TEMA 10

INTRODUCCIÓN A LAS DERIVADAS

Contenidos

1. Ideas intuitivas.
2. Derivada de una función
3. Tangente a una curva
4. Derivadas de las funciones elementales.
5. Derivadas y operaciones.
6. Regla de la cadena para las funciones compuestas.
7. Apéndices: tangente y velocidad.

Tiempo estimado

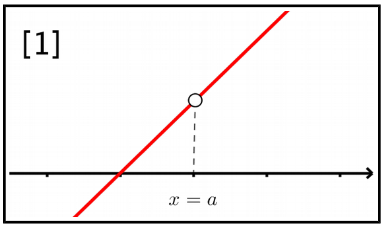
10 sesiones

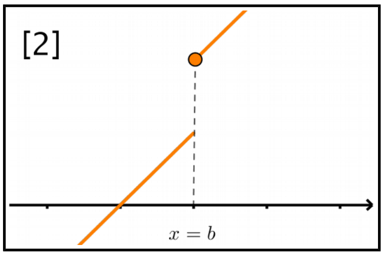
Criterios de Evaluación

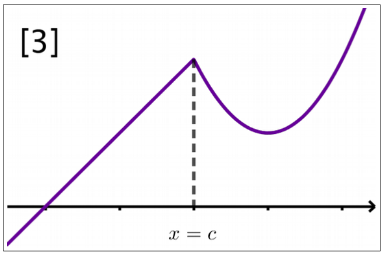
1. Reconocer qué curvas corresponden a funciones derivables relacionándolo con la recta tangente.
2. Entender qué es la derivada en un punto y saber calcularla en casos sencillos.
3. Conocer las derivadas de las funciones elementales.
4. Saber obtener las derivadas de las operaciones de las funciones elementales.
5. Aplicar la regla de la cadena para derivar composiciones de las funciones elementales.

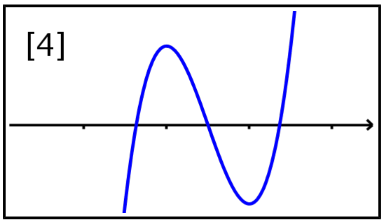
1.Ideas intuitivas: recta tangente y derivada

❑ Curvas suaves.









Observa las siguientes curvas e imagina que son vías (calles, caminos, carreteras) observadas desde arriba, desde un aeroplano que las sobrevuela. Vamos a estudiar qué hace que una vía sea buena para circular por ella, con tranquilidad, sin problemas, sin sobresaltos.

Las vías [1] y [2] deben cortarse al tráfico.

En la primera nos encontramos que a la altura de $x = a$ se ha abierto un enorme socavón que se ha tragado el camino. Ese problema es evitable fácilmente: basta llevar un camión y rellenar adecuadamente el agujero.

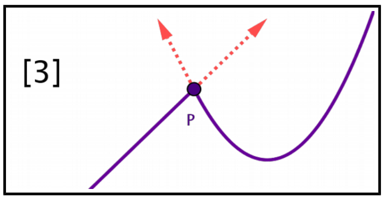
La segunda es todavía peor: a la altura de $x = b$ ha habido un corrimiento de tierras y se ha producido un deslizamiento. Habría que dar un salto para pasar del lado izquierdo al lado derecho. Eso no es evitable fácilmente: hay que modificar ahora todo el trazado en los alrededores.

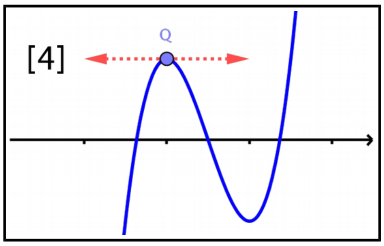
Observemos ahora la vía [3]. Sí, por esta se puede circular, pero hay un punto negro, un lugar muy peligroso: el que está a la altura de $x = c$. Se trata de un punto anguloso, hay prácticamente que detenerse al llegar a él si no queremos salirnos de la ruta.

La vía [4] es buena, qué bien está para pasear por ella. Hay curvas, pero todo el recorrido es suaaaaave.

Llamaremos curva suave a aquella sin discontinuidades y sin puntos angulosos.

❑ Recta tangente





Volvamos a la gráfica [3] e imaginemos que se ha derramado un bidón de aceite en el punto anguloso y que un móvil se dirige a toda velocidad hacia ese punto: brum, brum, brrrrrruuuuuuummmmmmmm, iiiiiiiiiijjjjjjjj. ¡Demasiado tarde!

Si se acerca por la parte izquierda se saldrá por ella siguiendo una trayectoria recta r_1 pero si se acerca por la derecha se saldrá siguiendo la recta r_2.

Esto es diferente en el recorrido [4]. Si tomamos de ella un punto cualquiera y el móvil se sale de la vía, lo hace tanto por la izquierda como por la derecha siguiendo la trayectoria de la misma recta r. Sí, sí, la que se conoce como recta tangente: una recta que en las cercanías sólo toca a la línea en ese punto, 'rozándola'.

Eso es lo que distingue a las curvas suaves de las que no lo son.

Se llama recta tangente a una curva suave en el punto P a la línea recta de escape de un móvil que, siguiendo el recorrido de la gráfica, se acerque a dicho punto.

❑ Resumen

Idea intuitiva de recta **tangente** en un punto de cierta gráfica: recta que la **roza** y en las proximidades sólo tienen en común el punto de contacto.

En un recorrido, la tangente es la recta de **escape** ante la salida de un móvil. Requisitos de existencia:

1º. **Continuidad**.

2º. **Suavidad**: pendientes laterales coincidentes.

Cuando hay continuidad pero no suavidad se dice que hay **puntos angulosos**.

❑ Definición intuitiva. Continuidad y derivabilidad

Decimos que la función f es **derivable** para $x = a$ si la curva $y = f(x)$ tiene tangente para $x = a$. En este caso a su pendiente se la llama **derivada** de la función para $x = a$, escribiéndose:

$$f'(a) = m$$

A la función $x \mapsto f'(x)$ se le llama función derivada.

La pendiente de la tangente está relacionada con la monotonía y los extremos de las curvas suaves:
- En los puntos donde crece la pendiente es positiva.
- En los puntos donde decrece la pendiente es negativa.
- En los puntos extremos la pendiente es cero.

☞ Ideas importantes:

- función derivable = gráfica suaaaave.
- derivada = pendiente de la curva.
- una curva puede ser derivable en unos puntos y en otros no.

Conviene que queden muy claros los siguientes aspectos de nuestro análisis inicial:

Para estudiar la **derivabilidad** de una función f en un valor concreto $x = x_0$ primero estudiamos la continuidad en $x = x_0$.

Nos podemos encontrar tres casos:

1. f es **discontinua** en $x = x_0$.

   Tenemos que f **no es derivable** en $x = x_0$.

2. f es **continua** en $x = x_0$.

   Hallamos las **derivadas laterales** $f'(x_0-)$ y $f'(x_0+)$

   Ahora hay dos posibilidades:

   – 2A: Las derivadas laterales **no coinciden**.

     Resulta que f **no es derivable** en $x = x_0$: ¡Punto anguloso!

   – 2B: Las derivadas laterales **coinciden** (m)

     Resulta que f es **derivable** en $x = x_0$: $f'(x_0) = m$

2.Derivada de una función.

Las nociones e ideas anteriores son todas intuitivas, desprovistas del rigor propio de las Matemáticas. Y adolecen de una total falta de capacidad de cálculo: sólo hemos hablado de cualidades, no se ha cuantificado nada.

Vamos a ver la definición partiendo de la Tasa de Variación Media.

❑ Tasa de variación media.

Sea f una función continua en cada punto del intervalo $I = [a\,,b]$.

Se llama Tasa de Variación Media de f en el intervalo al número dado por

$$\mathrm{TVM}\,(f\,,I) = \frac{f\,(b) - f\,(a)}{b - a}$$

☞ Ejemplo: calculemos la TVM de $f\,(x) = x^2$ en el intervalo $I = [1\,,3]$.

$$\mathrm{TVM}\,(f\,,I) = \frac{f\,(3) - f\,(1)}{3 - 1} = \frac{9 - 1}{3 - 1} = 4$$

La TVM tiene muchas interpretaciones, dependiendo del contexto. Veamos:

- En la gráfica $y = f\,(x)$ la TVM es la pendiente de la recta secante que une los puntos inicial $A = (a\,,f\,(a))$ y el final $B = (b\,,f\,(b))$.
- Si la función mide la posición de un móvil en función del tiempo, la TVM es la velocidad media un intervalo de tiempo.
- Si la función mide el tamaño de una población en función del tiempo, la TVM mide la variación de esa población por unidad de tiempo en el período en que se calcule.

❑ Derivada en un punto.

Si calculamos la TVM de una función f en un intervalo $I = [x_0\,,x]$ y ahora hacemos $x \to x_0$ entonces se obtiene la llamada Tasa de Variación Instantánea en x_0, que recibe el nombre de derivada.

Sea f definida en un intervalo abierto I y $x_0 \in I$.

Decimos que f es derivable para $x = x_0$ si el límite siguiente existe:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

En ese caso, al límite anterior se le llama derivada de la función para el valor $x = x_0$, y se le designa por $f'\,(x_0)$.

¡Atención! Puede ocurrir que dicho límite no exista. En ese caso diremos que f no es derivable para ese valor.

☞ Ejemplo: hallemos la derivada de la función $f(x) = 3x$ en $x = 2$.

Calculemos

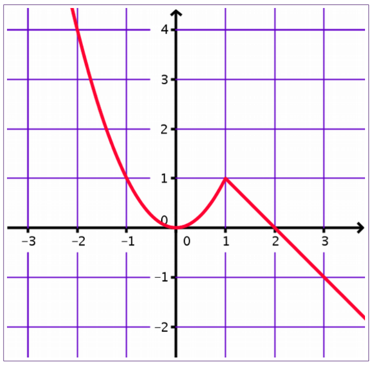
$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{3x - 6}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{3(x - 2)}{x - 2} = 3$$

Así, es $f'(2) = 3$

☞ Ejemplo: comprobemos que para $f(x)=x^2$ es $f'(5)=10$.

☞ Ejemplo: estudiemos gráficamente la derivabilidad de f siendo

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x\leq 1 \\ -x+2 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$



Observamos que es derivable para $x\neq 1$ pero que para $x=1$ no hay derivada pues apreciamos claramente un punto anguloso.

Ampliación: calcula los limites laterales que definen la derivada para $x=1$ y observa que no coinciden: ¡no hay derivada!

❑ Notación.

Existen multitud de símbolos para designar a la derivada de una función en un punto. Pero de ellos son tres los más usados.

Para designar a la derivada de la función $y=f(x)$ para $x=x_0$ hay varias notaciones. Aquí la usual, la notación de operador y la notación diferencial:

Notación de operador: $\quad f'(x_0)=Df(x_0)=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0)$

Esta última se lee "la derivada de y respecto de x para el valor x_0". Es una notación debida al matemático y filósofo Leibniz. Es la más compleja a la hora de escribir, pero también es la más completa y la que da más información.

En las Ciencias Experimentales la notación diferencial es la más usada, al resumir perfectamente qué es la derivada e indica las variables.

Por ejemplo, en la función $e=t^2$ la expresión

$$v(5)=\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}(5)=10$$

nos señala que la velocidad en un instante es la derivada del espacio recorrido (e) respecto del tiempo (t), y nos recuerda que se obtiene "dividiendo un incremento infinitamente pequeño de espacio entre un incremento infinitamente pequeño de tiempo":

$$v(5)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta e}{\Delta t}$$

Inicialmente se definió la derivada como el cociente de dos números (diferenciales) infinitamente pequeños pero que no eran cero. Era el difícil y oscuro concepto de los números infinitesimales.

❑ Función derivada.

En muchas ocasiones es necesario conocer la derivada de una función en varios de sus puntos. Consideremos, por ejemplo, la función $f(x)=x^2$. Si deseamos calcular $f'(-5)$, $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'(1)$ y $f'(8)$, en lugar de calcular estas derivadas aplicando la definición punto a punto, es preferible obtener una fórmula general:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x+x_0)(x-x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(x+x_0)=2x_0$$

Tenemos así que:

$$f'(x)=2x$$

Ahora calculamos la derivada en esos puntos sustituyendo en esta fórmula.

Y observemos que esa fórmula define una función, que a cada valor de x le asocia la derivada de f para dicho valor de x.

Se llama función derivada de la función f a la definida mediante

$$x \to f'(x)$$

para aquellos valores en los que es f es derivable, y se designa por $f'(x)$.

Dada la función y=f(x) con dominio D, al conjunto

D' = {x ∈ D : f es derivable en x}

se le llama dominio de derivabilidad.

☞ Ejemplo: comprueba que la función derivada de $f(x) = 2x$ es la definida por $f'(x) = 2$.

❑ Derivadas sucesivas

La derivada f' es una función y, a su vez, puede intentar derivarse. A la función derivada de f' se la llama derivada segunda de f y se la designa por f''.

A una función f podemos asociarle, derivando sucesivamente, las funciones derivadas $f', f'', f''', \ldots$. A éstas se les llama derivadas sucesivas de f.

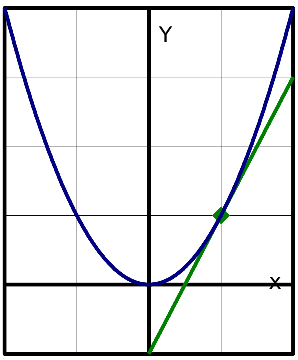
$$f \xrightarrow{D} f' \xrightarrow{D} f'' \xrightarrow{D} f''' \xrightarrow{D} \ldots$$

☞ Ejemplo: es fácil comprobar que

$$f(x) = x^2 \xrightarrow{D} f'(x) = 2x \xrightarrow{D} f''(x) = 2$$

3.Tangente a una curva.

Ahora vamos a usar la derivada para definir la recta tangente a la gráfica de una función:



La tangente a la curva $y = f(x)$ de una función derivable en el punto de abscisa $x = x_0$ tiene de pendiente $m = f'(x_0)$.

Por ello, la ecuación de dicha recta tangente es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

☞ Ejemplo: obtengamos la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$ para $x = 1$.

a) Derivamos

$$f(x) = x^2 \to f'(x) = 2x$$

b) Sustituimos $x = 1$:

$$f(1) = 1 \quad , \quad f'(1) = 2$$

c) La ecuación de la recta tangente para $x = 1$ es:

$$y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \;\to\; y - 1 = 2 \cdot (x - 1) \;\to\; y = 2x - 1$$

4.Derivadas elementales

Necesitamos unas reglas que permitan derivar directamente las funciones que más se presentan en el Cálculo. Veremos los casos más elementales.

Función constante.

La derivada de una función constante en cada punto es cero:

$$f(x) = k \xrightarrow{D} f'(x) = 0$$

Abreviadamente:
$Dk = 0$

☞ Ejemplo: Dada la función $f(x) = 3$, es $f'(x) = 0$.

Función potencial.

La derivada de la función potencial viene dada por:

$$f(x) = x^n \xrightarrow{D} f'(x) = nx^{n-1}$$

Abreviadamente:
$Dx^n = n \cdot x^{n-1}$

☞ Ejemplo: Dada la función $f(x) = x^4$, su derivada es $f'(x) = 4x^3$.

☞ Ejemplo: Dada la función $f(x) = x$, su derivada es $f'(x) = 1$.

☞ Ejemplo: Dada la función $f(x) = x^2$, hallemos la derivada para $x = 4$:

$$f(x) = x^2 \xrightarrow{D} f'(x) = 2x \xrightarrow{sustituimos} f'(4) = 2 \cdot 4 = 8$$

☞ Ejemplo: Para derivar $f(x) = \sqrt{x^5}$ podemos proceder así:

$$D\left(\sqrt{x^5}\right) = D\left(x^{\frac{5}{2}}\right) = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} = \frac{5}{2}\sqrt{x^3}$$

Función exponencial.

La derivada de la función exponencial es la misma función exponencial:

$$f(x) = \mathrm{e}^x \xrightarrow{D} f'(x) = \mathrm{e}^x$$

Abreviadamente:
$D\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$

Función logaritmo.

La derivada de la función logaritmo neperiano viene dada por:

$$f(x) = \ln x \xrightarrow{D} f'(x) = \frac{1}{x}$$

Abreviadamente:
$D\ln x = \frac{1}{x}$

Funciones trigonométricas.

La derivada de la función seno es la función coseno:

$$f(x) = \operatorname{sen} x \xrightarrow{D} f'(x) = \cos x$$

La derivada de la función coseno es la opuesta de la función seno:

$$f(x) = \cos x \xrightarrow{D} f'(x) = -\operatorname{sen} x$$

Abreviadamente:
$D\operatorname{sen} x = \cos x$
$D\cos x = -\operatorname{sen} x$

5. Álgebra de derivadas

Derivada de una suma o resta.

La derivada de una suma (resta) es igual a la suma (resta) de las derivadas de los términos que intervienen:

$$D\left(f \pm g\right) = f' \pm g'$$

☞ Ejemplo: $D\left(x^3 - x^2 + 5\right) = D\left(x^3\right) - D\left(x^2\right) + D\left(5\right) = 3x^2 - 2x$

☞ Ejemplo: La derivada de la función $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ es la función

$$f'(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$$

Derivada de un producto.

La derivada de un producto de dos funciones es igual a la derivada de la primera por la segunda más la primera por la derivada de la segunda:

$$D\left(f \cdot g\right) = f' \cdot g + f \cdot g'$$

☞ Ejemplo: obtengamos la siguiente derivada

$$D\left(x \cdot \operatorname{sen} x\right) = 1 \cdot \operatorname{sen} x + x \cdot \cos x = \operatorname{sen} x + x \cos x$$

☞ Ejemplo: calculemos $y'(1)$ para la función dada por $y = x \ln x$.

$$y'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 \longrightarrow y'(1) = \ln 1 + 1 = 1$$

Derivada del producto de una constante por una función.

Estamos ante un caso particular del anterior, que es más simple:

La derivada del producto de una constante por una función es igual al producto de la constante por la derivada de la función:

$$D\left(k \cdot f\right) = k \cdot f'$$

☞ Ejemplo: calculemos

$$D\left(5 \ln x\right) = 5 \cdot \left(\ln x\right)' = 5 \cdot \frac{1}{x} = \frac{5}{x}$$

- Ejemplo: calculemos

$$D\left(5x^2 + 10x - 5\right) = 10x + 10$$

☞ Ejemplo: Si el espacio recorrido por un móvil viene dado por la función $e(t) = 8t + 5t^2 \quad , \quad 0 \le t \le 10$, la velocidad en cada instante es

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}(t) = 8 + 10t \quad , \quad 0 \le t \le 10$$

❑ Derivada de un cociente.

La derivada de un cociente de dos funciones es igual a la derivada del numerador por el denominador menos el numerador por la derivada del denominador, todo ello dividido por el cuadrado del denominador:

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

☞ Ejemplo: Calculemos

$$D\left(\frac{x^3}{x-2}\right) = \frac{3x^2 \cdot (x-2) - x^3 \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{2x^3 - 6x^2}{(x-2)^2}$$

☞ Ejemplo: Calculemos

$$D\left(\frac{x^2}{x-3}\right) = \frac{2x \cdot (x-3) - x^2 \cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x}{(x-3)^2}$$

☞ Ejemplo: Dada $f(x) = \dfrac{x}{\cos x}$ obtengamos su derivada para $x = 0$.

Primero derivamos el cociente:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \cos x - x \cdot (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos x + x \cdot \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$$

Y ahora sustituimos en la derivada obtenida:

$$f'(0) = \frac{1+0}{1^2} = 1$$

6.Regla de la Cadena

Aún nos falta una regla que nos permita obtener la derivada de una composición de funciones. Por ejemplo, ¿cómo hallar la función derivada de $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$o de $f(x) = \cos\left(x^2\right)$?

Como vemos, se trata de funciones compuestas. El siguiente resultado, que permite derivar talas funciones, tiene una demostración muy complicada. Nosotros nos limitaremos a conocer cómo se aplica en la práctica con las funciones elementales que estamos estudiando.

Aquí tenemos la denominada **regla de la cadena**, que necesitaremos para derivar composiciones de funciones elementales:

Si f y u dos funciones derivables, entonces la función definida mediante

$$x \mapsto f[u(x)]$$

es derivable en cada x de su dominio y se tiene que es

$$Df[u(x)] = f'[u(x)] \cdot u'(x)$$

Podemos construir una nueva tabla de derivadas:

$D(u)^n = nu^{n-1}u'$

$D\sqrt{u} = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

$De^u = u'e^u$

$D\ln(u) = \dfrac{u'}{u}$

$D\operatorname{sen}(u) = u'\cos(u)$

$D\cos(u) = u'\operatorname{sen}(u)$

☞ Ejemplo: para derivar $y = \operatorname{sen}\left(x^2\right)$, observamos que es una composición. Por la regla de la cadena:

$$y' = \cos\left(x^2\right) \cdot 2x = 2x\cos\left(x^2\right)$$

☞ Ejemplo: si $y = \sqrt{\operatorname{sen} x}$ su derivada es

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}$$

☞ Ejemplo: si $y = \cos\left(\mathrm{e}^x\right)$ su derivada es

$$y' = -\operatorname{sen}\left(\mathrm{e}^x\right) \cdot \mathrm{e}^x = -\,\mathrm{e}^x \operatorname{sen}\left(\mathrm{e}^x\right)$$

☞ Ejemplo: si $y = \ln\left(x^2 + 3x - 2\right)$, aplicando la regla de la cadena

$$y' = \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \cdot (2x - 3) = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2}$$

☞ Ejemplo: si $y = \left(x^2 + x - 1\right)^3$, aplicando la regla de la cadena

$$y' = 3\left(x^2 + x - 1\right)^2 \cdot (2x + 1)$$

☞ Ejemplo: si $y = 3x\,\mathrm{e}^{5x}$, su derivada viene dada por

$$y' = 3\,\mathrm{e}^{5x} + \mathrm{e}^{5x} \cdot 5 \cdot 3x = \mathrm{e}^{5x}\,(3 + 15x)$$

☞ Ejemplo: si $y = \dfrac{\ln(2x - 1)}{x}$, su derivada es

$$y' = \frac{\dfrac{2}{2x - 1} \cdot x - 1 \cdot \ln(2x - 1)}{x^2} = \frac{2x - (2x - 1)\ln(2x - 1)}{x^2\,(2x - 1)}$$

Observa que en estas últimas funciones hemos aplicado la Regla de la Cadena junto con las reglas del producto y del cociente.

7.Apéndice I: velocidad media e instantánea

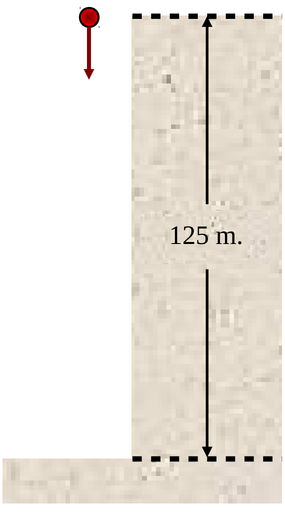
❑ Introducción.

El movimiento ha sido algo que siempre ha fascinado al hombre. Desde la aparición del pensamiento racional en la Grecia Clásica ha intentado describirse y explicarse. En el s. XVI se da un gran salto y se intentan describir los fenómenos físicos a través de las Matemáticas. En el s. XVII Galileo comienza a combinar la experimentación con las Matemáticas, llegando a enunciar unas avanzadas hipótesis que intentan describir, a través del número, cómo es el movimiento de los cuerpos en la Naturaleza. En el s. XVIII los pensadores quedaron fascinados por la potencia del recién nacido Cálculo, convirtiéndose la Matemática en un modelo de saber, de modo que sólo existe lo matematizable: el Universo queda reducido a la magia de los Números.

Nosotros a continuación vamos a intentar responder a unos de los problemas que los Matemáticos y Físicos se plantearon: el de la caída libre de un cuerpo. En el planteamiento y solución del problema aparecerá de modo natural el concepto de derivada de una función.

Cuando se deja caer un objeto cualquiera desde cierta altura, en condiciones normales, éste cae hacia el suelo describiendo su trayectoria una línea recta. Galileo descubrió empíricamente que el movimiento de un cuerpo que cae no depende de su peso. Incluso llegó a la conclusión de que el espacio que recorre un cuerpo en caída libre es función exclusivamente del tiempo transcurrido desde el inicio de su movimiento.

❑ El experimento.



Desde una altura de 125 m. se deja caer una diminuta bola de cristal, en ausencia de viento. En el instante en que dicho cuerpo se abandona en caída libre ponemos en marcha un cronómetro que marca el tiempo transcurrido t en segundos. Al llegar al suelo se detiene la medida del tiempo, finalizando el experimento.

Se comprueba que mientras la bola está en movimiento el espacio recorrido e está en función del tiempo transcurrido, y viene dado aproximadamente por la fórmula $e = 5t^2$.

Comencemos intentando responder:

- ¿Cuál es el espacio recorrido para $t = 0$?
- Cuando han transcurrido 3 seg., ¿a qué altura se encuentra?
- ¿Cuánto tiempo tarda en llegar al suelo?
- ¿Para qué valores de t es válida la fórmula?

Tenemos así que la función que rige el movimiento del cuerpo es:

$$e = 5t^2 \quad , \quad t \in [0\ 5]$$

❑ La velocidad media.

Normalmente, cuando un cuerpo cualquiera se mueve no recorre siempre la misma distancia en el mismo tiempo: unas veces se va "más deprisa" y otras se va "más despacio". Unas veces durante cinco segundo pueden recorrerse 2 m. y otras veces 10 m. Para determinar numéricamente la "rapidez" del movimiento se considera lo que se conoce como velocidad.

PROBLEMA: ¿cuál es la velocidad que lleva la bola? ¿cómo varía?

Para el estudio de ese problema se introduce la llamada "velocidad media en un intervalo de tiempo I": es el cociente del espacio recorrido Δe entre el tiempo transcurrido Δt:

$$v(I) = \frac{\text{incremento de espacio}}{\text{incremento de tiempo}} = \frac{\Delta e}{\Delta t}$$

Intentemos responder:

1. ¿Cuál es la velocidad media en el intervalo de tiempo $I = [0\,,1]$?

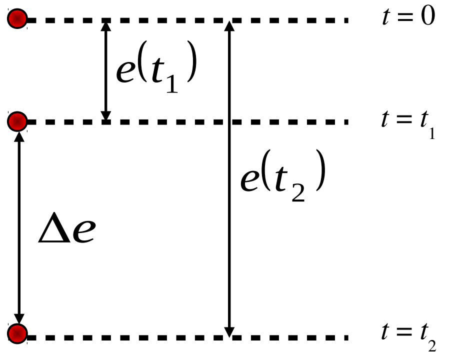
$$v(I) = \frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{\qquad}{\qquad} = \qquad \text{m/s}$$

2. ¿Cuál es la velocidad media en el intervalo de tiempo $I = [2\,,4]$?

$$v(I) = \frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{\qquad}{\qquad} = \qquad \text{m/s}$$

3. ¿Cuál es la velocidad media en el intervalo de tiempo $I = [4.5\,,5]$?

$$v(I) = \frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{\qquad}{\qquad} = \qquad \text{m/s}$$



En el intervalo de tiempo

$$I = [t_1\,,t_2]$$

es:

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

$$\Delta e = e(t_2) - e(t_1)$$

En el intervalo de tiempo $I = [t_1\,,t_2]$ se define la velocidad media como:

$$v(I) = \frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{e(t_2) - e(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Dada una función $y = f(x)$ se llama cociente incremental de f en el intervalo [a , b] al número dado por:

$$v([a,b]) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

❑ La velocidad instantánea.

Cuando vamos en un automóvil, hay un medidor llamado velocímetro en que se nos indica la velocidad a la que se mueve el vehículo "en cada instante". Pero, ¿qué es la velocidad en un instante? ¿Cómo podríamos precisar la velocidad del objeto en todo momento?

Vamos a intentar determinar la velocidad en el instante $t_0 = 3$.

La velocidad media en el intervalo de tiempo $I = [3\,,t]$ es:

$$v([3\,,t]) = \frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{e(t) - e(3)}{t-3} = \frac{5t^2 - 45}{t-3}$$

Si hacemos ahora $t \to 3$, esa velocidad media tiende a 30. Esto es:

$$\text{si } t \to 3 \text{ es } v([3\,,t]) \to 30$$

Por ello se dice que la "velocidad instantánea" para $t = 3$ es $30\ \mathrm{m/s}$.

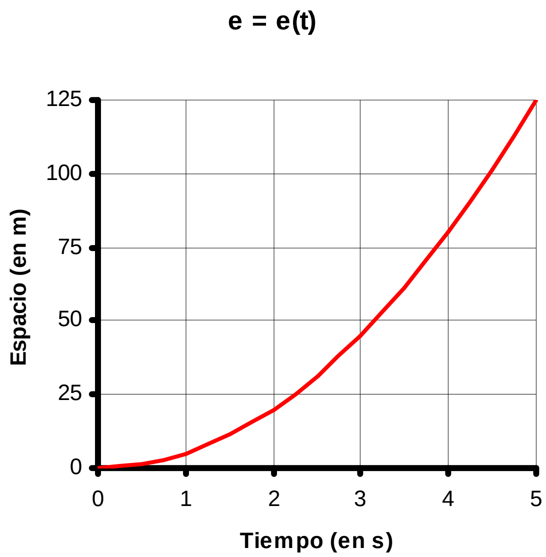
Podemos averiguar la velocidad en un instante t_0 cualquiera:

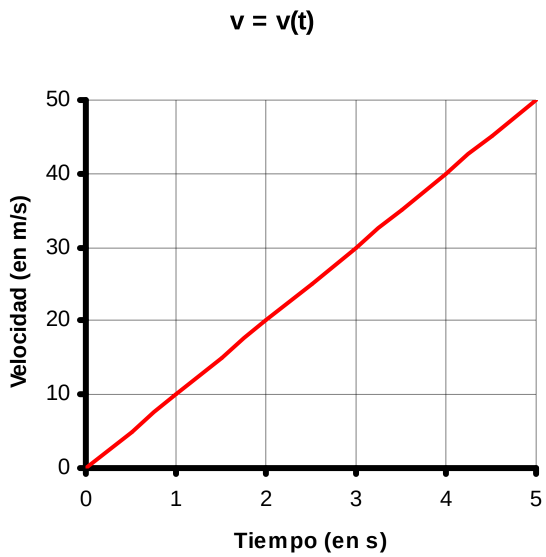
$$v([t_0\,,t]) = \frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{e(t) - e(t_0)}{t - t_0} = \frac{5t^2 - 5t_0^2}{t - t_0} = 5t + 5t_0 \xrightarrow{t \to t_0} 10t_0$$

Tenemos así una fórmula que nos da la velocidad del objeto en cada instante:

$$v(t_0) = 10t_0 \quad , \quad t \in [0\,,5]$$

A continuación puedes ver las gráficas de las funciones que expresan el espacio recorrido y la velocidad en función del tiempo:





En general:

En un movimiento de ecuación $e = f(t)$ la velocidad en cada instante viene definida por: $$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

8. Apéndice II: recta tangente a una curva.

❑ Introducción.

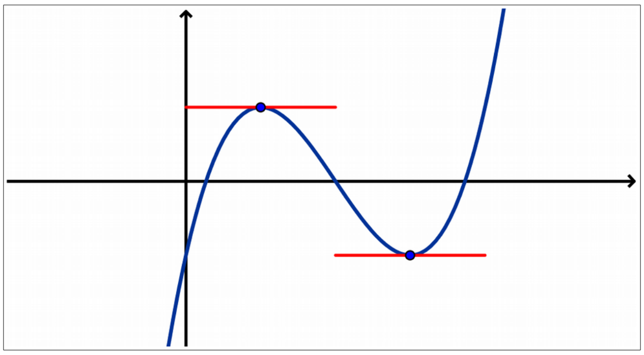
El considerable habido en la Ciencia y en la Técnica durante el último siglo procede en gran parte del desarrollo de las Matemáticas. La rama de las Matemáticas conocida por Cálculo es un instrumento natural y poderoso para atacar múltiples problemas que surgen en Física, Astronomía, Ingeniería, Biología e incluso las Ciencias Sociales.

He aquí algunos de los diversos tipos de problemas que pueden tratarse por los métodos del Cálculo:

- ¿Con qué velocidad debería impulsarse un cohete para que nunca volviera a la Tierra?
- ¿Cuál es el radio del menor círculo que cubre a todo triángulo isósceles de perímetro L?
- Si un cultivo de bacterias crece en razón directa a la cantidad que hay en cada instante, y la población se duplica en una hora, ¿en cuánto se habrá incrementado al cabo de dos horas?

El Cálculo no es sólo un instrumento técnico, sino que contiene una colección de ideas fascinantes y atrayentes que han ocupado el pensamiento humano durante siglos. Estas ideas están relacionadas con la velocidad, el área, el volumen, la razón de crecimiento, tangencia y otros referentes a otros dominios. El Cálculo obliga a detenerse y a pensar cuidadosamente acerca del significado de estos conceptos. Otro carácter notable del Cálculo es su poder unificador. Sorprende como muchos problemas pueden reducirse a otros de una naturaleza que se nos antoja completamente distinta. Nosotros vamos en esta sección a estudiar un prototipo de ello: el problema de la recta tangente.

La noción de derivada no se formuló hasta que el matemático francés Fermat trató de determinar los máximos y los mínimos de ciertas funciones. Esta idea es muy simple; observemos la gráfica siguiente:



En aquellos puntos en los que la curva tiene un máximo o un mínimo la tangente ha de ser horizontal. Por tanto, el problema de localizar estos valores extremos se reduce al de localizar aquellos puntos en los que la gráfica de una función tendrá tangentes horizontales.

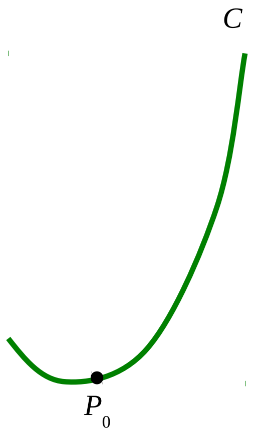
Esto conduce a la cuestión más general de la determinación de la dirección (pendiente) de la tangente en un punto cualquiera de la curva. El intento de resolver esta cuestión nos llevará directamente al concepto de derivada.

Vayamos más lejos: ¿cómo es la pendiente de la recta tangente en los puntos en los que la función crece? ¿Y en los que decrece? ¿Y en los puntos en los que hay máximos o mínimos?

❑ El problema de la recta tangente.

Obtener la recta tangente a una curva, en uno de sus puntos, es un problema que interesó ya los matemáticos de la Grecia Clásica. Ellos consiguieron, por métodos geométricos, construir tangentes a las circunferencias, elipses, parábolas, … deduciendo un gran número de interesantes propiedades.

Pero esos métodos no nos sirven cuando nos interesamos por curvas más generales. Y nos encontramos con una dificultad inesperada: ¿sabemos definir exactamente qué es la recta tangente a una curva?



Vamos a intentar:

1. Definir qué es la recta tangente a una curva en uno de sus puntos.
2. Calcular la ecuación de la tangente.

Consideremos una curva C que sea la gráfica de la función $y = f(x)$.

Fijemos en ella un punto P_0 en el que deseamos trazar la recta tangente. Como P_0 es un punto de la recta tangente, para obtener la ecuación de ésta sólo nos queda conocer su inclinación: ¿cuál será su pendiente?

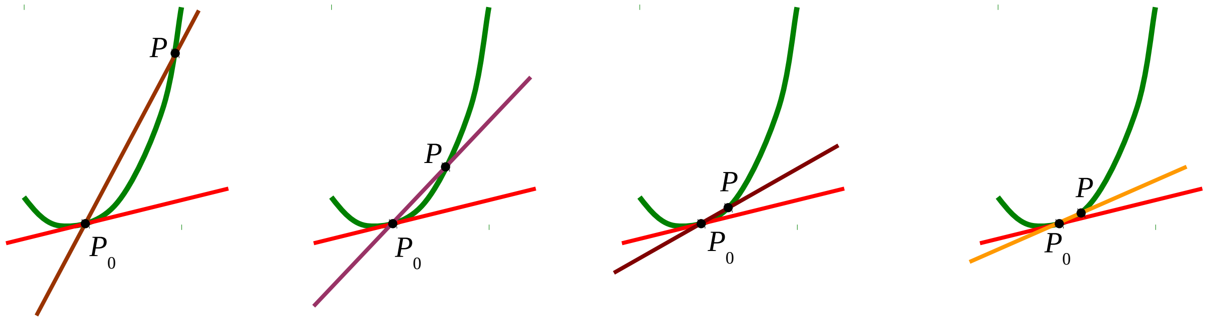
Para obtenerla utilizaremos el siguiente procedimiento:

a) Tomamos un punto P de la curva, distinto de P_0.

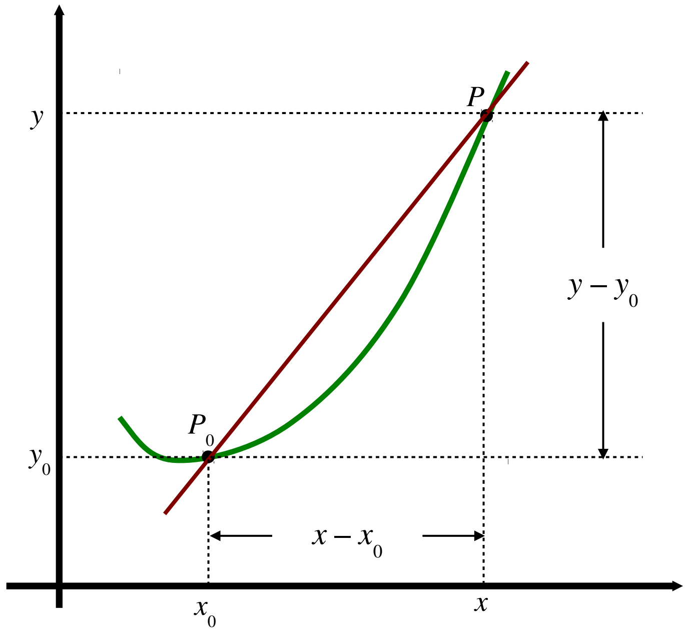
b) Trazamos la recta P_0P: es una recta secante a la curva C.

c) Movemos el punto P aproximándolo a P_0.

Observemos cómo las rectas secantes van acercándose a lo que nosotros creemos que debería ser la tangente a la curva C en P_0:



Calculemos la pendiente de una recta secante.



Obtengamos un vector director:

$$\left.\begin{array}{l} P_0 = (x_0\,, y_0) \\ P = (x\,, y) \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{P_0P} = (x - x_0\,, y - y_0)$$

Ahora la pendiente :

$$m_{\text{sec}} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

El punto P se aproximará a P_0 cuando hagamos $x \to x_0$, así la pendiente de la recta tangente ha de ser el límite de las pendientes de las secantes:

$$m_{\tan} = \lim_{x \to x_0} m_{\text{sec}} = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Tenemos así que:

> La tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P_0 = (x_0\,, y_0)$ tiene de pendiente:
>
> $$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

¡Increíble! Comparemos las expresiones de:

- La velocidad media y la pendiente de la secante.
- La velocidad instantánea y la pendiente de la recta tangente.

☞ Ejemplo: obtengamos la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto $P_0 = (1\,, 1)$.

La recta tangente:

a) Pasa por el punto $P_0 = (1\,, 1)$.

b) Tiene de pendiente

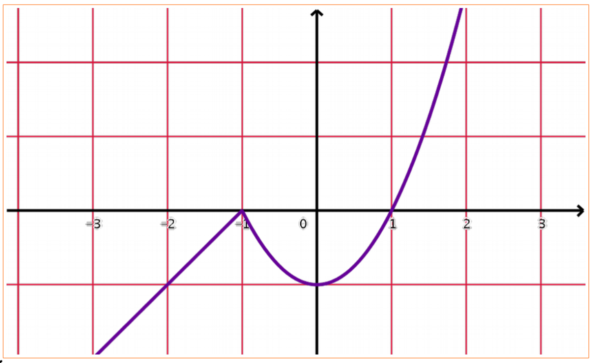
$$m = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 1}(x + 1) = 2$$

Su ecuación es:

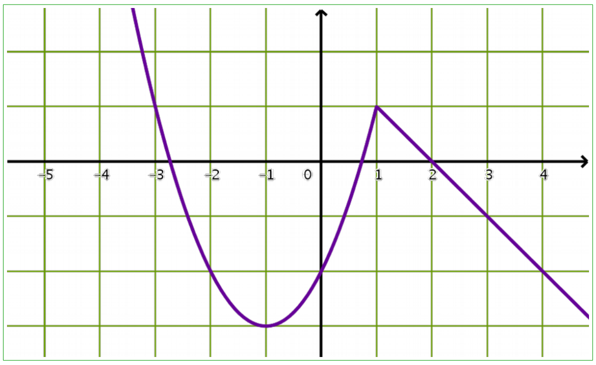
$$y - 1 = 2(x - 1) \quad \rightarrow \quad y = 2x - 1$$

Ejercicios

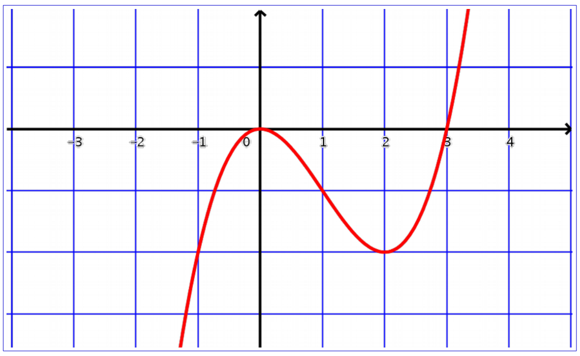
1. Dada la siguiente gráfica, haz un esquema que recoja los puntos en los que la derivada no existe, en los que es cero y los intervalos de signo de la derivada



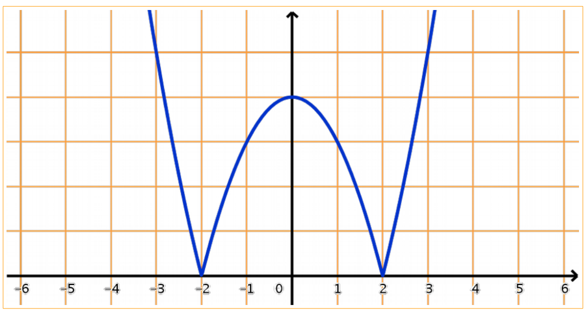
2. Ídem:



3. Ídem:



4. Observa la siguiente gráfica:



Es la correspondiente a la función definida por

$$y = |x^2 - 4|$$

Haz un esquema en el que se recoja los mismos puntos en los ejercicios anteriores.

5. Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva

$$y = x^4 - x^3 + x + 1$$

en el punto con $x_0 = 1$.

Sugerencia: recuerda la fórmula

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)$$

6. Consideremos la curva

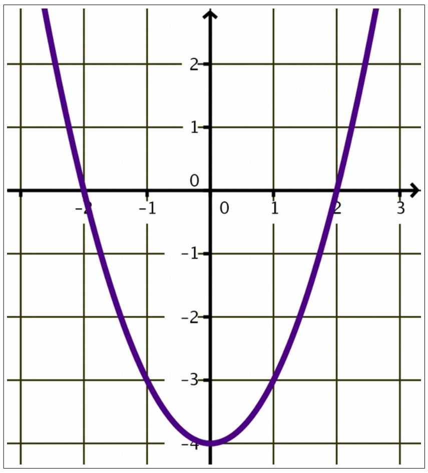
$$y = x^3 - 18x^2 + 6x + 10$$

a) Obtengamos la ecuación de la tangente para $x = -1$.

b) ¿En qué puntos la recta tangente es horizontal?

c) Estudiemos si la tangente en algún punto es paralela a $6x - y + 1 = 0$.

7. En la gráfica de la parábola siguiente:



a) Sin hacer ningún cálculo señala qué signo tiene la derivada de la función en los puntos

$$A = (-1\,, -3)\ ,\ B = (1\,, -3)$$

b) Sabiendo que la ecuación de la parábola es $y = x^2 - 4$, obtén la ecuación de la recta tangente en esos puntos.

c) Comprueba que la tangente es horizontal en el vértice de la parábola.

d) ¿En qué punto de la parábola la tangente es paralela a la recta de ecuación $y = 4x - 3$?

8. Dada la función definida por

$$f(x) = x^2 - 4x$$

a) Halla la ecuación de la recta tangente para $x = 0$.

b) ¿En qué punto la tangente es paralela a $2x - y = 1$?

9. Dada $f(x) = 3x^2 + 5x - 3$, obtén su derivada y su derivada segunda $f''(x)$ (derivada de la derivada). Calcula $f(2)$, $f'(2)$ y $f''(2)$.

10. Consideremos

$$f(x) = x^2 + bx + c$$

Hallemos b y c sabiendo que es

$$f(1) = 2 \text{ y } f'(0) = -2$$

11. En la función

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 3$$

Hallemos a y b sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(1, -3)$ y que es $f''(0) = 2$.

12. Calculemos a y b en la función

$$f(x) = \frac{ax^2 + b}{x}$$

sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(-1, 2)$ y que tiene un extremo relativo para $x = \sqrt{2}$.

13. Calculemos a y b en la curva

$$y = x^3 + ax^2 + bx - 2$$

sabiendo que $(-2, 2)$ es un extremo relativo.

14. Dada la función

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 6$$

a) Halla $f'(x)$ y estudia su signo.

b) Deduce de lo anterior los intervalos de monotonía de la gráfica de f.

c) ¿En qué puntos tiene la gráfica de f los extremos relativos?

d) Obtén el límite en el infinito y esboza su gráfica.

15. Ídem para

$$f(x) = \frac{4x}{1 + x^2}$$

16. *Comprueba que la recta de ecuación $y = x$ es tangente a la gráfica $y = \ln x$.

17. Dada la función definida a trozos por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 2x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Estudia su continuidad

b) ¿Es derivable para $x = 1$?

c) Obtén la función derivada y halla $f'(0)$ y $f'(1)$.

18. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ x^2 - 2x & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$

a) Dibuja su gráfica.

b) Estudia algebraicamente su continuidad y derivabilidad.

c) Obtén la recta tangente para $x = 2$ y $x = -1$.

19. Consideremos la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ x^3 - 2x^2 + 3 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

a) Analiza la continuidad.

b) Estudia su derivabilidad y obtén $f'(x)$.

c) Halla la ecuación de la reta tangente para $x = 0$ y para $x = 2$.

20. Comprueba que la función $y = 3 \operatorname{sen} x - 4 \cos x$ verifica la ecuación $y'' + y = 0$.

Idem. que la función $y = x \cdot \mathrm{e}^x$ verifica la ecuación $y'' - 2y' + y = 0$.

21. Un cuerpo se mueve en línea recta, de modo que la distancia a un punto de esa recta desde el que se observa viene dada por:

$$r(t) = \ln\left(20 + 8t - t^2\right) \quad , \quad 0 \leq t \leq 10$$

a) Obtén $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}(t)$. ¿Qué interpretación tiene ésta?

b) ¿El cuerpo se detiene en algún momento? ¿A qué distancia del punto de observación?

22. El número de insectos en una colonia viene dado por

$$N(t) = 100 + \mathrm{e}^{10t - t^2} \quad , \quad t \geq 0$$

a) Calcula $\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}(t)$.

b) ¿Qué significado tiene la expresión anterior?

Reglas de Derivación

23. Obtén las derivadas de las siguientes funciones polinómicas:

a) $y = x^2 - 5x + 4$ b) $y = 2x^3 - x^2 + 3x$

c) $y = x^4 + 3x^2 - 5$ d) $y = x^3 - 9x + 3$

e) $y = x^4 - 4x^3 + x$ f) $y = x^3 + \frac{2}{2}x^2 - 1$

24. Obtén las derivadas sucesivas de las siguientes funciones:

a) $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 7$

b) $y = -2x^3 + 8x^2 - x + 2$

c) $y = 3x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 6x - 1$

25. Halla la función derivada de:

a) $f(x) = x^2\,\mathrm{e}^x$ b) $g(x) = 3x\,\mathrm{e}^x$

c) $h(x) = x^3 \operatorname{sen} x$ d) $u(x) = x \ln x$

e) $v(x) = \mathrm{e}^x \cos x$ f) $w(x) = \mathrm{e}^x \ln x$

26. Deriva los siguientes cocientes:

a) $a(x) = \frac{2}{x}$ b) $b(x) = \frac{3}{x^2}$

c) $c(x) = \frac{3x+1}{2x+1}$ d) $d(x) = \frac{3x-5}{x^2+1}$

e) $f(x) = \frac{5x^2}{x-1}$ f) $g(x) = \frac{x+1}{x^2-4x}$

g) $u(x) = \frac{3x^2+1}{x+2}$ h) $u(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$

27. Obtén la función derivada de:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^5}$ b) $f(x) = \frac{2}{x^4}$

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ d) $f(x) = 3x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}}$

28. Obtén la derivada aplicando las reglas:

a) $y = 3 \operatorname{sen} x - 5 \cos x$ b) $y = -2x^2 \ln x$

c) $y = x^4\,\mathrm{e}^x$ d) $y = \frac{x^2 - x}{x^2 + 1}$

29. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = x - \operatorname{sen} x$

b) $y = x^2 \cos x$

c) $y = \frac{\ln x}{x^2}$

d) $y = (3 \operatorname{sen} x + 2 \cos x) \cdot \mathrm{e}^x$

e) $y = \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}$

f) $y = x \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x$

30. Calcula las derivadas de

a) $y = \csc x$ b) $y = \tan x$

c) $y = \cot x$ d) $y = \sec x$

31. Obtén las derivadas de las siguientes funciones, aplicando la regla de la cadena:

a) $y = \operatorname{sen}(x^2 - 3x)$ b) $y = \sqrt{x^2 - 3x}$

c) $y = \cos(x^2 - 3x)$ d) $y = \ln\left(x^2 - 3x\right)$

e) $y = \mathrm{e}^{x^2 - 3x}$ f) $y = \left(x^2 - 3x\right)^4$

32. *Obtén $f'(x)$ para:

a) $y = (2x - \operatorname{sen} x)^3$ b) $y = \ln(\cos x)$

c) $y = \cos\sqrt{2x-1}$ d) $y = \mathrm{e}^{x - \operatorname{sen} x}$

33. *Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = x \cos(3x)$ b) $y = x^2 \ln\left(x^3 + 1\right)$

c) $y = \frac{\operatorname{sen} 2x}{x}$ d) $y = x^3 - \cos(2x)$

e) $y = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{x^2}$ f) $y = x\sqrt{\operatorname{sen} x}$

34. Obtén la derivada n–ésima de:

a) $y = \mathrm{e}^{2x}$

b) $y = \ln(3x - 1)$

Cuestiones

1. Un objeto se mueve en línea recta, de modo que el espacio recorrido (m) está en función del tiempo (s) medido desde el inicio del movimiento según:

$$e(t) = t^2 + 2t \quad , \quad 0 \leq t \leq 10$$

a) ¿Qué espacio lleva recorrido cuando han transcurrido 3 segundos?

b) ¿Cuál es la velocidad media del cuerpo en el intervalo de tiempo $I = [3\,,5]$?

c) Obtén la velocidad que lleva en el instante $t = 4$.

2. Un móvil recorre una recta de modo que la distancia al punto de observación, en función del tiempo, viene dado por:

$$s(t) = 15t + 4$$

Demuestra que lleva una velocidad constante.

3. La siguiente función nos proporciona la distancia de un móvil que sigue una línea recta hasta un punto de observación de ella.

$$s\,(t) = t^3 - 4t^2 + 3t - 3\ ,\ t \geq 0$$

Calcula $s\,(3)$, $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,(3)$ y $\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\,(3)$. ¿Qué significado tiene cada uno de esos tres números?

4. Un objeto se lanza hacia arriba, poniéndose en ese instante en marcha un cronómetro hasta que cae al suelo. La altura (en metros) a la que se encuentra a los t segundos de ser lanzado viene dada por:

$$f(t) = 60 + 20t - 5t^2$$

a) ¿Al cabo de cuánto tiempo cae el objeto al suelo? ¿Para qué valores de t es válida la fórmula anterior?

b) Calcula la velocidad media en el intervalo de tiempo $I = [3\,,5]]$.

c) Obtén $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)$ y $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}(t)$. ¿Qué significado tienen estas expresiones?

d) ¿Con qué velocidad fue lanzado el cuerpo? ¿A qué altura se encontraba?

e) ¿Con qué velocidad toca al suelo al caer?

f) ¿En qué instante alcanza la altura máxima? ¿Cuál es esa altura máxima?

5. Dada la función $f(x) = x^3$:

a) Comprueba que la tangente a su gráfica en el punto $P = (1\,,1)$ es la recta $y = 3x - 2$.

b) Comprueba que esa recta corta a la curva en el punto $Q = (-2\,,-8)$.

6. Dada la función $f(x) = x^2 - 3x$ obtén su tasa de variación media en el intervalo $I = [1\,,5]$.

7. La curva de ecuación $y = f\,(x)$ tiene en el punto de abscisa $x = 1$ como recta tangente $2x - y + 4 = 0$.

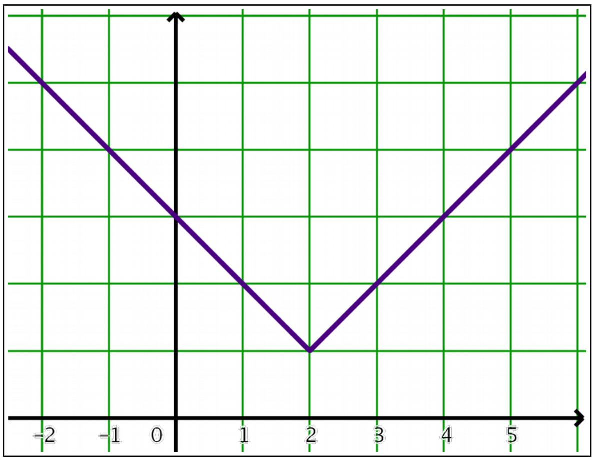
Averigua $f\,(1)$ y $f'\,(1)$.

8. Si f es una función polinómica, ¿cuál es la primera derivada que es idénticamente nula?

9. Escribe dos funciones cuya derivada sea $y' = 2x$. ¿Cuántas funciones así existen?

10. Dibuja la gráfica de una función que sea continua pero no derivable para $x = 3$. ¿Cómo se denomina a ese punto?

11. A continuación tenemos dibujada la gráfica de la función $y = 1 + |x - 2|$.



¿Qué pendiente tiene la recta tangente para $x = 2$?

12.

Autoevaluación

1. Obtén la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = x^3 \operatorname{sen} x$

b) $y = \dfrac{x^3}{2x+1}$

c) $y = x^5 \mathrm{e}^x + 1$

d) $y = 3 \ln x - 5x + 1$

2. Halla la función derivada usando la Regla de la Cadena:

a) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

b) $g(x) = \ln(\operatorname{sen} x)$

c) $u(x) = 3x \, \mathrm{e}^{2x}$

d) $v(x) = \dfrac{x^2}{\cos 4x}$

3. Consideremos la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 2x^2 - x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de la función.

b) Calcula la derivada directamente para $x \neq 1$, y determina las derivadas laterales para $x = 1$. ¿Es derivable la función para este valor?

c) Obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función para $x = 3$.

4. Halla a y b sabiendo que la función $y = x^2 + ax + b$ pasa por el punto $(2, -1)$ y tiene un extremo relativo para $x = 1$.

5. Dada la función

$$f(x) = x^3 - 3x$$

a) Obtén las derivada primera y segunda.

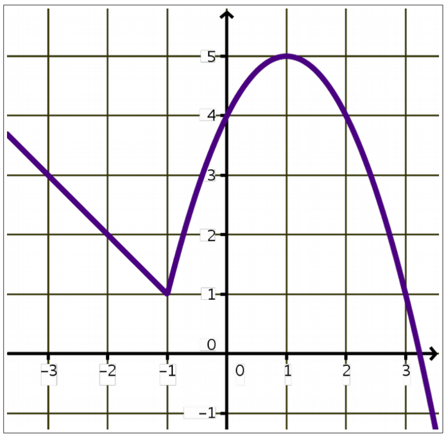
b) Estudia cuándo es positiva, negativa o cero (ceros e intervalos de signo) la derivada primera.

c) Deduce de lo anterior los intervalos de monotonía de la gráfica de f.

d) ¿En qué puntos tiene la gráfica de f los extremos relativos?

e) Halla los límites en el infinito de $y = x^3 - 3x$ esboza la curva.

6. Consideremos la función cuya gráfica $y = f(x)$ es:



Haz un esquema en el que se recoja:

a) los puntos en los que la derivada no existe.

b) los puntos en los que la derivada es cero.

c) los intervalos de signo de la derivada.

Autoevaluación

1.

a) Derivada de un producto:

$$y' = 3x^2 \operatorname{sen} x + x^3 \cos x$$

b) Derivada de un cociente:

$$y' = \frac{3x^2(2x+1) - 2 \cdot x^3}{(2x+1)^2} = \frac{4x^3 + 3x^2}{(2x+1)^2}$$

c) Derivada de una resta y producto:

$$y' = 5x^4 e^x + x^5 e^x + 0 = e^x \left(5x^4 + x^5\right)$$

d) Derivada de una suma/resta:

$$y' = \frac{3}{x} - 5 = \frac{3-5x}{x}$$

2.

a) Derivada de una raíz (regla de la cadena):

$$y' = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}} \cdot \cancel{2}x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

b) Derivada de un logaritmo (regla de la cadena):

$$y' = \frac{-\cos x}{\operatorname{sen} x} = -\cot x$$

c) Derivada de un producto y regla de la cadena:

$$y' = 3 \cdot e^{2x} + 3x \cdot e^{2x} \cdot 2 = e^{2x}(3+6x)$$

d) Derivada de un cociente y regla de la cadena:

$$y' = \frac{2x \cos 4x + 4x^2 \operatorname{sen} 4x}{\cos^2 4x}$$

3.

a) f sólo puede ser discontinua para $x = 1$ (separa-fórmulas). Veamos qué ocurre en él:

$x = 1$

VALOR: $f(1) = 1^2 = 1$

LÍMITES: $\begin{cases} f(1-) = 1^2 = 1 \\ f(1+) = 2 \cdot 1^2 - 1 = 1 \end{cases}$

Concluimos que es continua en $x = 1$.

b) Podemos derivar directamente si $x \neq 1$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x < 1 \\ 4x - 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

c) Para $x = 1$, como es continua, podemos hallar las derivadas laterales así:

D.L. $\begin{cases} f'(1-) = 2 \cdot 1 = 2 \\ f'(1+) = 4 \cdot 1 - 1 = 3 = 1 \end{cases}$

Al no coincidir, tenemos que no es derivable para este valor (se trata de un punto anguloso).

d) La ecuación de la recta tangente para $x = 3$ es

$$y - f(3) = f'(3)(x-3)$$

Sustituyendo: $f(3) = 15$ y $f'(3) = 12$. Así que la fórmula nos queda:

$$y - 15 = 12(x-3) \rightarrow y = 12x - 21$$

4. Derivemos: $y = x^2 + ax + b \rightarrow y' = 2x + a$

si pasa por el punto $(2, -1)$, entonces para $x = 2$ es $y = -1$:

$$4 + 2a + b = -1 \, [*]$$

si tiene un extremo relativo para $x = 1$, entonces para $x = 1$ es $y' = 0$:

$$2 \cdot 1 + a = 0 \rightarrow a = -2$$

Sustituyendo esto en [*] obtenemos $b = -1$.

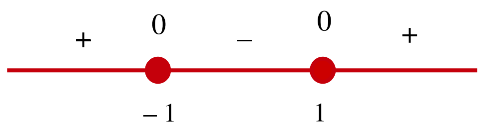
5.

a) $f(x) = x^3 - 3x'(x) = 3x^2 - 3 \rightarrow f''(x) = 6x$

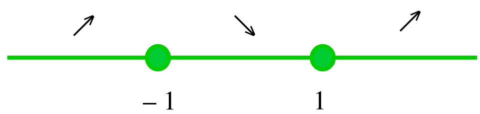
b) Ceros de la derivada:

$$3x^2 - 3 = 0 \rightarrow 3x^2 = 3 \rightarrow x^2 = 1 = \pm 1$$

Intervalos de signo:



c) Intervalos de monotonía de la gráfica de f:



d) Se deduce que hay:

Máximo relativo en $x = -1 \rightarrow y = 2$

Mínimo relativo en $x = 1 \rightarrow y = -2$

e) Límites en el infinito por la regla del grado:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = (-\infty)^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = (+\infty)^3 = +\infty$$

6. Tenemos en cuenta:

- si la función crece la derivada es positiva
- si la función decrece la derivada es negativa
- en los puntos angulosos la derivada no existe
- en los extremos suaves la derivada es cero.

Así el esquema de la derivada es: