2 ÁLGEBRA

IDENTIDAD Y ECUACIÓN

- Una **identidad** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas, en la que para cualquier valor que tomen las letras ambas expresiones coinciden.
- Una **ecuación** es una igualdad entre dos entre dos expresiones algebraicas, de forma que sólo para ciertos valores que tomen las letras las expresiones coinciden.

  En una ecuación, las letras que aparecen se denominan **incógnitas**.

  Resolver una ecuación es hallar los valores particulares que, sustituidos en las incógnitas, convierte la ecuación en identidad numérica. A esos valores se les llama **soluciones** de la ecuación.

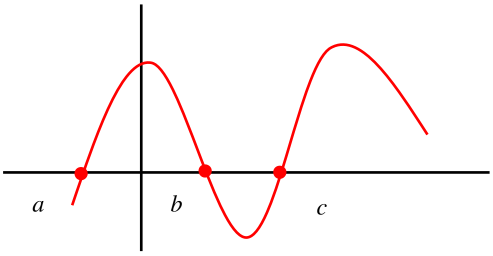
- Dos ecuaciones se dice que son **equivalentes** cuando tienen las mismas soluciones.

  Para obtener una ecuación equivalente a otra podemos **sumar** o **restar** a ambos miembros la misma cantidad. Y también podemos **multiplicar** o **dividir** ambos por una misma expresión, siempre que **no** sea cero.

  Si elevamos al cuadrado ambos miembros de una ecuación se obtiene una ecuación que puede tener más soluciones que la original. Deberemos comprobar las soluciones obtenidas para eliminar las extrañas si las hubiese.

ECUACIONES Y GRÁFICAS

Las abscisas de los puntos de corte de la gráfica de la función $y = P(x)$ con el eje X son las soluciones de la ecuación $P(x) = 0$.



$$P(x)=0 \rightarrow x=a \text{ , } x=b \text{ y } x=c$$

ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

- En la ecuación de 2º grado

  $$a x^2+b x+c=0$$

  la solución, si existe, viene dada por la fórmula

  $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

- Una ecuación de segundo grado puede tener 2, 1 o ninguna solución.
- La fórmula también permite resolver las ecuaciones bicuadradas. Por ejemplo:

  $$x^4-4x^2+3=0\rightarrow x^2=\frac{4\pm 2}{2}\rightarrow \left| \begin{array}{l} x^2=3\rightarrow x=\pm\sqrt{3} \\ x^2=1\rightarrow x=\pm 1 \end{array} \right.$$

ECUACIONES POLINÓMICAS

- Si una ecuación polinómica está factorizada, su resolución se reduce a la de igualar a cero esos factores:

  $$A\cdot B=0 \rightarrow \left| \begin{array}{l} A=0 \rightarrow \ldots \\ B=0 \rightarrow \ldots \end{array} \right.$$

- Por ello, en general, para resolver una ecuación **polinómica** intentaremos **factorizarla** hasta que los factores sean de primer o segundo grado.

ECUACIONES RADICALES

Para resolver una ecuación radical como

$$x=\sqrt{x}+2$$

Primero **aislamos la raíz** en un solo miembro:

$$x-2=\sqrt{x}$$

Después **elevamos al cuadrado** para quitar la raíz:

$$(x-2)^2=(\sqrt{x})^2 \rightarrow x^2-4x+4=x$$

A continuación **resolvemos** la ecuación resultante:

$$x^2-5x+4=0 \rightarrow x=1 \text{ ó } x=4$$

Finalmente **comprobamos** en la ecuación original:

$$x=1 \rightarrow 1=\sqrt{1}+2 \rightarrow 1=3 \rightarrow \text{NO}$$
$$x=4 \rightarrow 4=\sqrt{4}+2 \rightarrow 4=4 \rightarrow \text{SI}$$

2 Álgebra

Sistemas de Ecuaciones

Un **sistema de ecuaciones**, como por ejemplo,

$$\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x-y=3 \end{cases}$$

es un conjunto de ecuaciones que deben cumplirse **simultáneamente**. Eso sólo ocurre cuando sustituimos en ambas igualdades $x = 2$ e $y = 1$. Su solución es

$$(x,y)=(2,1)$$

Se interpreta **gráficamente** como la **intersección** de la recta $r: x+2y=4$ con la recta $s: 2x-y=3$.

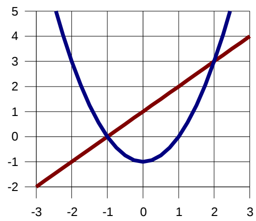
En el caso de un sistema **no lineal** como

$$\begin{cases} y=x+1 \\ y=x^2-1 \end{cases}$$

Hay dos soluciones:

$$(x,y)=(-1,0) \quad , \quad (x,y)=(2,3)$$

Y se interpretan gráficmante como la intersección de la **recta** ($y=x+1$) con la **parábola** ($y=x^2-1$):



Para resolver algebraicamente un sistema disponemos de tres métodos: **sustitución**, **igualación** y **reducción**.

Inecuaciones

Para resolver algebraicamente una una **inecuación**

$$f(x)<0 \quad , \quad f(x)>0 \quad , \quad f(x)\leq 0 \quad , \quad f(x)\geq 0$$

1º Calculamos sus **ceros** (los del numerador y los del denominador si es una fracción algebraica).

2º Obtenemos sus **intervalos de signo**: la expresión tiene el mismo signo en cada uno de los intervalos que delimitan los ceros.

Para averiguarlo sustituimos x por un número cualquiera de cada intervalo.

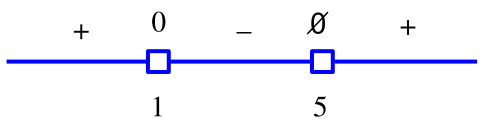
3º Señalamos la **solución**: indicamos cuál (o cuáles) de los intervalos anteriores cumple la desigualdad.

Por ejemplo: resolvamos la inecuación $\dfrac{x-1}{x-5}\geq 0$

1º **Ceros**:

- Del numerador: $x-1=0 \rightarrow x=1$
- Del denominador: $x-5=0 \rightarrow x=5$

2º **Intervalos de signo**:



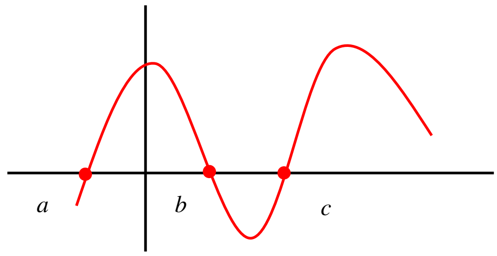
3º **Solución**: la fracción es positiva o cero en

$$S=(-\infty,1] \cup (5,+\infty)$$

Si conocemos la gráfica de $y = f(x)$ en los intervalos del eje X en los que la curva está

- está por **encima** la función es **positiva**: $f(x) > 0$
- está por **debajo** la función es **negativa**: $f(x) < 0$

Así, el estudio de signo correspondiente a



es