TEMA 9

LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES

Contenidos

1. Continuidad: valor y tendencias.
2. Límite de una función en un punto.
3. Límites en el infinito.
4. Cálculo de límites de una función en el infinito.

Tiempo estimado

12 sesiones

Criterios de Evaluación

1. Reconocer gráficamente los puntos de continuidad y discontinuidad de una función.
2. Asimilar la idea intuitiva de límite de una función.
3. Investigar los diversos límites de una función como tendencias en su gráfica.
4. Saber calcular los límites de las funciones polinómicas, racionales y polinómicas a trozos.
5. Encontrar las asíntotas verticales y horizontales de una curva.

1.Continuidad: valor y tendencias.

En esta lección vamos a aprender a estudiar la continuidad de una función. La idea intuitiva no es muy compleja: una función es continua cuando su gráfica no presenta agujeros, grietas o roturas. Sería un camino por el que se puede transitar, circular sin problemas. Pero queremos ir más allá:

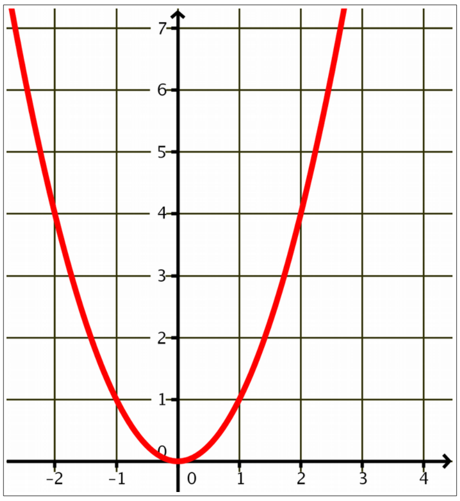
1. Dar una auténtica definición que no se quede en una vaga idea.

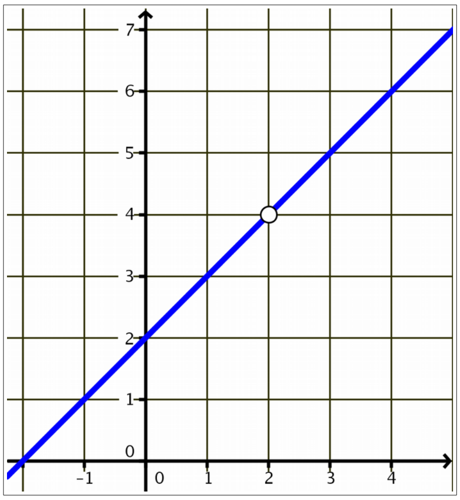
2. Poder decidir si la gráfica de una fórmula es continua sin dibujarla.

Para conseguirlo, vamos a estudiar algunas nociones de la teoría de los límites. Comencemos con las cuatro funciones siguientes.

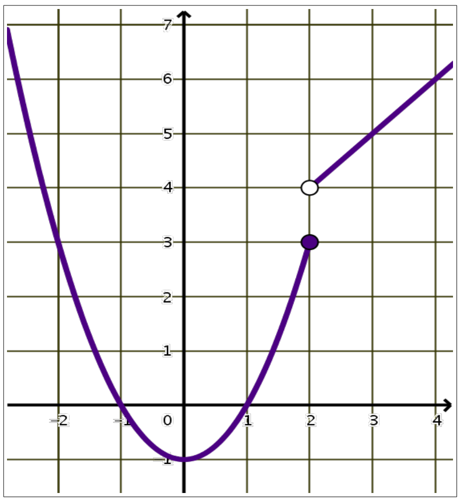
¿Qué ocurre cuando la función llega a $x = 2$ en cada una de ellas?

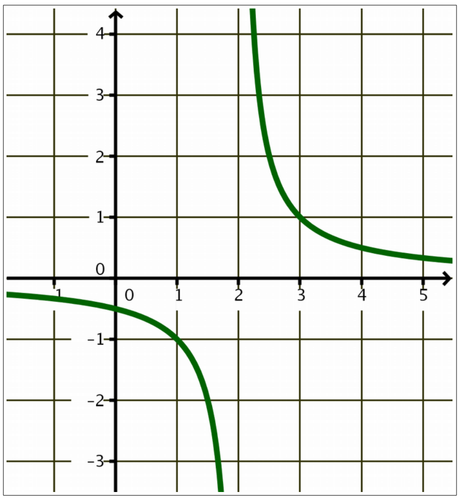
A	$f(x) = x^2$	B	$f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$





C	$f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x \leq 2 \\ x+2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$	D	$f(x) = \dfrac{1}{x-2}$





Vamos a estudiar en todas:

- ✓ Valor: ¿cuánto vale la y si x es 2?
- ✓ Tendencias: ¿qué ocurre con la y si hacemos que la x se acerque a 2?

❑ Estudio del caso A.

Valor: si $x = 2$ es $y = 4$. O dicho de otra forma: $f(2) = 4$.

Tendencias: hagamos que x tome valores que se aproximen a 2 ($x \to 2$)

x	$y = x^2$
1,9	
1,99	
1,999	
...	...
⬇	⬇
2–	

x	$y = x^2$
2,1	
2,01	
2,001	
...	...
⬇	⬇
2+	

"Si x tiende a 2 entonces y tiende a 4" y se escribe "si $x \to 2$ es $y \to 4$".

También se dice que "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 2 es 4" y se escribe

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$$

> Observemos que si x tiende a 2, la imagen de x tiende a la imagen de 2:
>
> si $x \to 2$ es $f(x) \to f(2)$
>
> Esto caracteriza a la **continuidad** de la función en ese punto.

❑ Estudio del caso B.

Valor: si $x = 2$ es $y =$. O también $f(2) =$.

Tendencias: hagamos que x tome valores que se aproximen a 2 ($x \to 2$)

x	$f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$
1,9	
1,99	
1,999	
...	...
⬇	⬇
2–	

x	$f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$
2,1	
2,01	
2,001	
...	...
⬇	⬇
2+	

"Si x tiende a 2 entonces y tiende a 4". Podemos expresar esta idea:

Como tendencia: si $x \to 2$ es $y \to 4$

Como límite: $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$

> Observemos que si x tiende a 2, las imagen de x tiende a un número determinado:
>
> si $x \to 2$ es $f(x) \to 4$
>
> Pero 4 no es la imagen de $x=2$, pues ésta no existe. Éste es el motivo del "**agujero**" en la gráfica".

Estudio del caso C.

Valor: si $x = 2$ es $y =$.

Tendencias: hagamos que x tome valores que se aproximen a 2 ($x \to 2$)

x	$y =$
1,9	
1,99	
1,999	
...	...
↓	↓
2–	

x	$y =$
2,1	
2,01	
2,001	
...	...
↓	↓
2+	

Ahora tenemos que "si x tiende a 2 por la izquierda entonces y tiende a 3", pero "si x tiende a 2 por la derecha entonces y tiende a 4".

Observa tres maneras distintas de expresar esto mismo:

Como tendencia: si $x \to 2_-$ es $y \to 3$, si $x \to 2_+$ es $y \to 4$

Como límite: $\lim_{x\to 2-} f(x) = 3$, $\lim_{x\to 2+} f(x) = 4$

Notación abreviada: $f(2-) = 3$, $f(2+) = 4$

La imagen de x tiende a números diferentes según se acerque a 2 con valores menores o mayores que éste:

si $x \to 2_-$ es $f(x) \to 3$

si $x \to 2_+$ es $f(x) \to 4$

Éste es el motivo del "**salto**" en la gráfica.

Estudio del caso D.

Valor: si $x = 2$ es $y =$ *No existe*.

Tendencias: hagamos que x tome valores que se aproximen a 2 ($x \to 2$)

x	$f(x) = \dfrac{1}{x-2}$
1,9	
1,99	
1,999	
...	...
↓	↓
2–	

x	$f(x) = \dfrac{1}{x-2}$
2,1	
2,01	
2,001	
...	...
↓	↓
2+	

"Si x tiende a 2 por la izquierda entonces y tiende a $-\infty$" pero "si x tiende a 2 por la derecha entonces y tiende a $+\infty$".

Las tres maneras de expresar esto mismo:

Como tendencia: si $x \to 2_-$ es $y \to -\infty$, si $x \to 2_+$ es $y \to +\infty$

Como límite: $\lim_{x\to 2-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 2+} f(x) = +\infty$

Notación abreviada: $f(2-) = -\infty$, $f(2+) = +\infty$

La imagen de x tiende a infinito cuando tiende a 2:

si $x \to 2_-$ es $f(x) \to -\infty$

si $x \to 2_+$ es $f(x) \to +\infty$

Éste es el motivo de la ruptura de la gráfica cuando llega a x=2. Observemos que tendríamos que dar un "**salto infinito**" para dibujarla.

❑ Conclusión.

Hemos podido encontrar una forma de caracterizar la continuidad, que es la que tomaremos como definición:

> Decimos que la función f es continua para $x = a$ cuando
> 1. Existe el valor: existe $f(a)$.
> 2. Existe la tendencia: existe $\lim_{x \to a} f(x)$
> 3. Ambos coinciden: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

En aquellos puntos en los que podamos tomar alguna tendencia y no sea continua, diremos que la función es discontinua.

Cuando una función no es continua, se dice que es discontinua. Y clasificaremos así las discontinuidades:

- Si las tendencias son distintas: discontinuidad de salto.
- Si la tendencia existe pero no coincide con el valor: discontinuidad evitable.

La mayoría de las funciones que manejaremos son continuas salvo quizás algunos puntos concretos. Esto es **muy importante** para nosotros:

> Las funciones polinómicas, racionales, radicales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas son continuas en todos los puntos en los están definidas.

Atención, no podemos olvidarlo: las funciones polinómicas y las funciones racionales son continuas en todos los puntos en los que están definidas.

☞ Ejemplo: las funciones $y = x^2 + 4x$ e $y = x - 2$ son continuas en todo punto.

Eso es claro: la gráfica de la primera es una parábola y la de la segunda es una recta; ambas líneas pueden dibujarse de forma "continua".

☞ Ejemplo: La función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x & \text{si } x \leq 1 \\ x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

sólo puede ser discontinua en $x = 1$ (separa-fórmulas) porque cada trozo es continua, pero puede fallar el enganche. Estudiemos ahí:

¿Por qué sólo puede ser discontinua en el separa-fórmulas?

Corrobóralo después dibujando la gráfica.

$\boxed{x=1}$

VALOR: si $x=1$ es $y=5$

TENDENCIAS: $\begin{cases} \text{si } x \to 1- \text{ es } y = x^2 + 4x \to 5 \\ \text{si } x \to 1+ \text{ es } y = x - 2 \to -1 \end{cases}$

Concluimos que hay una discontinuidad de salto finito en $x = 1$.

Forma abreviada

$f(1) = 5$

$f(1-) = 1^2 + 4 \cdot 1 = 5$

$f(1+) = 1 - 2 = -1$

☞ Ejemplo: Continuidad de la función definida por $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 2}$.

La función es continua en todo punto en el que está definida. Así, sólo puede ser discontinua al pasar por $x = 2$ (cero del denominador).

Estudiemos valor y tendencias en él para ver que hay un salto infinito.

Se demuestra que al calcular un límite en una función racional es

$$\lim_{x \to a} f(x) = \left[\frac{k}{0}\right] = \pm\infty$$

con $k \neq 0$.

2. Límite de una función en un punto.

Definiciones.

Lo que vamos a ver aquí es algo que ya ha sido apuntado anteriormente.

Sea $y = f(x)$ una función que puede estar o no definida para $x = a$.

Diremos que

- $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = L$ si para toda $x_n \to a$ con $x_n < a$ es $y_n \to L$.
- $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = L$ si para toda $x_n \to a$ con $x_n > a$ es $y_n \to L$.
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ si para toda $x_n \to a$ es $y_n \to L$.

Recordemos que si
$$L = \pm\infty$$
se dice que la recta
$$x = a$$
es una asíntota vertical.

Funciones polinómicas.

Como los polinomios definen funciones continuas, basta con sustituir: el límite es igual al valor.

☞ Ejemplo: Consideremos $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ y calculemos su límite o tendencia para $x \to -2$.

Calcular ese límite es muy sencillo, basta sustituir pues sabemos que es continua:

$$\lim_{x \to -2} \left(2x^2 + 3x - 5\right) = 2(-2)^2 + 3(-2) - 5 = -3$$

Funciones polinómicas a trozos.

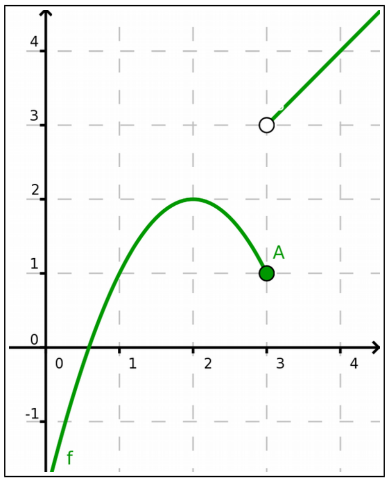
Como vimos antes, a veces es necesario distinguir limites laterales. Recordemos que cuando los laterales son distintos ante una discontinuidad de salto.

☞ Ejemplo: [gráficamente] los límites laterales para $x \to 3$ de la función dibujada son:

$$\text{si } x \to 3_- \text{ es } y \to 1 \quad , \quad \text{si } x \to 3_+ \text{ es } y \to +3$$

O lo que es lo mismo:

$$\lim_{x \to 3-} f(x) = 1 \quad , \quad \lim_{x \to 3+} f(x) = 3$$



☞ Ejemplo: [función polinómica a trozos] El valor y los límites laterales de

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \le 1 \\ 2x^2 + x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

en el separa-fórmulas son, expresados con la forma abreviada:

$f(1) = 1 + 1 = 2$

$f(1-) = 1 + 1 = 2$

$f(1+) = 2 \cdot 1^1 + 1 = 3$

La función f tiene una discontinuidad de salto finito para x=1.

❑ Funciones racionales.

☞ Ejemplo: Calculemos el límite de $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{2x-4}$ para $x \to 1$.

Sólo tenemos que sustituir, porque sabemos que es continua y por ello valor y tendencia coinciden:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x}{2x-4} = \frac{-1}{-2} = 0.5$$

Si x=a no es cero del denominador, la función racional es continua y el límite es igual al valor.

☞ Ejemplo: Hallemos los límites para $x \to 3$ y $x \to -3$ de $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-9}$.

Al sustituir $x = 3$, como es un cero del denominador, no nos sale la tendencia. Con unas tablas de valores la averiguamos:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x+1}{x^2-9} = \left[\frac{4}{0}\right] = \begin{cases} f(3-) = -\infty \\ f(3+) = +\infty \end{cases}$$

Recuerda que al calcular un límite en una función racional es

$$\lim_{x\to a} f(x) = \left[\frac{k}{0}\right] = \pm\infty$$

con $k \neq 0$.

Al sustituir $x = -3$, como es un cero del denominador, no nos sale la tendencia. Con unas tablas de valores la obtenemos:

$$\lim_{x\to -3} \frac{x+1}{x^2-9} = \left[\frac{-2}{0}\right] = \begin{cases} f(-3-) = -\infty \\ f(-3+) = +\infty \end{cases}$$

Hay dos saltos infinitos. Se dice que $x = -3$ y $x = 3$ son asíntotas verticales.

☞ Ejemplo: Calculemos ahora el límite de $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{2x-4}$ para $x \to 2$.

Si sustituimos $x = 2$, como es un cero del denominador, no nos sale la tendencia. Sacaremos entonces el límite con unas tablas de valores, o **simplificando la fracción**:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{2x-4} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 2} \frac{x\cdot\cancel{(x-2)}}{2\cdot\cancel{(x-2)}} = \lim_{x\to 2} \frac{x}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Tenemos así que para $x = 2$ hay una discontinuidad evitable (agujero).

Cuando al sustituir para calcular un límite en una función racional nos sale

$$\left[\frac{0}{0}\right]$$

podemos averiguar el límite sin tablas factorizando y volviendo a sustituir.

☞ Ejemplo: Consideremos $f(x) = \dfrac{3x-3}{x^2-x}$ y calculemos sus límites para $x \to -1$, $x \to 0$ y $x \to 1$.

No es $x = 0$ cero del denominador. El límite es el valor:

$$\lim_{x\to -1} \frac{3x-3}{x^2-x} = \frac{-6}{2} = -3$$

Es $x = 0$ un cero del denominador pero no del numerador: límite infinito:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x-3}{x^2-x} = \left[\frac{-3}{0}\right] = \begin{cases} f(0-) = -\infty \\ f(0+) = +\infty \end{cases}$$

Es $x = 1$ un cero del numerador y del denominador. Simplificaremos:

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x-3}{x^2-x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{3}{x} = \frac{3}{1} = 3$$

En este caso tenemos:

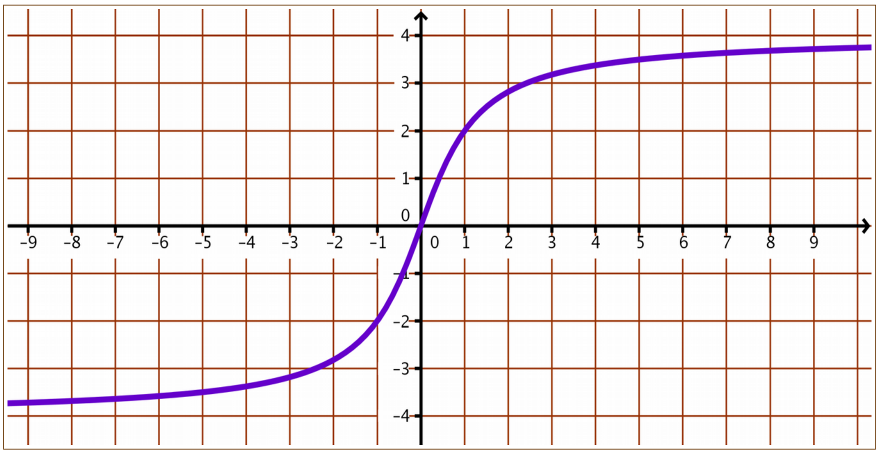
- Discontinuidad de agujero para x=1.
- Discontinuidad de salto infinito para x=0. Hay una asíntota vertical.

3. Límites en el infinito: prolongación.

En el estudio de muchas situaciones que pueden describirse a través de funciones, es necesario conocer muchas veces cómo se comportarán cuando la variable independiente tome valores "enormemente grandes". Son los llamados límites en el infinito, en los que tomamos $x \to -\infty$ y $x \to +\infty$.

¡Ojo! Es distinto de lo estudiado hasta ahora: no se trata de averiguar qué ocurre con las funciones cuando x se aproxima a un número, sino de lo que ocurre cuando x toma valores enormemente grandes/pequeños.

☞ Ejemplo: obtengamos los límites en el infinito de la función de la gráfica:



Vemos que si prolongamos la gráfica hacia la derecha ($x \to +\infty$) entonces la curva va aproximándose cada vez más a la cuadrícula horizontal $y = 4$. Pero si prolongamos la gráfica hacia la izquierda ($x \to -\infty$) entonces la curva va aproximándose cada vez más a la cuadrícula horizontal $y = -4$ Esto puede expresarse de varias maneras:

Observemos que la gráfica tiene dos asíntotas horizontales:

- $y = 4$ para $x \to +\infty$
- $y = -4$ para $x \to -\infty$

Como tendencia: si $x \to -\infty$ es $y \to -4$, si $x \to +\infty$ es $y \to 4$

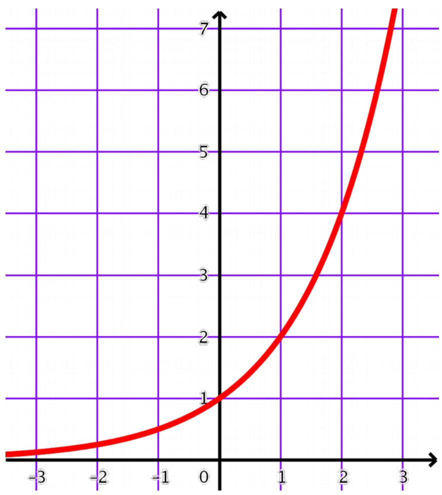
Como límite: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -4$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 4$

Simbólicamente: $f(-\infty) = -4$ y $f(+\infty) = 4$

☞ Ejemplo: obtengamos los límites en el infinito de la función

$$f(x) = 2^x$$

cuya gráfica está dibujada en el margen.



Al prolongar la gráfica hacia la izquierda ($x \to -\infty$) ésta se va pegando cada vez más al eje de abscisas, que es la recta $y = 0$. Sin embargo, cuando se prolonga hacia la derecha ($x \to +\infty$), la gráfica asciende superando todas las líneas de la cuadrículas horizontales.

Esto se puede expresar de varias maneras:

Tendencia: si $x \to -\infty$ es $y \to 0$, si $x \to +\infty$ es $y \to +\infty$

Límite: $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x = 0$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$

Simbólico: $2^{-\infty} = 0$ y $2^{+\infty} = +\infty$.

En general:

Sea $y = f(x)$ una función una función en la que x puede tomar valores tan grandes en valor absoluto como se quiera.

Diremos que

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ si para toda $x_n \to -\infty$ es $y_n \to L$.
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ si para toda $x_n \to +\infty$ es $y_n \to L$.

Cuando L es un número real se dice que la recta $y = L$ es una asíntota horizontal.

Recordemos que el comportamiento para x $\to -\infty$ puede ser totalmente distinto del de x $\to +\infty$

4. Cálculo de límites en el infinito.

Vamos a intentar a obtener una reglas de cálculo para dos casos muy sencillos: funciones polinómicas y funciones racionales.

❑ Funciones polinómicas.

Es sencillo comprobar la siguiente **regla práctica:**

Si $p(x)$ es un polinomio, entonces es

$$\lim_{x \to \pm\infty} p(x) = \pm\infty$$

Donde el signo del límite viene dado sólo por el término de mayor grado.

☞ Ejemplo:

$$\lim_{x \to -\infty} (3x^3 - 4x^2 + 2x - 120) = \lim_{x \to -\infty} (3x^3 - \ldots) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (2x^4 + 3x^2 - 200x) = \lim_{x \to -\infty} (2x^4 + \ldots) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (-3x^3 + 8x^2 - 30x + 5) = \lim_{x \to +\infty} (-3x^3 + \ldots) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (-3x^3 + 8x^2 - 30x + 5) = \lim_{x \to -\infty} (-3x^3 + \ldots) = +\infty$$

☞ Ejemplo: Calculemos los límites en el infinito de

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ -2x + 7 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

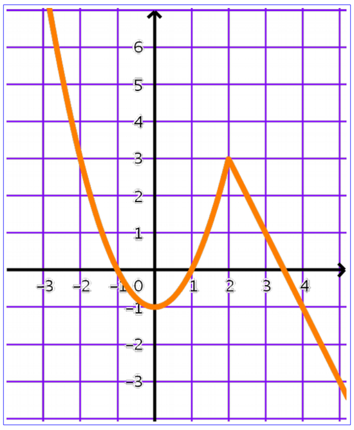
Aplicando la regla anterior:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^2 - 1) = (-\infty)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (-2x + 7) = -2(+\infty) = -\infty$$

Es importante entender las expresiones anteriores como meramente simbólicas.

Observa cómo se corresponde con las prolongaciones de su gráfica.



❑ Funciones racionales.

También tenemos en este caso la sencilla y útil **regla de los grados**:

En el cálculo de

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a\,x^m + \dots}{b\,x^n + \dots} = L$$

- ❑ Si $m < n$ es $L = 0$.
- ❑ Si $m = n$ es $L = \dfrac{a}{b}$
- ❑ Si $m > n$ es $L = \pm\infty$

En este último caso el signo depende sólo de los términos de mayor grado.

Importante: la regla, denominada "regla de los grados", sólo es válida para límites con $x \to \pm\infty$.

☞ Ejemplo: apliquemos la regla para comprobar los límites siguientes

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3+x}{3x^3+5} = \frac{2}{3} \qquad \text{(grados iguales)}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+9}{3x^2+5} = 0 \qquad \text{(mayor grado en denominador)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3+x}{3x^2+5} = -\infty \qquad \text{(mayor grado en numerador con } - \;/\; + = - \text{)}$$

☞ Ejemplo: calculemos los límites en el infinito de

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{6x-6}{3x+1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Aplicamos las reglas estudiadas antes:

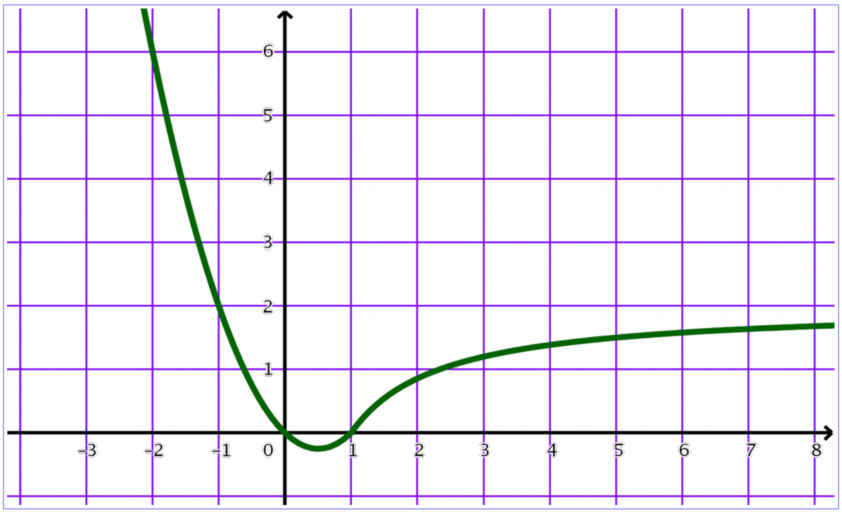
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(x^2 - x\right) = \left(-\infty\right)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x-6}{3x+1} = \frac{6}{3} = 2$$

La gráfica tiene una asíntota horizontal:

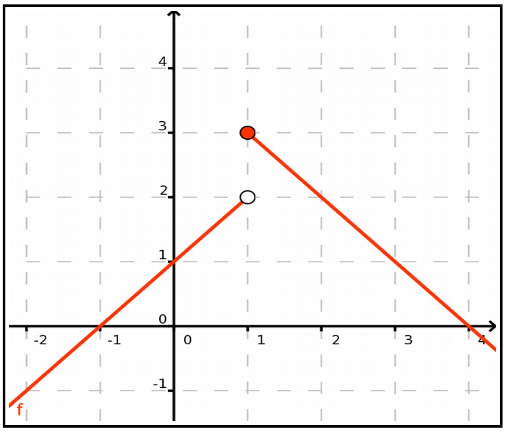
$y = 2$ para $x \to +\infty$

Observemos esto en su gráfica:



Ejercicios

1. Dada $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x<1 \\ 4-x & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$, cuya gráfica es:



a) ¿Es continua la función para $x = 1$?

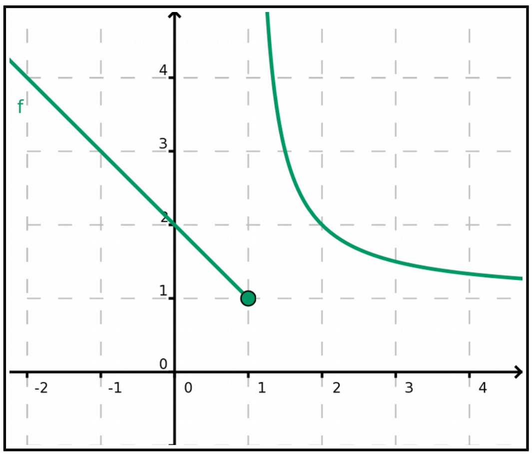
b) Obtén el valor y las tendencias para $x = 1$.

c) ¿Es continua la función para $x = 3$?

d) Obtén el valor y las tendencias para $x = 3$.

2. Dada $f(x)=\begin{cases} 2-x & \text{si} \quad x\leq 1 \\ \dfrac{x}{x-1} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

y cuya gráfica es:



a) ¿Es continua la función para $x = 1$?

b) ¿Y para $x = -1$?

c) Obtén el valor y las tendencias para $x = 1$.

d) Ídem para $x = -1$.

3. La función f está definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad x\leq 1 \\ x+2 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$$

a) ¿Cuál es el único punto en el que puede ser discontinua?

b) Calcula algebraicamente el valor y las tendencias de la función para dicho punto.

c) ¿Es continua en él? Dibuja la gráfica y corrobóralo.

4. Consideremos la función f definida mediante:

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x\leq -2 \\ -x^2+4 & \text{si} \quad -2<x<2 \\ x+2 & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$$

a) ¿Cuáles son los únicos puntos en el que puede ser discontinua?

b) Estudia algebraicamente la continuidad en $x = -2$

c) Estudia algebraicamente la continuidad en $x = 2$.

d) Dibuja la gráfica y comprueba lo anterior.

5. La función definida por

$$f(x)=\frac{x}{x-2}$$

no es continua para $x = 2$.

a) ¿Por qué?

b) ¿Qué discontinuidad tiene?

6. Consideremos f definida por

$$f(x)=\frac{x^2-3x}{x-3}$$

a) Calcula la tendencia de $f(x)$ para $x\to 3$.

b) ¿Es continua para $x = 3$?

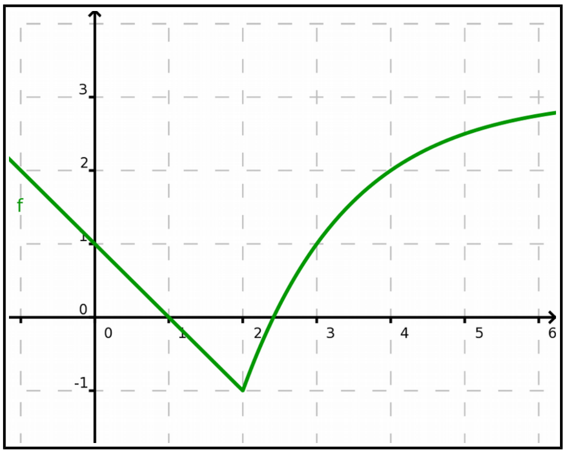
7. Consideremos la función f definida mediante:

$$f(x)=\frac{x-1}{x^2-1}$$

a) ¿Cuáles son los únicos puntos en los que es discontinua?

b) Estudia qué discontinuidad presenta en dichos puntos.

8. Sea $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < 2 \\ 3 - 2^{4-x} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$, cuya gráfica es:

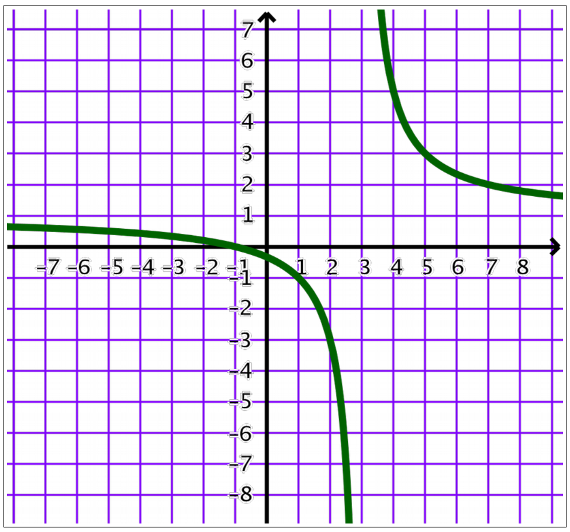


a) Obtén las tendencias de $f(x)$ para $x \to 2$. ¿Es continua en ese punto?

b) Obtén las tendencias de $f(x)$ para $x \to -\infty$ y para $x \to +\infty$.

c) ¿Tiene alguna asíntota horizontal?

9. Sea $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$, cuya gráfica es:



a) Obtén las tendencias de $f(x)$ para $x \to 3$. ¿Es continua en ese punto?

b) Obtén las tendencias de $f(x)$ para $x \to -\infty$ y para $x \to +\infty$.

c) ¿Cuáles son sus asíntotas?

10. Sea

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si} & x \leq -2 \\ 2x + 6 & \text{si} & -2 < x < 1 \\ 9 - x^2 & \text{si} & x > 1 \end{cases}$$

a) Estudia su continuidad.

b) Halla sus tendencias para $x \to -\infty$ y $x \to +\infty$.

c) ¿Cuáles son sus asíntotas?

11. Sea $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Estudia su continuidad.

b) Halla sus tendencias para $x \to -\infty$ y $x \to +\infty$.

c) ¿Cuáles son sus asíntotas?

12. Sea $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$

a) Estudia el comportamiento de $f(x)$ para $x \to -\infty$ y para $x \to +\infty$.

b) Calcula $\lim_{x \to 1} f(x)$.

c) Obtén el límite de $f(x)$ para $x \to -1$.

d) Estudia la continuidad de la función.

e) ¿Cuáles son sus asíntotas?

13. La función f está definida por

$$f(x) = \frac{x^2}{x-3}$$

a) Estudia el comportamiento de $f(x)$ para $x \to -\infty$ y para $x \to +\infty$.

b) Calcula $\lim_{x \to 3} f(x)$.

c) Estudia la continuidad de la función.

d) ¿Cuáles son sus asíntotas?

14. La función f está definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ 6 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Obtén los límites de $f(x)$ para $x \to 1$, $x \to 2$ y $x \to 3$.

b) Estudia su continuidad.

c) ¿Tiene asíntotas horizontales?

15. Obtén los límites para $x \to -\infty$ y $x \to +\infty$ de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases} 2x+5 & \text{si} \quad x \le 1 \\ x^2 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

b) $g(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & \text{si} \quad x \le 3 \\ 5-x & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$

¿Tienen asíntotas horizontales?

16. Obtén los límites para $x \to -\infty$ y $x \to +\infty$ de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{2x^2+x-1}{3x-3}$

b) $g(x)=\dfrac{x^3+x^2-10}{2x^3-x+1}$

c) $h(x)=\dfrac{x^2+1}{x^4-x^2}$

d) $u(x)=\dfrac{x^2+x-x^3}{2x^2+5x-1}$

¿Tienen asíntotas horizontales? ¿Cuáles son?

17. Sea la función

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+x-6}$$

a) Comprueba que tiene una asíntota horizontal. ¿Cuál es?

b) Estudia su continuidad.

c) ¿Tiene alguna asíntota vertical?

18. Sea la función

$$f(x)=\frac{x^2-3x-10}{x^2+2x}$$

a) Obtén sus límites en el infnito

b) Calcula los límites de la función para $x \to -2$, $x \to 0$ y $x \to 2$

c) Estudia su continuidad.

d) ¿Cuáles son sus asíntotas verticales?

19. Considera $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ -2x+1 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

a) Estudia el comportamiento de la función para $x \to \pm\infty$. ¿Tiene asíntotas horizontales?

b) Solo hay un punto en el que puede ser discontinua, ¿cuál es? ¿Qué le ocurre allí a la función? Corrobóralo dibujando su gráfica.

20. Considera

$$f(x)=\begin{cases} x^2+k & \text{si} \quad x<0 \\ x+1 & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$$

a) Estudia el comportamiento de la función para $x \to \pm\infty$. ¿Tiene asíntotas horizontales?

b) Calcula las tendencias de $f(x)$ para $x \to 0$.

c) ¿Para qué valor de k es continua?

21. Dada la función $f(x)=3-2^{3-x}$:

a) Calcula las tendencias en el infinito.

b) Elabora una tabla de valores y dibújala.

c) A la vista de su gráfica, ¿crees que es una función continua?

22. Dada la función $f(x)=\ln(x+1)$.

a) Halla su dominio (recordando que sólo podemos calcular el logaritmo de un número positivo)

b) Con sendas tabla de valores, obtén la tendencia de la función para $x \to 1+$ y para $x \to +\infty$.

c) Elabora una tabla de valores y dibuja su gráfica.

d) A la vista de su gráfica, ¿crees que es una función continua?

23. Calcula:

a) $\lim_{x \to 0} 3^{\frac{1}{x}}$

b) $\lim_{x \to 1} \log\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$

c) $\lim_{x \to 0} \log\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$

José Álvarez Fajardo

Cuestiones

1. Sea $y=f(x)$ una función que es continua en todo punto y que verifica $f(3)=1$.

¿Qué ocurre con $f(x)$ cuando $x\to 3$?

2. Sea $y=f(x)$ una función con $f(x)\to 0$ para $x\to 1$.

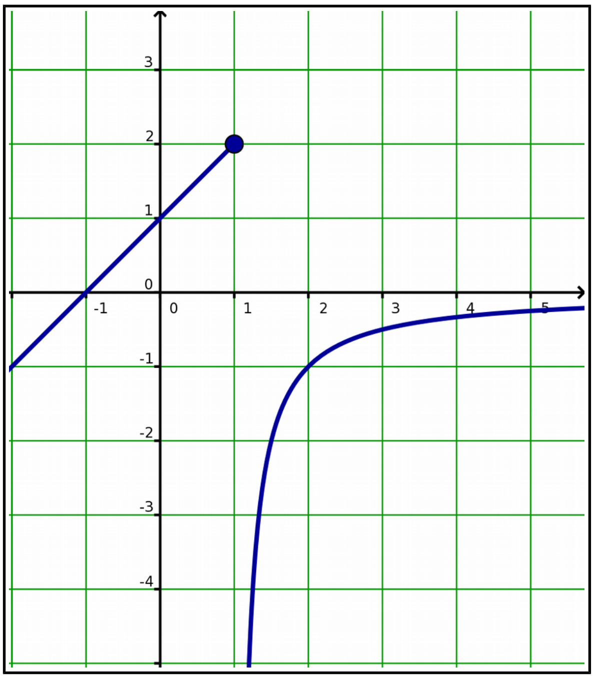
¿Qué puede decirse de $f(1)$?

3. Para calcular $\lim_{x\to 2} f(x)$, ¿es preciso que la función esté definida para $x = 2$?

4. Dada una función $y=f(x)$ encontramos que para una sucesión $x_n\to 2$ es $y_n\to 1$.

Explica por qué esto no significa que necesariamente sea $\lim_{x\to 2} f(x)=1$.

5. La función $y=f(x)$ tiene la gráfica siguiente:



a) ¿Es continua en todo punto?

b) Obtén las tendencias para $x\to 1$.

c) Obtén las tendencias para $x\to\pm\infty$.

d) Indica cuales son sus asíntotas.

6. Dibuja la gráfica de una función que tenga dos asíntotas horizontales distintas.

7. Dibuja la gráfica de una función que tenga:

a) Dos asíntotas verticales: $x = -2$ y $x = 2$.

b) Una asíntota horizontal: $y = 1$.

8. Una función polinómica a trozos como

$$f(x)=\begin{cases} p(x) & \text{si} \quad x<a \\ q(x) & \text{si} \quad x\geq a \end{cases}$$

sólo puede ser discontinua... ¿Cuándo? ¿Es discontinua necesariamente?

9. Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios. Razona cuáles son los únicos puntos en los que es discontinua

$$y=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

¿Qué te parece esta idea?

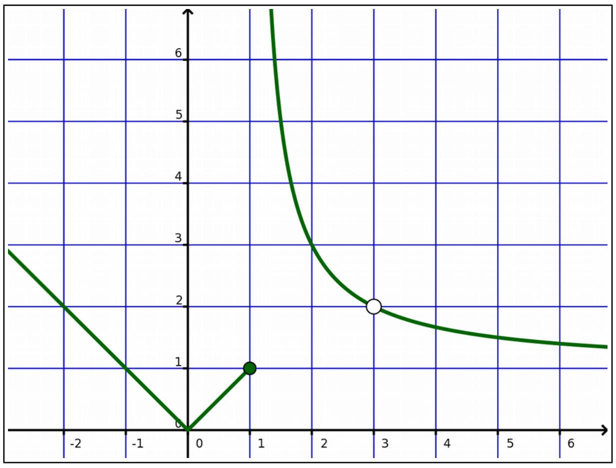
10. Dibuja la gráfica de una función que tenga:

a) Una asíntota vertical: $x = 2$.

b) Dos asíntotas horizontales: $y = -2$, $y = 3$.

Autoevaluación

1. Observa la gráfica de la función $y = f(x)$ y responde:



a) Estudia la continuidad de la función, señalando valor y tendencias en las discontinuidades.

b) Indica las tendencias de $f(x)$ la función para $x \to \pm\infty$.

c) ¿Qué asíntotas tiene la gráfica?

2. Dada la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + x & \text{si} \quad x \le 0 \\ 1 + 2^{1-x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) Estudia algebraicamente su continuidad.

b) Obtén los límites en el infinito de la función.

c) Determina las asíntotas de la gráfica de f

d) Dibuja su gráfica.

3. Sea

$$f(x) = \frac{2x^2 - 50}{x^2 - 4x - 5}$$

a) Calcula los límites de $f(x)$ para $x \to \pm\infty$.

b) Estudia la continuidad de la función.

c) ¿Cuáles son las asíntotas de su gráfica?

4.

a) Si f es una función continua y $f(1) = 5$, ¿cuál es el límite de $f(x)$ para $x \to 1$?

b) La recta $x = -2$ es una asíntota vertical de la gráfica $y = f(x)$. ¿Qué puede decirse de la continuidad de f en dicho punto?

c) La función $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ sólo es discontinua en dos puntos. ¿Cuáles son?

d) Dibuja una gráfica $y = f(x)$ que verifique

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = 2 \text{ y } \lim_{x\to 2-} f(x) = -\infty$$

e) Con unas tablas de valores adecuadas calcula

$$\lim_{x\to 2+} \ln(2x-4) \text{ y } \lim_{x\to 2-} 3^{\frac{1}{x-2}}$$

Autoevaluación

1.

a) Vemos que es continua en todo punto salvo para $x = 1$ (discontinuidad de salto infinito) y para $x = 3$ (discontinuidad evitable o de agujero).

Veamos en $x = 1$:

Valor: si $x = 1$ es $y = 1$

Tendencias: $\begin{cases} \text{si } x \to 1- & \text{es } y \to 1 \\ \text{si } x \to 1+ & \text{es } y \to +\infty \end{cases}$

Veamos en $x = 3$:

Valor: si $x = 1$ es $y = \emptyset$

Tendencias: $\begin{cases} \text{si } x \to 3- & \text{es } y \to 2 \\ \text{si } x \to 3+ & \text{es } y \to 2 \end{cases}$

b) Las tendencias en el infinito son:

si $x \to -\infty$ es $y \to +\infty$

si $x \to +\infty$ es $y \to 1$

c) Asíntota vertical (por el apartado a): $x = 1$

Asíntota horizontal (por el apartado b): $y = 1$

2.

a) La función sólo puede ser discontinua en $x = 0$, por ser el separa-fórmulas de trozos continuos.

Veamos en $x = 0$:

Valor: si $x = 0$ es $y = 0$

Tendencias: $\begin{cases} \text{si } x \to 0- & \text{es } y = -x^2 + x \to 0 \\ \text{si } x \to 3+ & \text{es } y = 1 + 2^{1-x} \to 3 \end{cases}$

Concluimos que hay una discontinuidad de salto finito ($s = +3$) para $x = 0$

b) Las tendencias en el infinito son:

si $x \to -\infty$ es $y = -x^2 + x \to -\infty$

si $x \to +\infty$ es $y = 1 + 2^{1-x} \to 1$

En el primer caso se debe a que

$$-\left(-\infty\right)^2 = +\infty$$

Y en el segundo a que

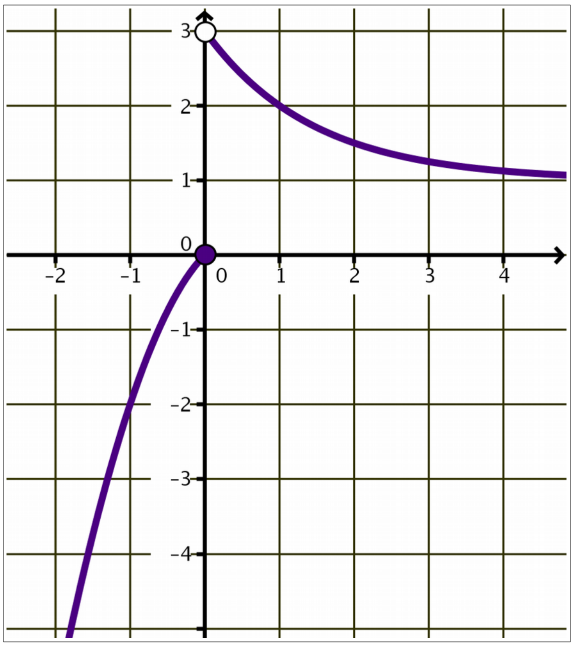
$$2^{-\infty} = 0$$

c) Asíntotas verticales (por el apartado a): no hay.

Asíntota horizontal (por el apartado b):

$$y = 1$$

d) La gráfica se compondrá de un trozo de parábola ($x \leq 1$) y de curva exponencial ($x > 1$):



3.

a) Aplicamos la regla de los grados. Como el grado del numerador y del denominador es el mismo

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2 - 50}{x^2 - 4x - 5} = \frac{2}{1} = 2$$

b) La función sólo puede ser discontinua en los ceros del denominador, que son:

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \;\to\; x = -1\,, x = 5$$

Veamos en $x = -1$:

Valor: $f(0) = \left[\dfrac{-48}{0}\right] = \emptyset$

Tendencias: $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \left[\dfrac{-48}{0}\right] = \pm\infty$

Concluimos que hay una discontinuidad de salto infinito para $x = -1$.

Veamos en $x = 5$:

Valor: $f(5) = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \emptyset$

Tendencias: $\lim\limits_{x\to5} f(x) = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{*}{=} \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3}$

Simplificamos para evitar la indeterminación:

$$\frac{2x^2-50}{x^2-4x-5}=\frac{2(x+5)(x-5)}{(x+1)(x-5)}=\frac{2(x+5)}{(x+1)}(*)$$

Concluimos que hay una discontinuidad evitable o de agujero para $x=5$

c) Asíntota vertical (por el apartado b):

$$x=-1$$

Asíntota horizontal (por el apartado a):

$$y=2$$

4.

a) Si es continua, el valor de la función y la tendencia coinciden:

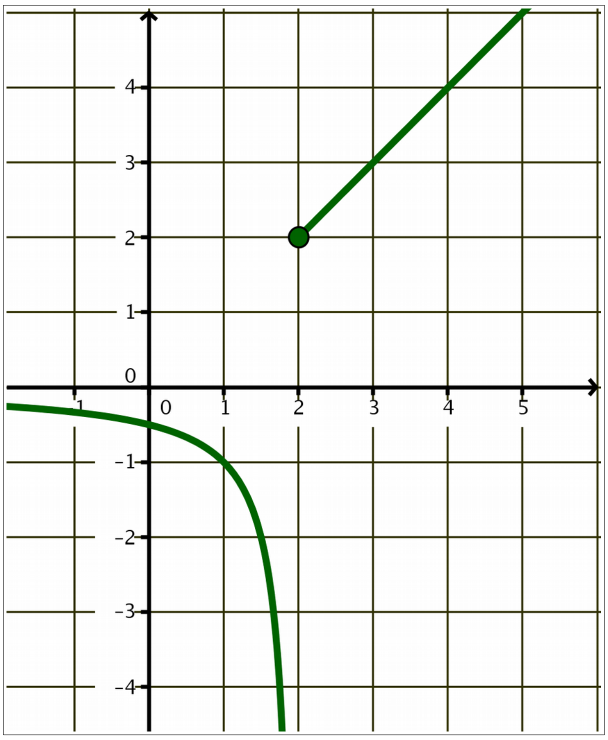
$$\text{si } x\to 1 \text{ es } f(x)\to 5$$

b) Pues la función no es continua cuando llega al valor $x=-2$: tendrá un salto infinito.

c) Un cociente de polinomios sólo es discontinuo en los valores que anulan el denominador. En este caso: $x=-1$ y $x=1$.

Observemos que la función no existe en esos valores.

d) Esta es una de las infinitas posibilidades:



e) Es fácil comprobar que:

$$\lim_{x\to 2+}\ln(2x-4)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2-}3^{\frac{1}{x-2}}=0$$