TEMA 8

Funciones: Gráficas y Operaciones

Contenidos

1. Concepto de función. Terminología.
2. Rectas, parábolas y sus trozos.
3. Gráfica de una función. Análisis.
4. Otras funciones elementales..
5. Operaciones aritméticas.
6. Composición de funciones.
7. Función inversa o recíproca.

Tiempo estimado

10 sesiones

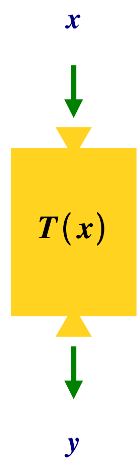
Criterios de Evaluación

1. Conoce la terminología asociada al concepto de función: dominio, imagen,...
2. Comprende qué es la gráfica de una función.
3. Sabe analizar la variación de una función a través de su gráfica.
4. Conoce las gráficas de las funciones elementales.
5. Sabe realizar las operaciones básicas con las funciones.
6. Sabe componer funciones elementales y obtener imágenes numéricas.
7. Asimila el concepto de función inversa y sabe obtenerla en casos elementales.

1.Concepto de función. Terminología.

❑ Conceptos básicos

Procedamos a dar la definición y ver los términos que se usan normalmente:



- Una función real f es una transformación que a cada número x le hace corresponder exactamente un número designado por $y = f(x)$:

$$x \xrightarrow{f} y$$

- El número x es llamado original, y se llama dominio al conjunto de todos los originales.
- Al número y se le llama "transformado o imagen", llamándose recorrido al conjunto de todas las imágenes.

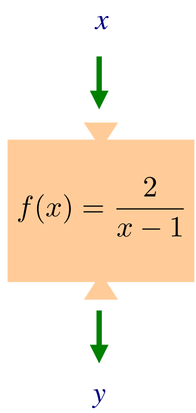
Podemos imaginar una función f como una "máquina transformadora". En ella van entrando los números "x" y van saliendo sus imágenes $y = f(x)$.

Cómo se calcula el transformado de cada número entrante depende de la función en cuestión. Es usual que dicho procedimiento esté dado a través de una fórmula, denominándose a

- x variable entrante o "independiente"
- y variable saliente o "dependiente".

El dominio será "el conjunto de todos los números admitidos en la máquina" y el recorrido el "conjunto de todos los números salientes de la máquina".

☞ <u>Ejemplo</u>: consideremos la función f definida por $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$.



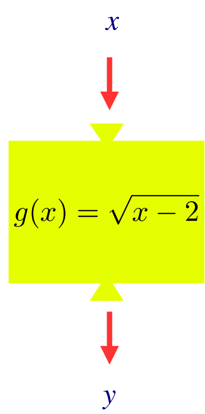
- Veamos algunas imágenes o transformados:

$$\begin{array}{lcl} x = 0 & \to & y = f(0) = -2 \\ x = 3 & \to & y = f(3) = 1 \\ x = 1 & \to & y = f(1) = \emptyset \end{array}$$

- El dominio es el conjunto de los valores x para los que existe la fórmula $\dfrac{2}{x-1}$. Es claro que no puede ser $x = 1$. Así:

$$\mathbb{D} = (-\infty\,,1) \cup (1\,,+\infty)$$

☞ <u>Ejemplo</u>: sea g la función definida por la fórmula $g(x) = \sqrt{x-2}$.



- Veamos algunos transformados:

$$\begin{array}{lcl} x = 4 & \to & y = g(4) = \sqrt{2} \\ x = 2 & \to & y = g(2) = 0 \\ x = 1 & \to & y = g(1) = \emptyset \end{array}$$

- Observemos que su dominio es el conjunto de los valores x para los que existe $\sqrt{x-2}$. Es claro que debe ser $x \geq 2$. Así:

$$D = [2\,,+\infty)$$

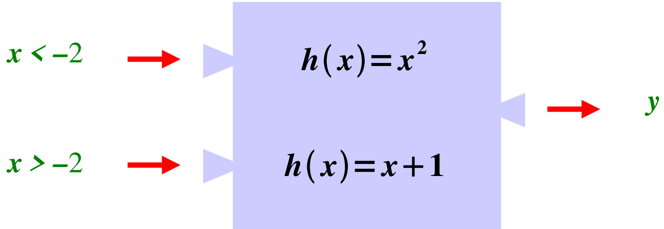
☞ Ejemplo: sea h la función definida por

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < -2 \\ x+1 & \text{si} \quad x > -2 \end{cases}$$

La función de la izquierda está definida a través de varias fórmulas. Según sea el valor de x habrá que usar una u otra.

A esta clase de funciones se las llama funciones "a trozos" o "definidas por partes".

- El esquema de esta función es:



- Veamos algunos transformados:

$$\begin{array}{lll} x = -4 & \rightarrow & y = h(-4) = (-4)^2 = 16 \\ x = -2 & \rightarrow & y = h(-2) = \emptyset \\ x = 3 & \rightarrow & y = h(3) = 3 + 1 = 4 \end{array}$$

- Su dominio es el conjunto de los valores x para los que existe la función. Es claro que para todo valor de x salvo para el -2. Así:

$$\mathbb{D} = (-\infty\,, -2) \cup (-2\,, +\infty)$$

☞ Ejemplo: consideremos la función $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

- ¿Cuál es el original de $y = 5$?

  Buscamos un x con $5 = \dfrac{2x+1}{x-1}$. Resolviendo la ecuación tenemos que es $x = 2$.

También se expresa de esta forma: la **anti-imagen** de $y = 3$ es $x = \dfrac{5}{3}$.

- Comprueba que $y = 2$ no tiene original (ello quiere decir que ese valor no está en el recorrido).

❑ Gráfica de una función.

Una función también puede definirse a través de su gráfica: conjuntos de puntos dados por las parejas $(x\,, y)$ que construye la función.

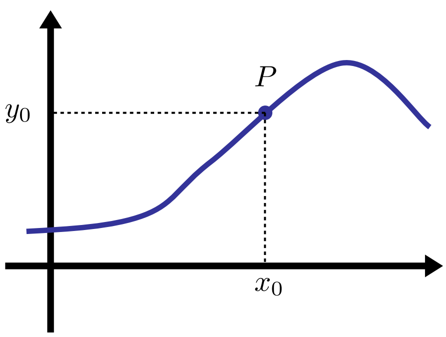
La gráfica de una función f es el conjunto de los puntos del plano

$$\mathcal{G} = \{(x\,, y) : y = f(x)\}$$

La gráfica de una función es muy útil para el conocimiento de determinados aspectos de la función, como es el estudio de la variación global (¿en qué intervalos crece la función?).

Aunque no lo es tanto para el estudio de otros aspectos, como es al cálculo "exacto" de valores (para esto es más útil la fórmula).

Esquemáticamente, para la función f:



$$P \in \mathcal{G}(f) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$$

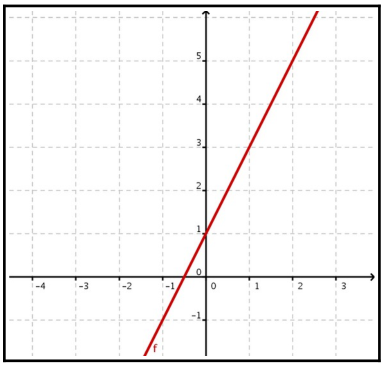
2.Gráficas de funciones elementales.

❑ Funciones afines

Son las definidas por una fórmula de la forma $f(x) = ax + b$.

Recuerda que $y = mx + n$ es la ecuación explícita de una recta con pendiente m. Si la pendiente es positiva, la recta es creciente, si es negativa la recta es decreciente y si la pendiente es cero, es una recta horizontal.

En el margen se ha representado la función $y = 2x + 1$.



❑ Funciones cuadráticas

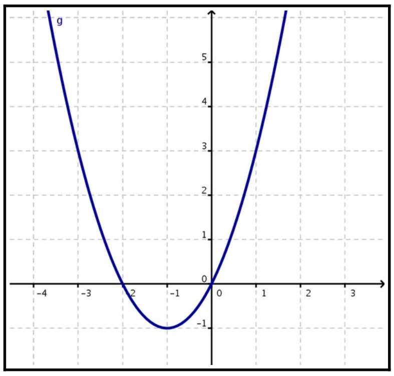
Son las definidas por una fórmula de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.

La gráfica es una parábola de eje vertical, respecto de la que es simétrica, y:

- Si $a > 0$ la parábola tiene las ramas hacia arriba (convexa).
- Si $a < 0$ la parábola tiene las ramas hacia abajo (cóncava).

La abscisa del vértice viene dada por $x_v = \dfrac{-b}{2a}$

Aquí tenemos representada $y = x^2 + 2x$.

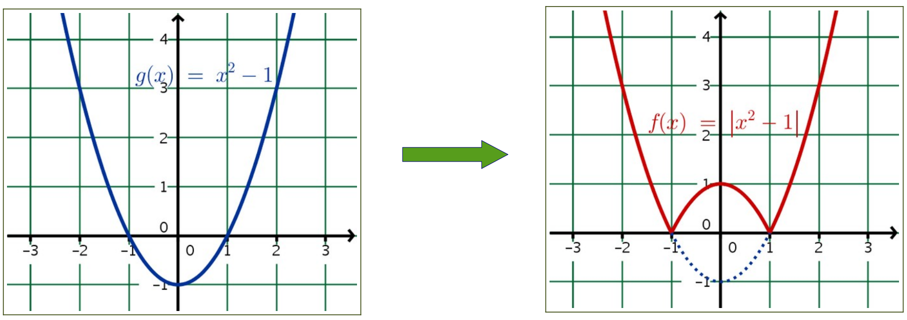


❑ Función valor absoluto

Para dibujar una función $y = |f(x)|$ podemos proceder así:

- Primero dibujamos la gráfica $y = f(x)$.
- Recordemos que una gráfica es positiva donde está sobre el eje de abscisas y negativa allí donde está por debajo.
- Por ello reflejamos la parte de la gráfica que esté bajo el eje de abscisas (así le cambiamos el signo y ya queda con ordenada positiva).

Recuerda:
$|-5| = 5$, $|+5| = 5$
Así:
$|x| = \max(-x, x)$



Aquí se ha representado $y = |x^2 - 1|$ partiendo de $y = x^2 - 1$: basta reflejar sobre el eje de abscisas la zona donde la parábola es negativa.

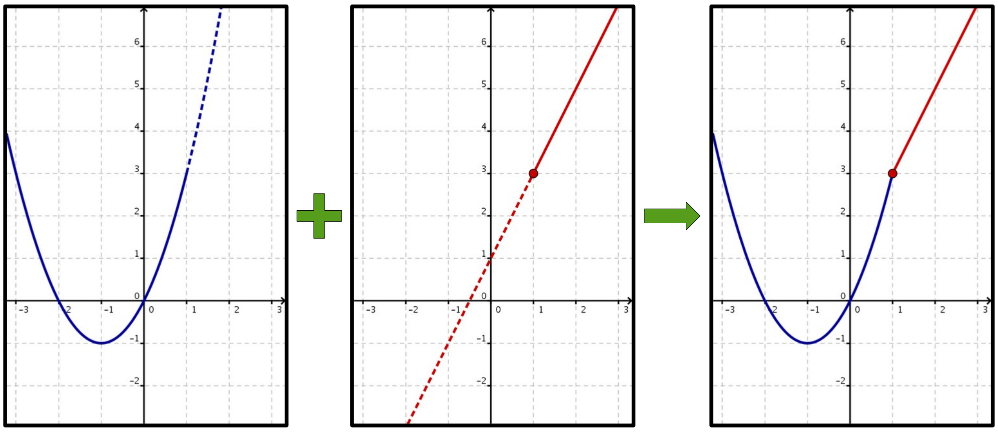
Función a trozos

Una función a trozos está definida mediante varias fórmulas y por ello su gráfica está compuesta por los trozos de las correspondientes gráficas en su intervalo del dominio. Consideremos, por ejemplo, la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si} \quad x < 1 \\ 2x + 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

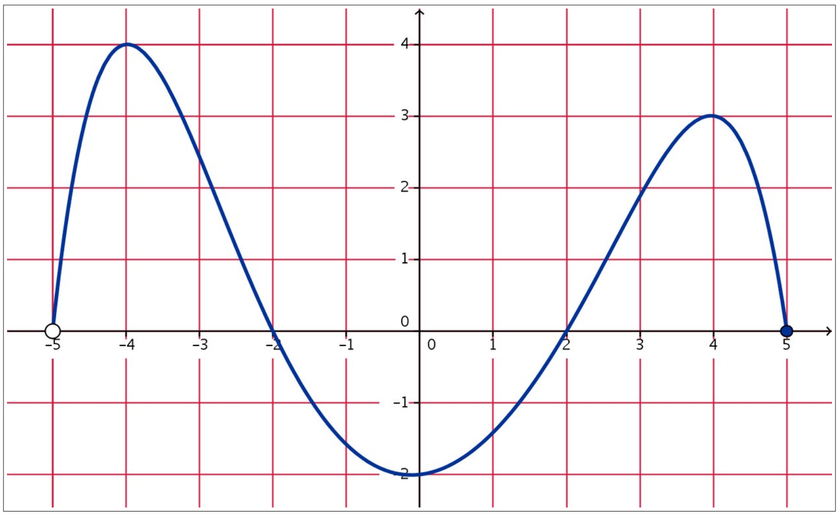
Nótese que es posible que las gráficas de los diferentes trozos pueden no ensamblar de manera continua, produciéndose agujeros (discontinuidades evitables) o roturas con deslizamiento (discontinuidades de salto).

- La gráfica se compone de dos partes bien diferenciadas:
  - El "trozo de parábola" $y = x^2 + 2x$ para $x < 1$
  - El "trozo de recta" $y = 2x + 1$ para $x \geq 1$.



3. Análisis de la gráfica de una función

Vamos a analizar la gráfica de la función $y = f(x)$ que aquí vemos:



☞ Dominio: $\mathbb{D} = (-5, +5]$.

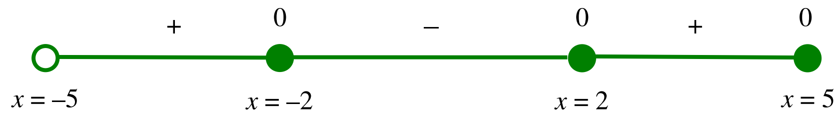
☞ Recorrido: $R = [-2, +4]$.

- Dominio: conjunto de valores x para los que hay gráfica.
- Recorrido: conjunto de valores y para los que hay gráfica.

- Continuidad: es continua para todos los valores de su dominio. Ahora bien, hay una singularidad: para $x = -5$ hay agujero en el inicio de la gráfica (es denominado discontinuidad evitable).

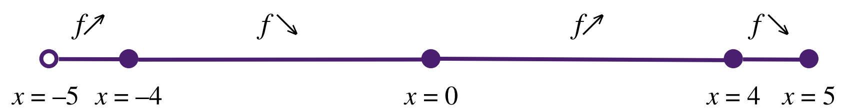
Continuidad: ¿la gráfica puede realizarse con un solo trazo (continua) o presenta agujeros, roturas, saltos,... (discontinua)?

- Signo: resumimos la variación del signo de la función en el siguiente esquema, en el que también señalamos sus ceros.



- Ceros: cortes con el eje X
- Positiva: gráfica sobre el eje X
- Negativa: gráfica bajo el eje X

- Monotonía: he aquí el esquema que muestra los intervalos en los que la función crece o decrece:



Monotonía: ¿en qué intervalos de x la función y = f(x) crece o decrece?

- Es f ↗ en I si al aumentar x también aumenta y.
- Es f ↘ en I si al aumentar x disminuye y

- Acotación: vemos que la función está acotada superiormente ($y = 5$ es cota superior) y acotada inferiormente ($y = -3$) es cota inferior. Concluimos, pues, que la función está acotada.
- Extremos:

  $A = (-4\,,4)$ es un máximo relativo y es el máximo absoluto.

  $B = (0\,,-2)$ es un mínimo relativo y es el mínimo absoluto.

  $C = (4\,,3)$ es un máximo relativo.

  $D = (6\,,0)$ es un mínimo relativo.

Extremos: puntos en los que una función presenta sus máximos o mínimos (si existen).

Diferenciamos extremos relativos y extremos absolutos.

- Asíntotas: la gráfica no presenta asíntotas de ningún tipo.

Las asíntotas son rectas que sirven de guía para prolongar las ramas infinitas de algunas funciones.

- Simetrías: no apreciamos simetrías.
- Periodicidad: no es una función periódica.

Periodicidad: recuerda que las funciones seno y coseno sí son periódicas.

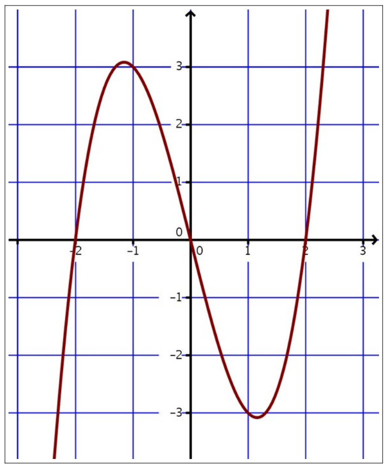
4.Otras funciones elementales

❑ Funciones polinómicas

Las gráficas $y = p(x)$ donde p es un polinomio de grado superior a dos son curvas definidas y continuas en todo $\mathbb{R}$.

Entre los puntos más interesantes de esas curvas destacamos los extremos relativos y los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

En el margen se ha representado $y = x^3 - 4x$.



Observa que para prolongar hacia la izquierda debemos dibujar una rama parabólica hacia abajo y para prolongarla hacia la derecha dibujamos una rama parabólica hacia arriba. Esto se resume, simbólicamente, así:

$$\text{Si } x \to -\infty \text{ es } y \to -\infty$$

$$\text{Si } x \to +\infty \text{ es } y \to +\infty$$

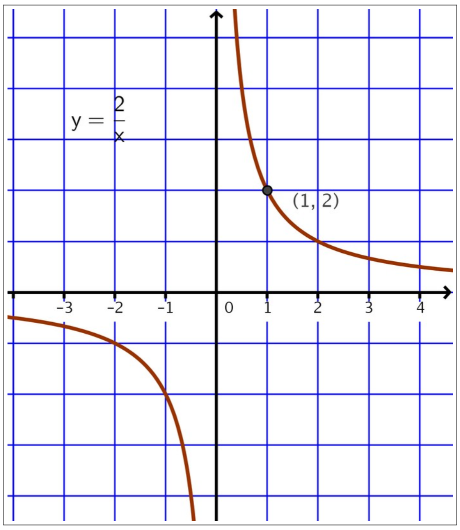
Función de proporcionalidad inversa.

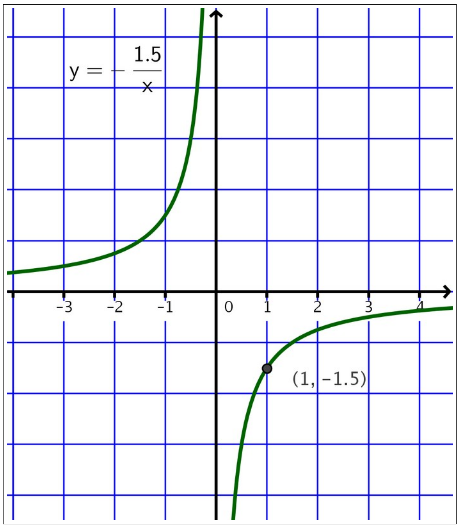
Son las definidas por $f(x) = \frac{c}{x}$ donde es $c \neq 0$.

Observa que su dominio es $\mathbb{D} = \mathbb{R} - \{0\}$

La curva obtenida se denomina hipérbola. Las hipérbolas tienen dos asíntotas que en este caso son los ejes de coordenadas.

Aquí tenemos representadas usando Geogebra un par de ellas:





A partir de ellas, trasladando vertical y horizontalmente obtenemos

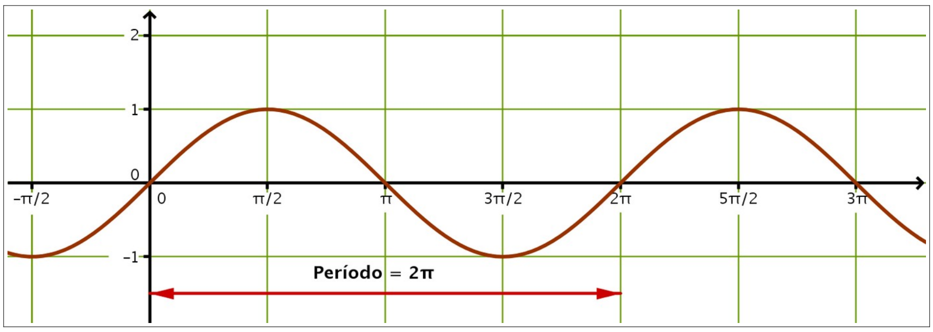
$$f(x) = b + \frac{c}{x - a}$$

En ésta la asíntota vertical es ahora $x = a$ y la asíntota horizontal $y = b$ (rectas que sirven de guías de prolongación para sus ramas),

Observemos:
- Si c > 0 decrece
- Si c < 0 crece.

Funciones seno/coseno

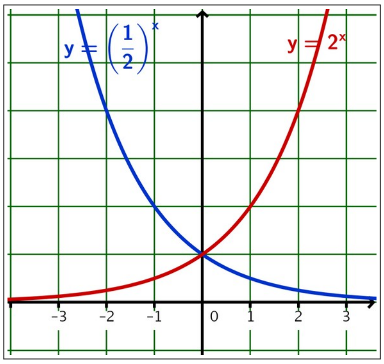
Aquí tenemos representada usando Geogebra la función seno:



La línea obtenida se denomina curva sinusoidal. Es una función definida y continua en toda la recta real. Observa su forma de onda y un aspecto fundamental: su periodicidad. Es una función 2π-periódica.

Varía entre $y = -1$ e $y = +1$. No tiene asíntotas ni ramas infinitas.

❑ Funciones exponenciales

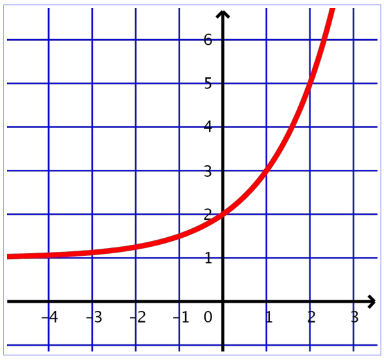


Son las definidas por $f(x) = a^x$ con $a > 0$, $a \neq 1$.

Están definidas y son continuas para todo número real. Siempre son positivas y pasan por los puntos $(0\,,1)$ y $(1\,,a)$. Ahora bien:

- Si $a > 1$ es creciente
- Si $a < 1$ es decreciente

Observemos que la prolongación horizontal de la curva es muy diferente si vamos hacia la izquierda o si vamos hacia la derecha.



Con la ayuda de Geogebra se ha dibujado en el margen $y = 2^x + 1$.

Para prolongar hacia la izquierda usamos la asíntota $y = 1$ pero que si prolongamos hacia la derecha tenemos una rama parabólica (va hacia arriba). Esto se resume simbólicamente así:

Si $x \to -\infty$ es $y \to 1$ Asíntota horizontal $y = 1$ hacia la izquierda

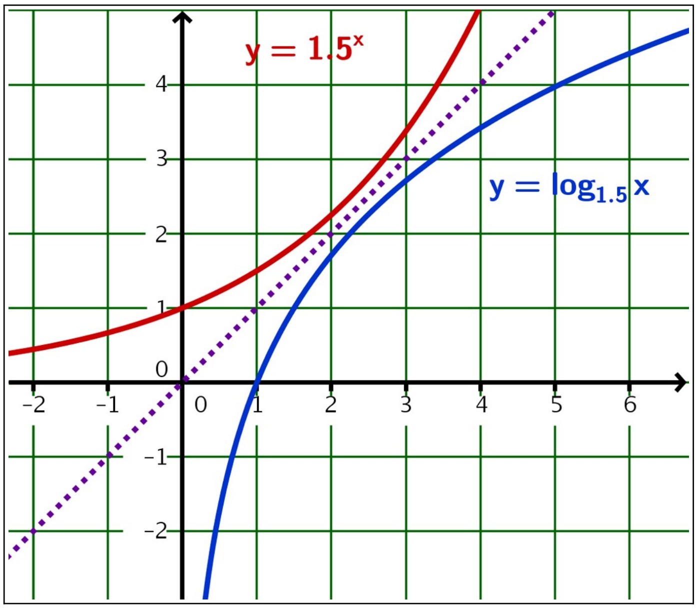
Si $x \to +\infty$ es $y \to +\infty$ Rama parabólica para arriba hacia la derecha

❑ Función logarítmica

Son las definidas por $f(x) = \log_a x$ con $a > 0$, $a \neq 1$.

Recordemos que $y = \log_a x$ significa que $a^y = x$.

Aquí se han dibujado en los mismos ejes $y = 1.5^x$ con $y = \log_{1.5} x$:



Observemos la simetría de ambas gráficas respecto de la recta y=x.

Así, el punto (a,b) está en una sólo cuando el punto (b,a) está en la otra.

Ello es debido a que la logaritmación es la operación inversa de la exponenciación.

Las funciones logarítmicas están definidas y son continuas en $(0\,,+\infty)$, siendo $x = 0$ una asíntota vertical.

Todas pasan por los puntos $(1\,,0)$ y $(a\,,1)$. Ahora bien:

- Si $a > 1$ es creciente
- Si $a < 1$ es decreciente

5.Operaciones aritméticas con funciones.

Dadas dos funciones f y g es fácil introducir a partir de ellas su suma, su diferencia, su producto o su cociente: bastará con que efectuemos esas operaciones en los valores comunes a sus respectivos dominios.

Consideremos las funciones f y g.

Para cada x común al dominio de ambas funciones definimos:

- La función suma $f+g$ como $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
- La función diferencia $f-g$ como $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$
- La función producto $f\cdot g$ como $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$
- La función cociente $\dfrac{f}{g}$ como $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

  en este caso, además, deberá ser $g(x)\neq 0$.

☞ Ejemplo: si $f(x)=3x$, $g(x)=x-2$:

$(f+g)(0)=f(0)+g(0)=0+(-2)=-2$

$(f-g)(1)=f(1)-g(1)=3-(-1)=4$

$(f\cdot g)(3)=f(3)\cdot g(3)=9\cdot 1=9$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)(2)=\dfrac{f(2)}{g(2)}=\dfrac{6}{0}=\emptyset$

☞ Ejemplo: si $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$, $g(x)=2x$:

$$(f+g)(x)=\frac{2x+1}{x-1}+\frac{2x}{1}=\frac{(2x+1)\cdot 1+2x\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot 1}=\frac{2x^2+1}{x-1}$$

$$(f\cdot g)(x)=\frac{2x+1}{x-1}\cdot\frac{2x}{1}=\frac{4x^2+2x}{x-1}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{2x+1}{x-1}:\frac{2x}{1}=\frac{2x+1}{2x^2-2x}$$

6.Composición de funciones.

Para comprender esta forma tan usada de operar con funciones tomemos, en primer lugar un ejemplo. Consideremos la función:

$$T(x)=\sqrt{\log_{10}(x^2)}$$

Si deseamos obtener la imagen de un número, hemos de encadenar varias transformaciones –y en un determinado orden–:

1º. Calcular el cuadrado (del número).

2º. Calcular el logaritmo (del resultado anterior).

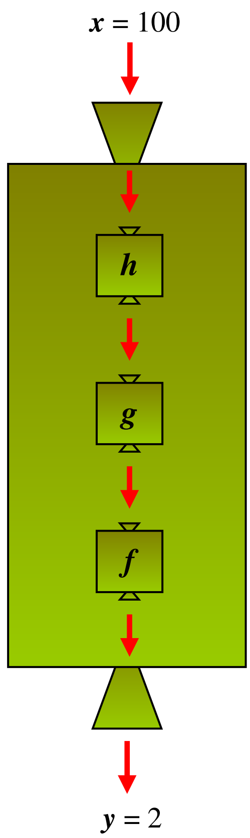
3º. Calcular la raíz cuadrada (del resultado anterior).

Como vemos, esta transformación se realiza encadenando otras más simples, que son:

$$f(x)=\sqrt{x}\ ,\ g(x)=\log_{10}(x) \text{ y } h(x)=x^2$$

Para $x=100$, por ejemplo:

$$\begin{tikzcd} x=100 \arrow[r, "h"] \arrow[rrr, bend right, "T"'] & 10\,000 \arrow[r, "g"] & 4 \arrow[r, "f"] & y=2 \end{tikzcd}$$



Pasemos a definir los términos:

La composición $f\circ g$ de las dos funciones f y g se define mediante:

$$(f\circ g)\,(x)=f\,[g(x)]$$

Esquemáticamente:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f\circ g"'] & g(x) \arrow[r, "f"] & (f\circ g)(x) \end{tikzcd}$$

☞ Nota: no hay un acuerdo sobre cómo llamar a $f\circ g$. Unos la denominan "f compuesta con g" y otros "g compuesta con f". En cualquier caso, obsérvese que primero actúa g y en segundo lugar f.

☞ Ejemplo: si $f(x)=3x+1$, $g(x)=x^2$, $h(x)=\begin{cases} x-3 & \text{si} \quad x<1 \\ x^2+2 & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$

$$(f\circ h)\,(-1)=f\,[h(-1)]=f(-4)=3\cdot(-4)+1=-11$$

$$(h\circ f)\,(-1)=h\,[f(-1)]=h(-2)=-2-3=-5$$

$$(f\circ g)\,(x)=f\,[g(x)]=f(x^2)=3x^2+1$$

$$(g\circ f)\,(x)=g\,[f(x)]=g(3x+1)=3\,(3x+1)^2=9x^2+6x+1$$

☞ Ejemplo: la función

$$T(x)=\sqrt{2x-4}$$

es la composición de

$$f(x)=\sqrt{x} \text{ y } g(x)=2x-4$$

pues

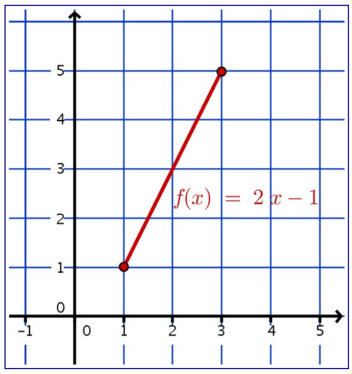
$$(f\circ g)\,(x)=f\,[g(x)]=f(2x-4)=\sqrt{2x-4}$$

Como podemos ver, la composición es una operación que no goza de la propiedad conmutativa. Así, en general:

$$f\circ g\neq g\circ f$$

Se debe tener en cuenta que, para ciertas funciones, pueden coincidir las dos compuestas.

7.Función inversa.



Introduzcamos el concepto de función inversa a partir de un sencillo ejemplo.

Sea f la función definida en el intervalo $A = [1\,,3]$ por la fórmula

$$f(x) = 2x - 1$$

A cada número x de $A = [1\,,3]$ la función f le asocia un único número y del intervalo $B = [1\,,5]$. La relación que guardan las variables viene dada por:

$$y = 2x - 1$$

Recíprocamente, dado un número cualquiera y de B encontramos exactamente un número x de A tal que $y = f(x)$. Para encontrar ese x basta despejar en la ecuación:

$$y = 2x - 1 \;\rightarrow\; 2x = y + 1 \;\rightarrow\; x = \frac{y+1}{2}$$

La fórmula $x = \dfrac{y+1}{2}$ expresa a x como función de y. Si llamamos g a la función así definida, es

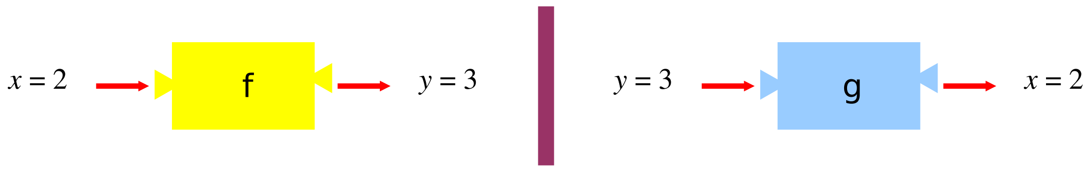
$$g(y) = \frac{y+1}{2}$$

Observemos que esta función asocia a cada y de $B = [1\,,5]$ su anti–imagen x de $A = [1\,,3]$.

La función g se llama inversa de f, y se la designa habitualmente f^{-1}.

Fíjate:

- La función g asocia a cada valor de y su anti–imagen x:



- Las funciones se "eliminan" al componerlas:

  $(f \circ g)\,(y) = f\,[g(y)] = f(x) = y$

  $(g \circ f)\,(x) = g\,[f(x)] = g(y) = x$

- La operaciones en g son las "inversas" a las de f y se realizan en orden inverso:

  En f: primero se multiplica por 2 y luego se resta 1.

  En g: primero se suma 1 y luego se divide por 2.

- El recorrido f es el dominio de g y el recorrido de g es el dominio de f.

☞ Ejemplo: Dada la función $f(x) = \sqrt[5]{3x-2}$, obtengamos la fórmula de su función inversa:

$$y = \sqrt[5]{3x-2} \;\rightarrow\; 3x - 2 = y^5 \;\rightarrow\; x = \frac{y^5+2}{3} \;\rightarrow\; f^{-1}(y) = \frac{y^5+2}{3}$$

☞ Ejemplo: Consideremos la función $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$.

Obtengamos la fórmula de su función inversa:

$$y = \frac{2x}{x-3} \to xy - 3y = 2x \to (y-2)\,x = 3y \to x = \frac{3y}{y-2}$$

Es

$$f^{-1}(y) = \frac{3y}{y-2}$$

Comprobemos directamente que $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x$:

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}\left(\frac{2x}{x-3}\right) = \frac{3 \cdot \frac{2x}{x-3}}{\frac{2x}{x-3} - 2} = \frac{\frac{6x}{x-3}}{\frac{6x}{x-3}} = x$$

Ejercicios

1. Sea f la función definida mediante la fórmula

$$f(x) = \frac{x}{x-3}$$

a) Obtén la imagen de $x = 5$.

b) Calcula $f(-1)$ y $f(1)$.

c) Halla la anti–imagen de $y = 10$.

d) ¿Cuál es el dominio de f?

2. Sea g la función definida mediante la fórmula

$$g(x) = \sqrt{x-5}$$

a) Obtén la imagen de $x = 14$.

b) Calcula $g(0)$ y $g(5)$.

c) Halla la anti–imagen de $y = 5$.

d) ¿Cuál es el dominio de g?

3. Sea h la función definida mediante la fórmula

$$h(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x < -1 \\ x^2 - 2x & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$$

a) Calcula $h(-3)$, $h(-1)$ y $h(3)$.

b) ¿Cuál es el dominio de h?

4. Halla a sabiendo que pasa por el punto $P = (1, 5)$ la gráfica de la función definida por

$$f(x) = x^3 + ax^2 - 3x + 1$$

5. La curva $y = x^2 + ax + b$ pasa por $P = (-1, 3)$ y su ordenada en el origen es -2. Halla a y b

6. Halla el dominio de definición de las funciones

a) $f_1(x) = 3x - 6$ b) $f_2(x) = \dfrac{5x}{3x-6}$

c) $f_3(x) = \sqrt{3x-6}$ d) $f_4(x) = \dfrac{5x}{\sqrt{3x-6}}$

7. Obtén el dominio de las funciones siguientes:

a) $y = x^2 - 1$ b) $y = \dfrac{x+2}{x-8}$

c) $y = \sqrt{x^2 - 9}$ d) $y = \ln(4 - x^2)$

8. Representa las gráficas cuya ecuación se da:

a) $y = 2x$, $y = |2x|$

b) $y = x^2 + 4x$, $y = |x^2 + 4x|$

9. Representa la gráfica de cada función y luego estudia: dominio, recorrido, continuidad, tendencias de prolongación, monotonía, extremos y signo.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad -2 \leq x < 1 \\ -x+2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad -4 \leq x < -1 \\ x^2 & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad -2 \leq x < 0 \\ x^2 - 2x & \text{si} \quad 0 < x < 3 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 4x + x^2 & \text{si} \quad x < 1 \\ \dfrac{2x+8}{x+1} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} 3^x - 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ -x^2 + 2x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} \log_2(x+2) & \text{si} \quad x < 2 \\ 2^{3-x} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

g) $f(x) = \left| 2 + \dfrac{3}{x-1} \right|$

10. Durante cinco horas se estudia la temperatura (ºC) de un objeto que varía en función del tiempo (h) transcurrido desde el inicio de la medición según la fórmula

$$T = t^2 - 2t - 8 \quad , \quad 0 \leq t \leq 5$$

a) ¿Cuál es la temperatura al inicio del experimento? ¿Y al final?

b) ¿En qué instante se halla a cero grados?

c) Dibuja la gráfica tiempo – Temperatura.

d) ¿En qué período de tiempo aumenta la temperatura del objeto? ¿En cuál disminuye?

e) Señala las temperaturas extremas.

f) Construye un esquema de variación de la función.

g) Indica cuándo la temperatura está bajo cero y cuándo por encima.

11. La población de bacterias que hay en un cultivo viene dada por la fórmula siguiente:

$$n(t) = 24 + 10t - t^2 \quad , \quad 0 \le t \le 12$$

a) ¿Cuántas bacterias hay al inicio del experimento? ¿Y al final?

b) ¿Durante qué período de tiempo crece o decrece el número de bacterias?

c) ¿Cuál es la población máxima? ¿Y la mínima?

d) Realiza un esquema de variación que sintetice la evolución de dicha población.

12. Una compañía lanza al mercado un nuevo bolígrafo. Se supone que la relación entre el precio (céntimos) por unidad, x, del nuevo bolígrafo y el beneficio (miles de euros), $b(x)$, viene dado por la función

$$b(x) = -x^2 + 130x - 3000$$

a) ¿Qué beneficio obtiene cuando vende cada bolígrafo a 50 céntimos.?

b) ¿Para qué valores del precio de venta de cada bolígrafo obtiene pérdidas? ¿Y beneficios?

c) Calcule a qué precio debe vender cada bolígrafo para que el beneficio sea máximo.

13. Consideremos la función $y = 2^{x+1} - 2$.

a) Representa en unos ejes de coordenadas su gráfica (puede serte útil esta tabla).

x	–2	–1	0	1	2	3
$y = 2^{x+1} - 2$						

b) Estudia el dominio, recorrido, continuidad, monotonía, extremos, signo y prolongación.

14. Ídem para

$$y = 0.5^{x+2} - 1$$

15. Esboza la gráfica de estas funciones junto con sus asíntotas.

a) $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$ b) $g(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$

Observa monotonía y cortes con los ejes.

16. Dibuja las siguientes funciones trigonométricas.

a) $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$ b) $g(x) = \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$

¿Qué período tiene cada una? Observa su variación en el intervalo que va de 0 al período.

17. Si

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ y } g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 4 - x^2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) Calcula $(f+g)(3)$ y $\left(\dfrac{f}{g}\right)(5)$.

b) Ídem $(f \circ g)(0)$, $(g \circ f)(0)$ y $(f \circ g)(-2)$.

18. Dadas

$$f(x) = \frac{x+1}{x-3} \text{ y } g(x) = 2x - 1$$

a) Obtén $(f+g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$ y $(f/g)(x)$ así como sus dominios.

b) Ídem para $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

19. Expresa como una composición de funciones

a) $h(x) = \log(x^2)$.

b) $h(x) = \sqrt{3x-4}$.

c) $h(x) = 2^{5x+1}$.

20. Obtén para las funciones

$$f(x) = \frac{x}{x-4} \; , \; g(x) = 2x + 1 \; , \; h(x) = x^2$$

a) $(f \circ g \circ h)(2)$ y $(f \circ h \circ g)(2)$.

b) $(f \circ g \circ h)(x)$ y $(f \circ h \circ g)(x)$.

21. Obtén la función inversa de:

a) $a(x) = x^3 - 8$ b) $b(x) = \sqrt[5]{2x-4}$

c) $c(x) = \sqrt[4]{3x-6}$ d) $d(x) = \dfrac{5}{x-3}$

e) $e(x) = 5^{x+1} - 4$ f) $f(x) = \log_3(3x+1)$

Halla el dominio de todas (ellas y sus inversas).

22. Plegando un alambre de 12 *cm.* construimos un rectángulo. Expresa la longitud de la altura y de la diagonal en función de lo que mida la base

23. La diagonal de un rectángulo mide 5 cm. Expresa su área en función la longitud de su base.

24. Vamos a dibujar un rectángulo que debe tener superficie igual a 10 cm^2 . Expresa la longitud de su altura en función de la longitud de la base (x).

25. Vamos a dibujar un cilindro con 2 cm. de diámetro. Expresa su volumen en función de su altura.

26. Vamos a construir un prisma de base cuadrada y con un volumen de 1 litro.

Expresa la altura de la caja y el área total de la caja en función del lado x de la base.

27. En el interior de una circunferencia inscribimos un cuadrado. Expresa su área en función del radio de la circunferencia.

28. En un cuadrado inscribimos un círculo. Expresa su área en función del lado del cuadrado.

29. Una familia va a alquilar un vehículo durante una semana. La empresa de alquiler le ofrece dos posibilidades para contratar el automóvil que ha elegido:

- Contrato A: 400 € sin tener en cuanta los kilómetros que recorra.
- Contrato B: 100 € más 2 € por cada kilómetro recorrido.

Realiza una gráfica que muestre el costo del contrato B en función de los kilómetros recorridos y <u>*discute*</u> qué contrato es más conveniente.

Cuestiones

1. Al despejar y de la expresión $x = y^2$, ¿se obtiene la expresión de una función?

2. La expresión $S = x^2$ permite hallar la superficie de un cuadrado conocido su lado x. ¿Cuál es el dominio de la función así definida?

3. Considera las funciones f y g definidas por

$$f(x) = \frac{x^2}{x} \ , \ g(x) = x$$

Comprueba que no son funciones iguales.

4. Consideremos las funciones f y g definidas por:

$$f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2 \ \text{ y } \ g(x) = x$$

¿son iguales las funciones f y g así definidas?

5. ¿Qué funciones tienen como recorrido un único número real? Pon algún ejemplo.

6. En una función, ¿puede un número real tener infinitas anti–imágenes?

7. Explica a través de un ejemplo qué diferencia hay la “función opuesta” y la “función inversa”.

8. Comprueba con un ejemplo que el producto de dos funciones puede ser la función cero sin que ninguna de las dos funciones sea idénticamente nula.

9. Dada un función $y = f(x)$, se dice que es:

- Par o simétrica respecto del eje Y si
$$f(-x) = f(x) \ , \ \forall x \in D_f$$
- Impar o simétrica respecto del origen si
$$f(-x) = -f(x) \ , \ \forall x \in D_f$$

Comprueba que

a) $y = x^4 + 1 \ , \ y = \cos(x)$ son pares

b) $y = x^3 + x \ , \ y = \operatorname{sen}(x)$ son impares.

10. Se define el valor absoluto de un número real de la siguiente forma:

$$|\, x \,| = \max\{-x \,, x\}$$

a) Calcula el valor de absoluto de –2, 3 y 0.

b) Comprueba que se tiene:

$$|\, x \,| = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 0 \\ +x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

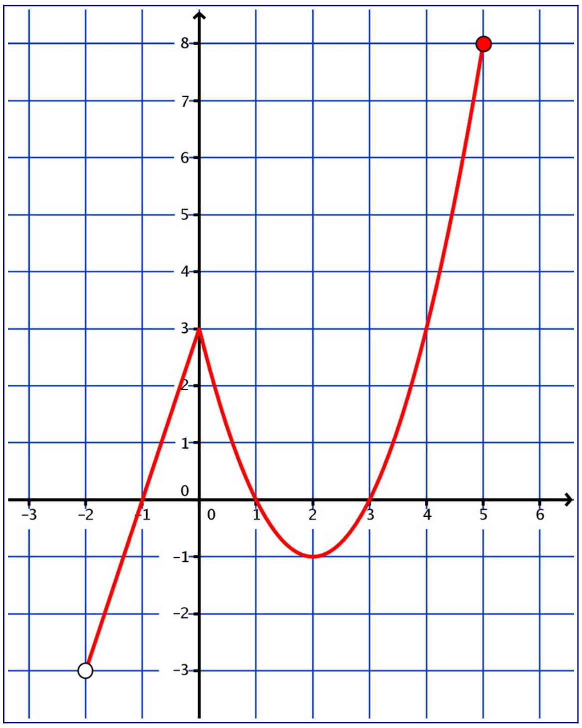
c) Representa la gráfica $y = |x|$.

11. Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios. Razona cuál es el dominio de la función definida por

$$y = \frac{p(x)}{q(x)}$$

Autoevaluación

1. La gráfica $y = f(x)$ es la siguiente. Estudia:



a) Imagen de $x = 2$.

b) Anti–imagen de $y = 3$.

c) Dominio.

d) Recorrido.

e) Monotonía de la función.

f) Extremos.

g) Estudio de signo.

h) Continuidad.

2. Representa la gráfica de f, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 3 & \text{si} \quad x < 2 \\ x + 1 & \text{si} \quad 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

3. Dadas las funciones definidas por:

$$f(x) = \sqrt{x-6}\ ,\ g(x) = x^2 + 5x \text{ y } h(x) = 2x$$

a) Halla $(f+g)(6)$ y $(f \circ h)(5)$.

b) Obtén $(f \circ h)(x)$ y su dominio.

c) Obtén la fórmula de $\dfrac{h}{g}$ y su dominio.

4. Dada la función exponencial

$$y = 2^{x+1} - 1$$

a) Completando la siguiente tabla, representa en unos ejes de coordenadas su gráfica.

x	–3	–2	–1	0	1	2
$y = 2^{x+1} - 1$						

b) ¿Cuál es la tendencia de la variable y cuando x toma valores "infinitamente pequeños"?

c) ¿Y si x toma valores "infinitamente grandes"?

5. En un experimento que dura cuatro horas se estudia la temperatura (T) de un objeto. Ésta varía en función del tiempo (t) transcurrido desde el inicio de la experiencia según la fórmula

$$T = t^2 - 2t - 3 \quad , \quad 0 \leq t \leq 4$$

donde el tiempo está en horas y la temperatura en grados centígrados.

a) ¿Cuál es la temperatura al inicio del experimento? ¿Y al final?

b) ¿En qué instante el cuerpo se halla a cero grados?

c) Dibuja la gráfica tiempo – Temperatura.

d) Indica cuándo la temperatura está bajo cero y cuándo por encima.

e) ¿En qué período de tiempo aumenta la temperatura del objeto? ¿En cuál disminuye?

f) Señala las temperatura máxima y mínima alcanzadas.

g) Construye un esquema de variación de la función.

6. En el interior de un círculo de radio 2 cm. se inscribe un rectángulo.

Expresa su área en función de la longitud de su base.

¿Cuál es el dominio de esa función?

Autoevaluación

1.

a) Observamos en la gráfica que el punto correspondiente es $(2\,,-1)$. Así:

$$x = 2 \xrightarrow{f} y = -1$$

b) Observamos que hay dos puntos en la gráfica cuya ordenada es $y = 3$, así:

$$y = 3 \xleftarrow{f} x = 0\,, x = 4$$

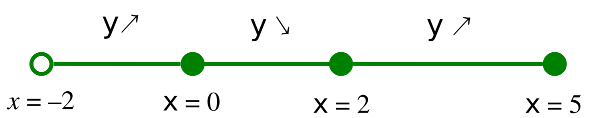
c) El dominio es el conjunto de los valores x para los que hay gráfica: para todos los valores x del intervalo comprendido entre $x = -2$ y $x = 5$, excluido el primero e incluido el último:

$$D_f = (-2\,,5]$$

d) El conjunto de imágenes es el formado por todos los valores y del intervalo comprendido entre $y = -3$ (excluido) e $y = 2$ (incluido). Así:

$$R_f = (-3\,,8]$$

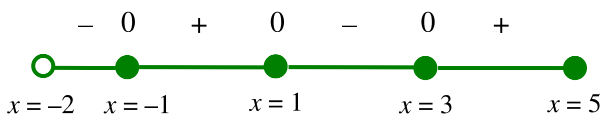
e) Señalamos en un esquema los intervalos en los que crece y decrece la función representada:



f) Es $y = 8$ el valor mínimo, alcanzándose para $x = 5$.

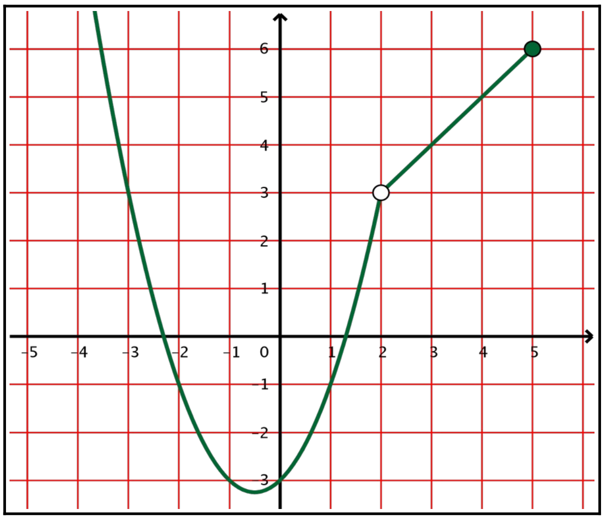
Es $y = -3$ el extremo inferior, pero no se alcanza para ningún valor de x.

g) Señalamos en un esquema los ceros y los intervalos de signo de la función:



h) La gráfica es continua en todo su dominio; ahora bien, para $x = -2$ presenta una discontinuidad evitable o de agujero.

2. La gráfica se compone de un trozo de parábola (con vértice para $x_V = -0.5$) y de un trozo de recta:



3.

a) $(f+g)(6) = f(6) + g(6) = 0 + 66 = 66$

$(f \circ h)(5) = f[h(5)] = f(10) = \sqrt{4} = 2$

El esquema de esta composición es:

$$\begin{tikzcd} x=5 \arrow[r, "h"] \arrow[rr, bend right, "f \circ h"'] & 10 \arrow[r, "f"] & y=2 \end{tikzcd}$$

b) La fórmula que define a la función compuesta es:

$$(f \circ h)(x) = f[h(x)] = f(2x) = \sqrt{2x-6}$$

Para que dicha expresión exista, debe ser:

$$2x - 6 \geq 0$$

Resolviendo la inecuación:

$$D = [3, +\infty)$$

c) En cuanto al cociente:

$$\left(\frac{h}{g}\right)(x) = \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{2x}{x^2+5x}$$

El denominador no puede ser cero:

$$x^2 + 5x = 0 \;\rightarrow\; x = -5\;,\; x = 0$$

Así:

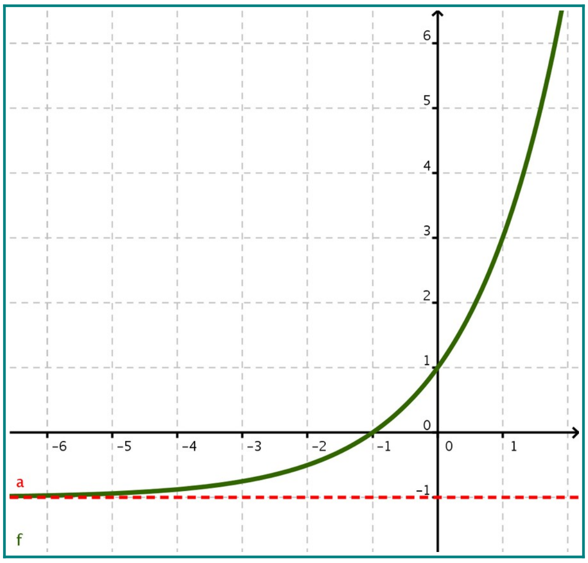
$$D = \mathbb{R} - \{-5\,,0\}$$

4.

a) Los valores de la tabla son:

x	– 3	– 2	– 1	0	1	2
y	– 0,75	– 0,5	0	1	3	7

Representamos con la ayuda de esos puntos la gráfica:



b) Observemos que y se aproxima cada vez más a – 1 conforme x va tomando valores cada vez más pequeños ($y = -1$ es asíntota horizontal)

$$\text{Si } x \to -\infty \text{ es } y \to -1$$

c) Observemos queque y toma valores cada vez más grandes cuando x va tomando cada vez más grande (rama parabólica hacia arriba)

$$\text{Si } x \to +\infty \text{ es } y \to +\infty$$

5.

a) Hacemos $t=0 \;\to\; T=-3$:

Al inicio del experimento la temperatura es de tres grados bajo cero.

Haciendo $t=4 \;\to\; T=5$:

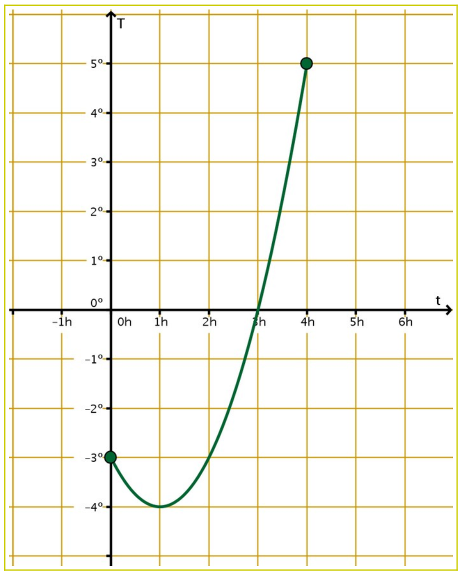
Al final de la experiencia la temperatura es de cinco grados.

b) Igualemos la temperatura a cero:

$$T=0 \to t^2-2t-3=0 \to t=3, t=-1(\text{NO})$$

Tenemos así que está a cero grados cuando han transcurrido tras horas desde el inicio.

c) La gráfica será un trozo de parábola con vértice para t = 1. Con una tabla de valores conseguimos:



d) En el esquema siguiente señalamos cuándo la temperatura está sobre cero (+) y bajo cero (–):

e) En el siguiente esquema mostramos cuándo aumenta o disminuye la temperatura:

f) $T_{max}=5$ºC que se alcanza para $t=4\,h$.

$T_{min}=-4$ºC que se alcanza para $t=1\,h$.

g) La siguiente tabla resume la variación de la función:

t	0		1		4
T	–3	↘	–4	↗	5

6.

a) Si es x la longitud de la base y h la longitud de la altura, al ser la diagonal igual al diámetro, por el Teorema de Pitágoras:

$$x^2 + h^2 = 4^2 \;\to\; h = \sqrt{16 - x^2}$$

Así la superficie del rectángulo, S es:

$$S = x \cdot \sqrt{16 - x^2}$$

b) De la propia construcción geométrica se deduce que la longitud de la base (x) está comprendida entre 0 y 4 cm. (el diámetro de la circunferencia). Así, admitiendo un segmento como un rectángulo degenerado (base o altura nula) es:

$$D = [0\,,4]$$