10 Probabilidad Binomial

Números Factoriales

El factorial del número natural $n \geq 1$ se define por:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdots 1$$

Se conviene en definir:

$$0! = 1$$

Ejemplo: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

☞ Búscalo en tu calculadora.

Utilidad: para contar las reordenaciones o permutaciones de n objetos distinguibles:

$$P_n = n!$$

Ejemplo: En una carrera participan 6 corredores. ¿De cuántas maneras diferentes pueden llegar a la meta?

$$P_6 = 6! = 720$$

Números Combinatorios o Binomiales

Sean $n \geq k \geq 0$ números enteros. Se define el número "n sobre k" mediante:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Por ejemplo:

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!\,2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!\,2!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

☞ Búscalo en tu calculadora, como nCk, $C_{n,k}$, C_n^k...

Aparecen en multitud de problemas aparentemente distintos.

Son los coeficientes al desarrollar un binomio, como

$$(p+q)^5 = p^5 + 5p^4q + 10p^3q^2 + 10p^2q^3 + 5p\,q^4 + q^5$$

Es la famosa "fórmula del binomio":

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Por esto son llamados también números binomiales.

También se usan para contar.

Ejemplo: el número de reordenaciones distinguibles de la serie

$$a\,a\,b\,b\,a\,a\,b$$

viene dado por:

$$\binom{7}{4} = 35$$

También aparecen...

☞ Al contar el número de subconjuntos o grupos.

☞ En el Triángulo de Tartaglia.

☞ En el Aparato de Galton.

Experimentos de Bernoulli

Un experimento aleatorio se dice que es una experiencia de **Bernoulli** cuando:

1. En cada realización sólo son posibles dos resultados: un suceso A (llamado **éxito**) y su contrario (llamado **fracaso**).
2. El resultado obtenido en cada realización es independiente de los anteriores, por ello la probabilidad de A es constante: no varía de una prueba a otra.

Es usual designar por p a la probabilidad de "tener éxito" y $q = 1 - p$ a la "obtener un fracaso".

Ejemplo: sacamos una carta de una baraja española, para ver si es un as, y luego la devolvemos al mazo: estamos ante una experiencia de Bernoulli con $p = 0.1$.

Ejemplo: una caja contiene tornillos de los cuales el 95% no presentan defecto alguno. Sacamos un tornillo al azar para comprobar si es válido o defectuoso y lo devolvemos a la caja. Aquí es $p = 0.95$

Fórmula de Probabilidad Binomial

Si realizamos n veces un experimento de Bernoulli y la probabilidad de tener éxito es p, se dice que estamos ante una experiencia binomial $B\,(n\,,p)$.

La probabilidad de tener k éxitos en una experiencia $B\,(n\,,p)$ viene dada por:

$$\mathrm{p}\,[X=k] = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Ejemplo: en una fábrica el 85% de los objetos producidos no presenta defecto alguno. Si tomamos 10 objetos, con devolución, ¿cuál es la probabilidad de que ocho de ellos no presenten defectos?

Es un experimento $B\,(10\,,0.85)$ y se pregunta por

$$\mathrm{p}\,[X=8] = \binom{10}{8} \cdot 0.85^8 \cdot 0.15^2 = 0.2759$$

NORMAL Y BINOMIAL

Resulta que cuando es $np > 5$ y $nq > 5$, la distribución normal

$$\mathbf{N} \sim \mathscr{N}\left(np\,,\sqrt{npq}\right)$$

permite una excelente aproximación. Concretamente:

$\mathrm{p}\left[X = k\right] = \mathrm{p}\left[k - 0.5 \leq N \leq k + 0.5\right]$

$\mathrm{p}\left[X \leq k\right] = \mathrm{p}\left[N \leq k + 0.5\right]$

$\mathrm{p}\left[X \geq k\right] = \mathrm{p}\left[N \geq k - 0.5\right]$