 \\ \text{si} \quad x \to 3+ \quad \text{es} \quad y \to 2 \end{cases}$

b) En la gráfica observamos las siguientes tendencias en el infinito:

$$\text{si } x \to -\infty \text{ es } y \to 2 \quad \text{y} \quad \text{si } x \to +\infty \text{ es } y \to -1$$

o lo que es igual:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -1$$

c) La curva tiene las siguientes asíntotas:

Horizontales:

$y = 2$ (para $x \to -\infty$)

$y = -1$ (para $x \to +\infty$)

Verticales:

$x = 1$ (pues aquí tenemos una discontinuidad de salto infinito)

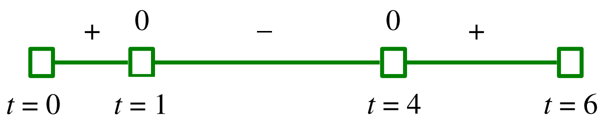
✗ Ejercicio 6:

a) La gráfica será un trozo de parábola, cuyo vértice se encuentra cuando $t_V = \frac{-b}{2a} = \frac{5}{2} = 2{,}5$.

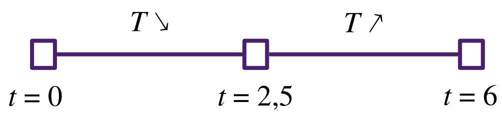
t	0	1	2	2,5	3	4	5	6
T	4	0	–2	–2,25	–2	0	4	10

Con la anterior tabla de valores:

b) En el esquema siguiente señalamos cuándo la temperatura está sobre cero (+) y bajo cero (–):



c) En el siguiente esquema mostramos cuándo aumenta o disminuye la temperatura:



d) Las temperaturas extremas son:

$T_{max} = 5$ºC que se alcanza para $t = 4\,h$.

$T_{min} = -4$ºC que se alcanza para $t = 1\,h$.

✗ <u>Ejercicio 7</u>:

a) Debemos elegir la fórmula conveniente:

si $x \to -\infty$ es $y = x^2 + 4x \to +\infty$ pues $(-\infty)^2 = +\infty$

si $x \to +\infty$ es $y = x + 1 \to +\infty$ pues $(+\infty) + 1 = +\infty$

Deducimos de lo anterior que no hay asíntotas horizontales, pues la función no tiende hacia un número.

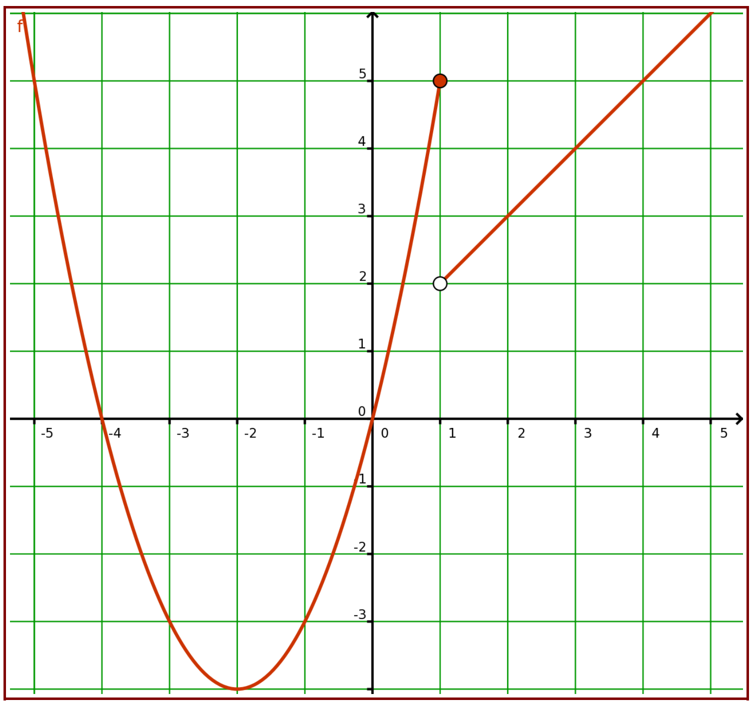
b) La función sólo puede ser discontinua en $x = 1$, que es el punto de conexión de ambas partes.

$\boxed{x = 1}$ VALOR: si $x = 1$ es $y = 5$

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si} \quad x \to 1- \quad \text{es} \quad y = x^2 + 4x \to 5 \\ \text{si} \quad x \to 1+ \quad \text{es} \quad y = x + 1 \to 2 \end{cases}$

Concluimos que hay discontinuidad de salto finito (–3 unidades) para $x = 1$.

c) La gráfica se compondrá de un trozo de parábola (con vértice en $x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2$) para $x \leq 1$, así como de un trozo de recta para $x > 1$. Con unas tablas de valores adecuadas:



✗ Ejercicio 8:

a) Aplicamos la regla de los grados; como el grado del numerador y del denominador es el mismo:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-4}{x^2-2x}=\frac{1}{1}=1$$

b) Sustituimos:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\left[\frac{-4}{0}\right]=\pm\infty$$

Precisemos el signo con los laterales:

$$\lim_{x\to 0-} f(x)=\left[\frac{-4}{+0}\right]=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=\left[\frac{-4}{-0}\right]=+\infty$$

Para $x = 0$ la función no tiene valor (pues el denominador es cero) y tiende hacia el infinito. Así que en este valor tiene una discontinuidad de salto infinito.

c) Sustituimos:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\left[\frac{0}{0}\right]=¿?$$

Simplificamos para evitar la indeterminación:

$$\frac{x^2-4}{x^2-2x}=\frac{(x+2)\cdot(x-2)}{x\cdot(x-2)}=\frac{x+2}{x}$$

Así, tomando ahora límite:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x}=\frac{4}{2}=2$$

Para $x = 2$ la función no tiene valor (pues el denominador es cero) y tiende hacia 2. Así que en este valor tiene una discontinuidad de agujero.

d) Del apartado (a) se deduce que la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal.

Del apartado (b) se deduce que la recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

✗ Ejercicio 9:

a) El espacio muestral es:

$$E=\{1-1,1-2,1-3,1-4,2-1,2-2,2-3,2-4,3-1,3-2,3-3,3-4,4-1,4-2,4-3,4-4\}$$

b) $A=\{1-1,2-2,3-3,4-4\} \quad\rightarrow\quad p(A)=\dfrac{n^o \text{ de casos favorables}}{n^o \text{ de casos posibles}}=\dfrac{4}{16}$

$B=\{1-3,1-4,2-2,2-3,2-4,3-1,3-2,3-3,3-4,4-1,4-2,4-3,4-4\} \quad\rightarrow\quad p(B)=\dfrac{13}{16}$

c) $A\cup\overline{B}=\{1-1,2-2,3-3,4-4,1-2,2-1\} \quad\rightarrow\quad p(A\cup\overline{B})=\dfrac{6}{16}=\dfrac{3}{8}$

$\overline{A}\cap B=\{1-3,1-4,2-3,2-4,3-1,3-2,3-4,4-1,4-2,4-3\} \quad\rightarrow\quad p(\overline{A}\cap B)=\dfrac{13}{16}$

✗ Ejercicio 10: Llamemos:

C = "un individuo va al cine" → $p(C)=0{,}32$

T = "un individuo va al teatro" → $p(T)=0{,}15$

También conocemos $p(C\cap T)=0{,}10$

a) Se nos pide la probabilidad de la unión:

$$p(C\cup T)=p(C)+p(T)-p(C\cap T)=0{,}32+0{,}15-0{,}10=0{,}37$$

b) Organicemos todo en una tabla:

	C	$\overline{C}$	
T	0,1	0,05	0,15
$\overline{T}$	0,22	0,63	0,85
	0,32	0,68	1

La probabilidad pedida está en la tabla: $p(\overline{C}\cap T)=0{,}05$

Concluimos que el 5% va al teatro pero no al cine.

✗ Ejercicio 11: Podemos considerarlo una experiencia compuesta de dos fases

Fase 1: "elegimos la urna"

Fase 2: "sacamos la bola de la urna elegida"

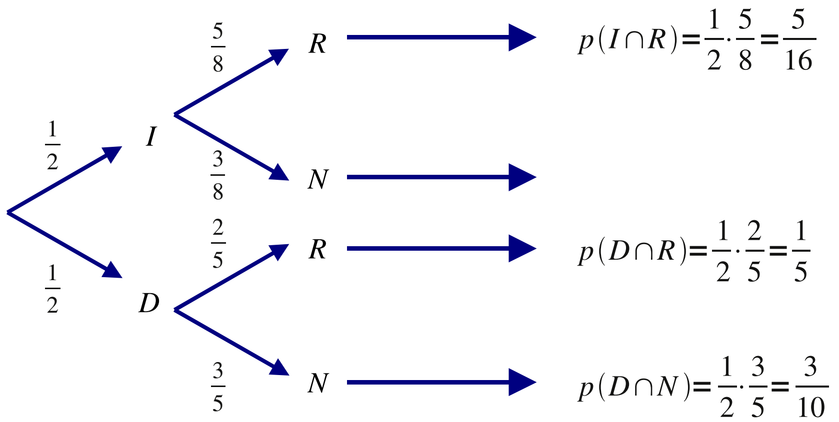
Las fases son dependientes, pues las probabilidades de sacar una bola u otra varían según la urna elegida.

Pongamos I = "elegimos la urna izquierda"

D = "elegimos la urna derecha"

C = "sacamos una bola negra"

B = " sacamos unas braguitas"



El diagrama de árbol nos muestra esquemáticamente la estructura de la experiencia:

a) La probabilidad pedida es: $p(D\cap N)=\frac{3}{10}$

b) Es una probabilidad total: $p(R)=\frac{5}{16}+\frac{1}{5}=\frac{41}{80}$

✗ Ejercicio 12:

Es $\boldsymbol{X}$ = "coeficiente intelectual de los individuos" normal con $\left| \begin{array}{l} \mu = 80 \ p. \\ \sigma = 30 \ p. \end{array} \right.$

a) Es: $p(X<75)=p(Z<-0{,}17)=1-0{,}5675=0{,}4325$

$$z=\frac{x-\mu}{\sigma}=\frac{75-80}{30}\approx-0{,}17$$

b) $E=n\cdot p=60\cdot 0{,}4325=25{,}95$ → Esperamos unos 26 individuos

✗ Ejercicio 13:

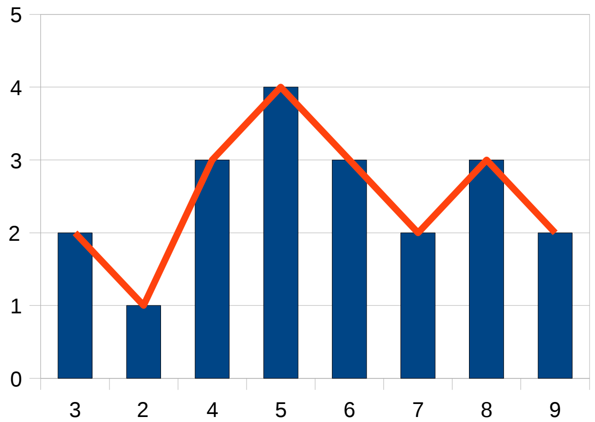
a) La tabla de frecuencias es:

x_i	n_i	N_i	f_i	F_i
2	1	1	$\frac{1}{20}=0{,}05$	$\frac{1}{20}=0{,}05$
3	2	3	$\frac{2}{20}=0{,}10$	$\frac{3}{20}=0{,}15$
4	3	6	$\frac{3}{20}=0{,}15$	$\frac{6}{20}=0{,}30$
5	4	10	$\frac{4}{20}=0{,}20$	$\frac{10}{20}=0{,}50$
6	3	13	$\frac{3}{20}=0{,}15$	$\frac{13}{20}=0{,}65$
7	2	15	$\frac{2}{20}=0{,}10$	$\frac{15}{20}=0{,}75$
8	3	18	$\frac{3}{20}=0{,}15$	$\frac{18}{20}=0{,}80$
9	2	20	$\frac{2}{20}=0{,}10$	$\frac{20}{20}=1{,}00$

Han sacado 7 o más un total de 7 alumnos de 20 que hay en total, lo que representa un 35%.

b) La variable estadística estudiada es "la calificación obtenida en Lengua", siendo cuantitativa discreta.

Diagrama de barras y polígono de frecuencias:



c) Moda: $Mo = 5$ (porque es el dato de mayor frecuencia)

Mediana: $Me = \frac{5+6}{2} = 5{,}5$ pues hasta x = 5 se acumula exactamente el 50% de los datos.

Media: $\overline{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{114}{20} = 5{,}7$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N} - \overline{x}^2} = \sqrt{\frac{730}{20} - 5{,}7^2} = \sqrt{4{,}01} \approx 2{,}0025$