

5

LÍMITES Y CONTINUIDAD

CONTINUIDAD

De modo intuitivo, una función es continua cuando su gráfica se puede construir “con un solo trazo”, esto es, no tiene ni agujeros, ni roturas ni saltos.

Sea f una **función** definida en el intervalo I y $x_0 \in I$. Decimos que f es **continua** en $x = x_0$ cuando el valor y la tendencia existen y coinciden; esto es:

1. Existe el valor: $f(x_0)$
2. Existe el límite: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
3. Valor y límite coinciden: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Si alguna de esas tres cosas no ocurren, se dice que en $x = x_0$ hay una **discontinuidad**:

- **evitable** o de agujero. si el límite existe y es finito, pero no coincide con el valor (porque no existe o porque es un número diferente)
- de **salto infinito** si los laterales existen, pero alguno de ellos es infinito.
- de **salto finito** si ambos laterales son finitos pero distintos.
- Por último, hay funciones como $f(x) = \text{sen } \frac{1}{x}$ que para $x = 0$ no tiene siquiera límites laterales. Ésta se denomina discontinuidad **esencial**.

FUNCIONES ELEMENTALES

En general, las funciones elementales son continuas en todo punto salvo quizá en algunos valores concretos.

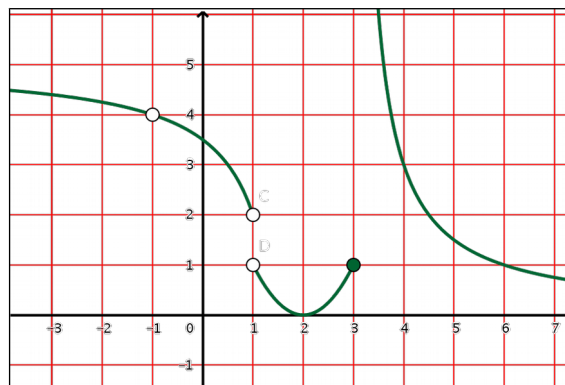
Las funciones polinómicas, seno, coseno y exponencial son continuas en todo punto.

Las funciones racionales, radicales, y logarítmicas son continuas en todos los valores en los que están definidas.

PELIGRO:

- Las funciones fraccionarias son discontinuas en los ceros del denominador (si los hubiese).
- Los logaritmos tienen salto infinito en los ceros del argumento.
- Las funciones a trozos pueden fallar en los separa-fórmulas.

ANÁLISIS GRÁFICO DE LA CONTINUIDAD



Sólo es discontinua para $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$.

Para $x = -1$ hay discontinuidad evitable:

$$\begin{aligned} \text{Valor:} & f(-1) = \emptyset \\ \text{Tendencias:} & f(-1-) = 4 \\ & f(-1+) = 4 \end{aligned}$$

Para $x = 1$ hay discontinuidad de salto finito:

$$\begin{aligned} \text{Valor:} & f(1) = \emptyset \\ \text{Tendencias:} & f(1-) = 2 \\ & f(1+) = 1 \end{aligned}$$

Para $x = 3$ hay discontinuidad de salto infinito:

$$\begin{aligned} \text{Valor:} & f(3) = 1 \\ \text{Tendencias:} & f(3-) = 1 \\ & f(3+) = +\infty \end{aligned}$$

LÍMITES DE POLINOMIOS EN UN PUNTO

Sustituimos (es continua):

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - x - 1) = 2^3 - 2 - 1 = 5$$

LÍMITES DE FUNCIONES A TROZOS EN UN PUNTO

Tomamos laterales los separa-fórmulas.

Si

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + x & \text{si } x \leq -1 \\ x^3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

es:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \begin{cases} f(-1-) = -(-1-)^2 - (-1-) = -2 \\ f(-1+) = (-1-)^3 = -1 \end{cases}$$

5

LÍMITES Y CONTINUIDAD

LÍMITE DE RACIONALES EN UN PUNTO

Sustituimos y hay tres posibilidades:

- Si el valor existe, el límite es ese número (continua):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x}{2x - 4} = \frac{-1}{-2} = 0.5$$

- Si obtenemos un número no nulo entre cero, el límite es infinito (salto infinito):

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 1}{x^2 - 9} = \left[\frac{4}{0} \right] = \begin{cases} f(3^-) = -\infty \\ f(3^+) = +\infty \end{cases}$$

- Si obtenemos cero entre cero es indeterminado, debiendo factorizar y simplificar para volver a sustituir (agujero o salto infinito):

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x+4)(\cancel{x-4})}{x(\cancel{x-4})} = \frac{8}{4} = 2$$

LÍMITE DE POLINOMIOS EN EL INFINITO

Siempre es infinito (sustituimos el líder):

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 5x^2) = -2(-\infty)^3 = -2(-\infty) = +\infty$$

LÍMITE DE RACIONALES EN EL INFINITO

Si p y q son polinomios entonces (regla de grados):

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \begin{cases} 0 & \text{si } \text{gr}(p) < \text{gr}(q) \\ \frac{a}{b} & \text{si } \text{gr}(p) = \text{gr}(q) \\ \pm\infty & \text{si } \text{gr}(p) > \text{gr}(q) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{1 + x^3} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^3 + 5}{1 + 3x^3} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 - 1}{x^3 + x + 1} = \pm\infty$$

ASÍNTOTAS

Verticales:

$$x = a \quad \text{si} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$$

Horizontales

$$y = b \quad \text{si} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$$

Oblicuas

$$y = mx + n \quad \text{si} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = n \end{cases}$$

- **Ejemplo:** Asíntotas de

$$y = \frac{2x + 1}{x - 3}$$

Verticales:

$$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x + 1}{x - 3} = \left[\frac{7}{0} \right] = \pm\infty$$

Horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x + 1}{x - 3} = \frac{2}{1} = 2 \rightarrow y = 2$$

Oblicuas:

No hay, al tener horizontal para $x \rightarrow \pm\infty$.

- **Ejemplo:** Asíntotas de

$$y = \frac{2x^3}{1 + x^2}$$

Verticales:

$$1 + x^2 = 0 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow \text{no}$$

Horizontales

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^3}{1 + x^2} = \pm\infty \rightarrow \text{no}$$

Oblicuas

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^3}{x + x^3} = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x^2}{1 + x^2} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x}{1 + x^2} = 0$$

$$y = 2x$$