

3

FUNCIONES, GRÁFICAS, OPERACIONES

CONCEPTOS BÁSICOS

Una **función** real f es una transformación que a cada número x le hace corresponder exactamente un número designado por $y = f(x)$: $x \xrightarrow{f} y$

El número x es llamado **original**, y se llama **dominio** de la función al conjunto de todos los originales.

Al número y se le llama “transformado o **imagen**”, siendo el **recorrido** el conjunto de todas las imágenes

Una función queda definida por una fórmula, una tabla de valores (tal vez indefinida) o una gráfica.

Un ejemplo de función es

$$f(x) = \frac{2}{x-1}$$

Aquí $x = 1$ no está en su dominio ($\mathbb{D} = \mathbb{R} - \{1\}$).

Una función $y = f(x)$ forma parejas de números (x, y) que podemos colocar en tablas de valores.

Si dibujamos esas parejas en plano cartesiano XY aparece una línea que es la gráfica de la función: cada punto de la gráfica es una pareja de la tabla.

GRÁFICAS DE FUNCIONES ELEMENTALES

Función afín: es $y = mx + n$ una recta. El número m es llamado pendiente de la recta.

Función cuadrática: es $y = ax^2 + bx + c$ una parábola de eje vertical con vértice para $x_v = \frac{-b}{2a}$.

Función valor absoluto: es $y = |f(x)|$. La gráfica puede construirse a partir de $y = f(x)$ reflejando respecto del eje X la parte negativa (bajo el eje).

Función a trozos: su gráfica está construida tomando partes de varias funciones. Por ejemplo, la de

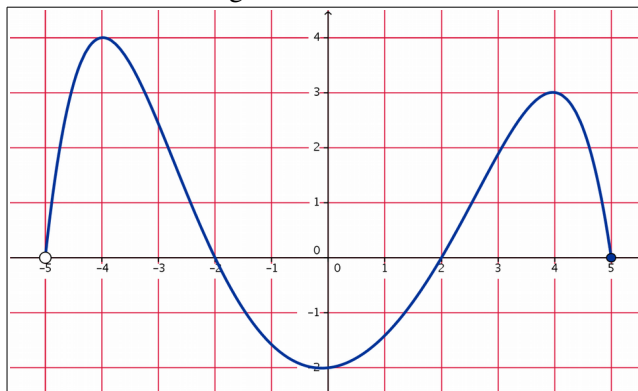
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x < 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

es el “trozo de parábola” $y = x^2 + 2x$ para $x < 1$ y el “trozo de recta” $y = 2x + 1$ para $x \geq 1$.

A la hora de dibujarla manualmente hemos de construir tantas tablas de valores como trozos y en ellas deben aparecer siempre los **separa-fórmulas** (incluidos-cerrados ó excluidos-abiertos).

CARACTERÍSTICAS BÁSICAS DE UNA GRÁFICA

Destacamos en la gráfica:



Dominio (conjunto de valores x donde hay gráfica):

$$\mathbb{D} = (-5, +5]$$

Recorrido: (conjunto de valores y donde hay gráfica):

$$R = [-2, +4]$$

Continuidad (¿podemos dibujar con un solo trazo -continua- o presenta agujeros, roturas, saltos,... -discontinua-?):

Es continua para todos los valores de su dominio. Ahora bien, hay una singularidad: para $x = -5$ hay agujero en el inicio de la gráfica (es denominado discontinuidad evitable).

Signo:

- Ceros (cortes con el eje X): $x = -2, 2, 5$
- Positiva (sobre el eje X): $(-5, -2) \cup (2, 5)$
- Negativa (bajo el eje X): $(-2, 2)$

Monotonía (crecimiento / decrecimiento):

$$f \nearrow \text{ en } (-5, -4] \text{ y en } [0, 4]$$

$$f \searrow \text{ en } (-5, -4] \text{ y en } [0, 4]$$

Acotación: vemos que la función está acotada. Tanto superiormente ($y = 5$ es cota superior) y acotada inferiormente ($y = -3$) es cota inferior.

Extremos (máximos y mínimos):

Máx. relativos: $A = (-4, 4)$ (absoluto) y $C = (4, 3)$.

Mín. relativos: $B = (0, -2)$ (absoluto) y $D = (6, 0)$

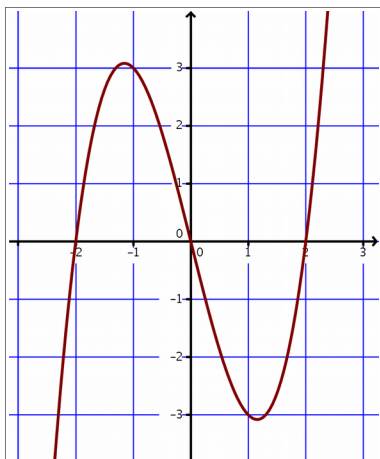
No hay asíntotas ni es periódica.

3

FUNCIONES, GRÁFICAS, OPERACIONES

FUNCIONES POLINÓMICAS

Aquí dibujada la curva de tercer grado $y = x^3 - 4x$:



Está definida y es continua en todo \mathbb{R} . En esas curvas destacamos los extremos relativos y los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

Tendencias de prolongación: ramas izquierda-abajo y derecha-arriba. Simbólicamente se expresa

Si $x \rightarrow -\infty$ es $y \rightarrow -\infty$, Si $x \rightarrow +\infty$ es $y \rightarrow +\infty$

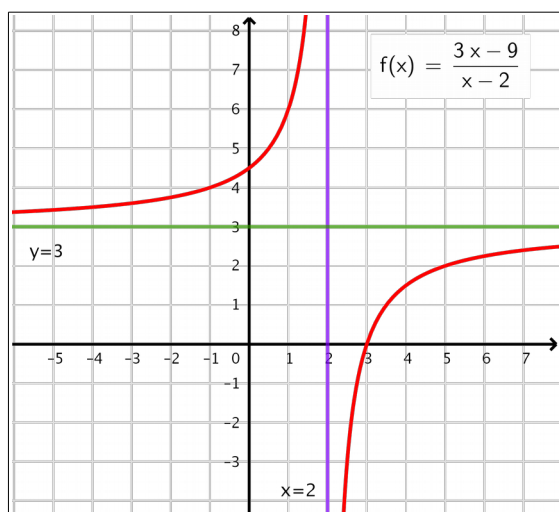
HIPÉRBOLAS BÁSICAS

Las **hipérbolas** básicas son las gráficas de fórmula

$$y = \frac{bx + c}{x - a}$$

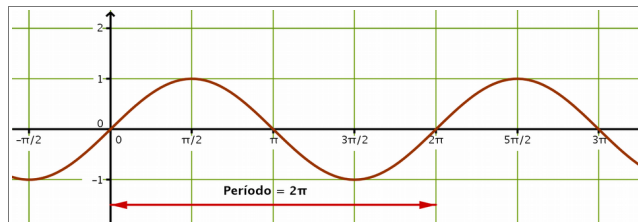
Tienen dos ramas inconexas situadas entre dos rectas llamadas asíntotas, vertical $x = a$ y horizontal $y = b$, que sirven de guías de prolongación.

Presentan una "discontinuidad de salto infinito".



ONDAS TRIGONOMÉTRICAS

Aquí representada usando Geogebra la función seno:

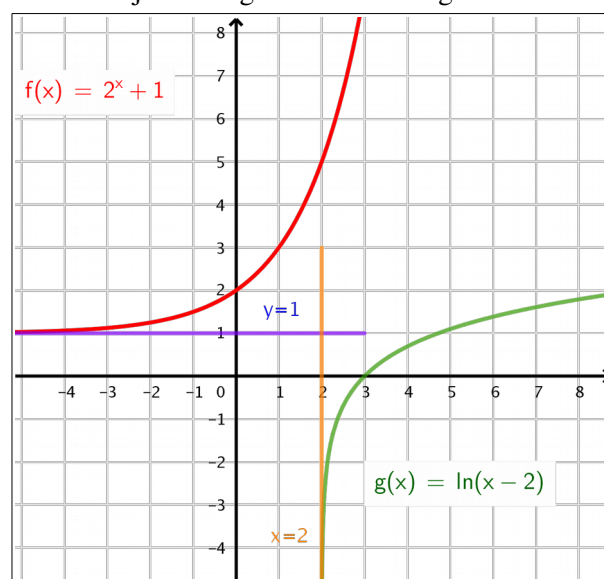


La línea obtenida se denomina curva **sinusoidal**. Está definida y es continua en toda la recta real. Observa su forma de onda y un aspecto fundamental: su periodicidad. Es una función 2π -periódica. Varía entre $y = -1$ e $y = +1$.

La del coseno está desplazada $\pi/2$: pasa por $P(0, 1)$.

EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Se han dibujado dos gráficas con Geogebra:



La **exponencial** está definida y es continua en todo \mathbb{R} . Su prolongación es muy diferente a izquierda y derecha.

La dibujada tiene una asíntota horizontal.

La **logarítmica** sólo está definida cuando el argumento del logaritmo es positivo:

$$x - 2 > 0 \rightarrow x > 2 \rightarrow \mathbb{D} = (2, +\infty)$$

Y tiene una asíntota vertical cuando el argumento del logaritmo es cero.

3

FUNCIONES, GRÁFICAS, OPERACIONES

OPERACIONES

Dadas f y g , para x común a sus dominios, se define:

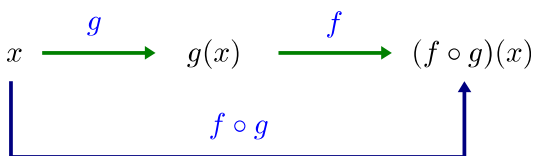
- La suma $f + g$ como $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- La resta $f - g$ como $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
- El producto $f \cdot g$ como $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- El cociente $\frac{f}{g}$ como $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

En este caso, observa que deberá ser $g(x) \neq 0$.

La composición $f \circ g$ de las dos funciones f y g se define mediante:

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$$

La función f actúa sobre el resultado de la función g :



Por ejemplo, si

$$f(x) = 3x + 1, h(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

es:

$$(f \circ h)(-1) = f[h(-1)] = f(-4) = -11$$

$$(h \circ f)(-1) = h[f(-1)] = h(-2) = -5$$

FUNCIÓN INVERSA

Si f asocia a cada $x \in \mathbb{D}$ un único $y \in \mathbb{I}$, la inversa f^{-1} es la función que a cada imagen $y \in \mathbb{I}$ le asocia su original $x \in \mathbb{D}$.

Para calcular su fórmula:

$$y = f(x) \xrightarrow[x]{\text{despejando}} x = f^{-1}(y)$$