6 Introducción a las Derivadas

Definición y Notaciones

Sea f una **función** definida en el intervalo abierto I. Se llama **función derivada** a la definida por

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

para cada valor $x \in I$ en el que existe ese límite.

Si para el valor $x = x_0$ existe la derivada, se dice entonces que la función es **derivable** para ese valor.

Existen varias formas de designar a la derivada de una función. He aquí las más comunes:

$$y' \quad , \quad f'(x) \quad , \quad Df(x) \quad , \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$$

Derivadas Sucesivas

A la derivada de una función también se la denomina **derivada primera**. Si volvemos a derivar la derivada primera de una función, obtenemos la llamada **derivada segunda**; la derivada de la derivada segunda se denomina **derivada tercera**; y así sucesivamente. Éstas son las llamadas **derivadas sucesivas** de una función:

$$f \xrightarrow{D} f' \xrightarrow{D} f'' \xrightarrow{D} f''' \xrightarrow{D} \dots$$

Recta Tangente

La **tangente** a la gráfica $y = f(x)$ para $x = x_0$ es

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

La pendiente es la derivada en ese punto:

$$m = f'(x_0)$$

Derivadas y Operaciones

Aquí tenemos las reglas que relacionan las operaciones elementales y las derivadas:

Linealidad:	$D(\alpha u \pm \beta v) = \alpha u' \pm \beta v'$
Producto:	$D(u \cdot v) = u' \cdot v + u \cdot v'$
Cociente	$D\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Regla de la Cadena

Es la regla que permite derivar una composición:

$$D\left[f(u(x))\right] = f'\left(u(x)\right) \cdot u'\left(x\right)$$

Tabla de Derivadas

Derivada de constante, de la identidad y su recíproca:

$$D\alpha = 0 \qquad Dx = 1 \qquad D\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

Derivada de función potencial y de raíz cuadrada:

$Dx^n = n \cdot x^{n-1}$	$Du^n = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
$D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$D\sqrt{u} = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Derivada de funciones exponenciales:

$D\,\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$	$D\,\mathrm{e}^u = \mathrm{e}^u \cdot u'$

Derivada de funciones logarítimicas:

$D \ln x = \frac{1}{x}$	$D \ln u = \frac{u'}{u}$

Derivada de funciones trigonométricas

$D \operatorname{sen} x = \cos x$	$D \operatorname{sen} u = u' \cos u$
$D \cos x = -\operatorname{sen} x$	$D \cos u = -u' \operatorname{sen} u$

Continuidad y Derivabilidad

Para estudiar la derivabilidad de una función f en un valor concreto $x = x_0$ primero estudiamos la continuidad en $x = x_0$.

Nos podemos encontrar tres casos:

1. f es **discontinua** en $x = x_0$.

   Tenemos que f **no es derivable** en $x = x_0$.

2. f es **continua** en $x = x_0$.

   Tenemos que f **puede** ser derivable en $x = x_0$.

   Podemos hallar las **derivadas laterales** así:

   $$f'_-\left(x_0\right) = \lim_{x\to x_0^-} f'\left(x\right) \ , \ f'_+\left(x_0\right) = \lim_{x\to x_0^+} f\left(x\right)$$

   Ahora hay dos posibilidades:

   - Caso 2a: Las derivadas laterales **no coinciden**.

     Resulta que f **no es derivable** en $x = x_0$

     Es lo que se llama un punto anguloso.

   - Caso 2b: Las derivadas laterales **coinciden** (L)

     Resulta que f es **derivable** en $x = x_0$

     Resulta así que $f'\left(x_0\right) = L$.