TEMA 7

GEOMETRÍA DEL PLANO

Contenidos

1. Sistemas de Referencia.
2. Ecuaciones continua y general de la recta.
3. Pendiente de una recta . Ecuación explícita.
4. Posiciones relativas de dos rectas.
5. Ángulo entre dos rectas.
6. Distancias en el plano.
7. Lugares geométricos.

Tiempo estimado

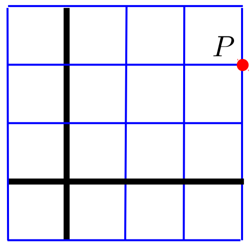
12 sesiones

Criterios de Evaluación

1. Comprender qué es un sistema de referencia y qué son las coordenadas de un punto.
2. Conocer y saber manejar las ecuaciones de una recta.
3. Saber discutir la posición relativa de dos rectas.
4. Saber plantear, discutir y resolver sencillos problemas métricos que relacionen puntos, vectores y rectas en el plano.
5. Entender qué son un lugar geométrico y su ecuación.
6. En particular: bisectriz, mediatriz y circunferencia.

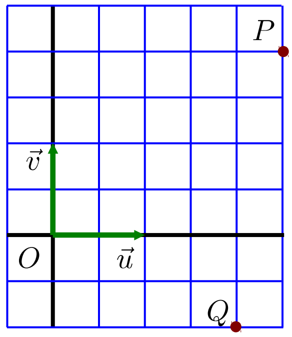
1.Sistemas de referencia

Para localizar un punto en el plano usamos el llamado "sistema de referencia cartesiano".



Decimos que las coordenadas del punto P, que tenemos aquí a la izquierda, son $(3\,,2)$ pues para ir desde el origen de coordenadas hasta P debemos movernos "tres cuadrículas hacia la derecha y dos hacia arriba".

Esta referencia usa como unidades de movimiento los vectores $\vec{\imath}=(1\,,0)$ ("una unidad hacia la derecha") y $\vec{\jmath}=(0\,,1)$ ("una unidad hacia arriba"), que son los vectores de la base canónica.



En la figura derecha tenemos un "sistema de referencia" distinto: está compuesto por un punto origen O y una base $\mathscr{B}=\{\vec{u}\,,\,\vec{v}\}$:

Para ir desde el origen O hasta el punto P debo avanzar "dos unidades y media según indica $\vec{u}$" y "dos unidades según indica $\vec{v}$". Esto es:

$$\overrightarrow{OP}=2.5\vec{u}+2\vec{v}$$

Se dice que las coordenadas de P en esta referencia son $(2.5\,,2)$.

Halla tú las coordenadas de Q.

En general:

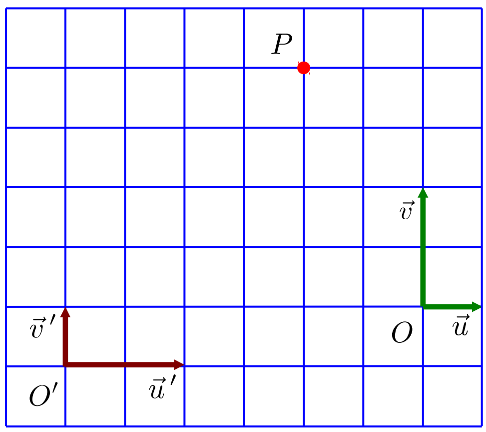
a) Un sistema de referencia en el plano es una terna $\mathscr{R}=\{O\,;\vec{u}\,,\,\vec{v}\}$ donde O es un punto fijo, llamado origen de la referencia, y $\{\vec{u}\,,\,\vec{v}\}$ es una base del plano.

b) Dado un punto cualquiera P, si $\overrightarrow{OP}=x\vec{u}+y\vec{v}$ diremos que las coordenadas de P en $\mathscr{R}$ son $(x\,,y)$.

A $\overrightarrow{OP}$, vector que va desde el origen de la referencia hasta el punto, se le llama vector de posición de P en la referencia.

Observa que las coordenadas del punto en la referencia son las coordenadas de su vector de posición en la base.

☞ <u>Ejemplo</u>: observa las referencias: $\mathscr{R}=\{O\,;\vec{u}\,,\,\vec{v}\}$ y $\mathfrak{R}'=\{O'\,;\vec{u}\,'\,,\,\vec{v}\,'\}$ en el dibujo siguiente. ¿Qué coordenadas tiene en cada una de ellas P?



$$\overrightarrow{OP}=-2\vec{u}+2\vec{v} \quad\rightarrow\quad P \text{ tiene coordenadas } (-2\,,2) \text{ en } \mathscr{R}$$

$$\overrightarrow{O'P}=2\vec{u}\,'+5\vec{v}\,' \quad\rightarrow\quad P \text{ tiene coordenadas } (2\,,5) \text{ en } \mathscr{R}'$$

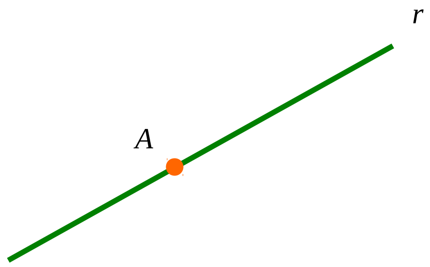
¿Cuáles son las coordenadas en $\mathfrak{R}$ de O´?

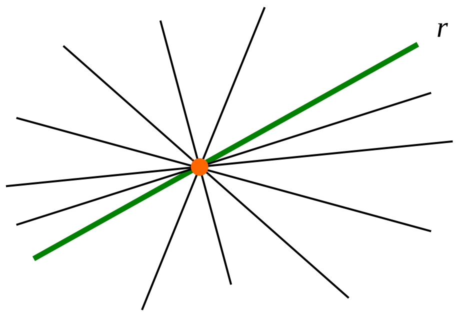
¿Cuáles son las coordenadas de O en $\mathfrak{R}'$?

2.Ecuaciones continua y general de la recta.

❑ Determinación de una recta.

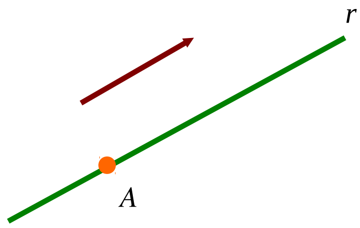
Vamos aquí a examinar esta cuestión: ¿con qué datos mínimos queda determinada una recta? Una recta no queda determinada sólo con un punto, pues por un punto pasan infinitas rectas:





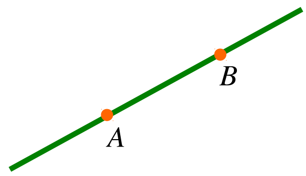
Variando la dirección se van obteniendo todas las rectas que pasan por él.

Pero fijando una dirección obtenemos sólo una recta. Ello podemos conseguirlo con un vector, un vector que nos marcará la dirección de la recta.



Una recta queda determinada por un punto de ella y por un vector con su dirección.

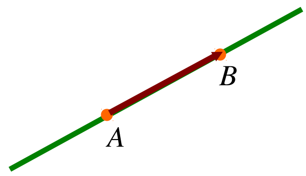
Podríamos razonar de otra forma: por dos puntos A y B pasa sólo una recta. Por tanto, una recta queda determinada por dos puntos de ella. Pero observemos que es lo mismo:



Si conocemos dos puntos A y B de una recta, tenemos

a) Un punto: A

b) Un vector de dirección: $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$



Si conocemos un punto A y un vector de dirección $\vec{v}$, tenemos

a) Un punto: A

b) Otro punto: $B = A + \vec{v}$

❑ Ecuación continua de una recta.

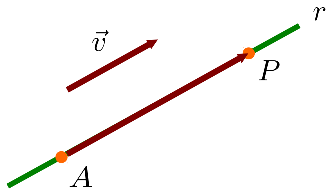
Dada una recta, vamos a obtener una fórmula que nos permita

- Obtener todos los puntos de ella que deseemos
- Decidir con total exactitud si un punto está o no en ella

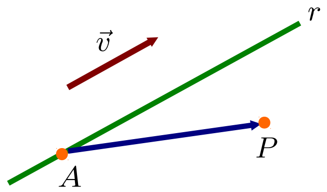
Para ello supongamos que de una recta r conocemos:

1. Un punto: $A = (x_0 , y_0)$
2. Un vector de dirección: $\vec{v} = (v_1 , v_2)$

¿Cuándo un punto $P = (x\,,y)$ está en la recta? Observemos que P está en la recta si $\overrightarrow{AP}$ tiene la misma dirección que $\vec{v}$:



$P \notin r$ si $AP \nparallel r$



$P \in r$ si $AP \parallel r$

Así el punto P está en la recta r precisamente cuando $\overrightarrow{AP}$ y $\vec{v}$ son dos vectores dependientes:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AP} = (x - x_0\,, y - y_0)\\ \vec{v} = (v_1\,, v_2)\end{array}\right\} \xrightarrow{dependientes} \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2}$$

Tenemos por fin la "fórmula" que buscábamos:

Sea r la recta que pasa por el punto $A = (x_0\,, y_0)$ y tiene la dirección de $\vec{v} = (v_1\,, v_2)$.

Tenemos entonces que los puntos $P = (x\,,y)$ que verifican la ecuación

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2}$$

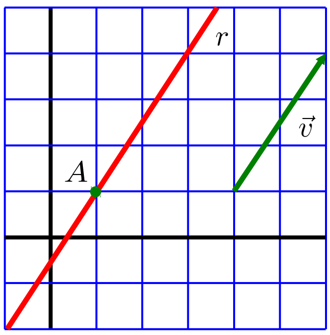
son precisamente los puntos de la recta.

La ecuación de la izquierda es denominada "ecuación continua" de la recta.

☞ Ejemplo: Consideremos la recta que pasa por el punto $A = (1\,,2)$ y tiene como vector de dirección $\vec{v} = (3\,,4)$.

Su ecuación continua es

$$\frac{x - 1}{3} = \frac{y - 2}{4}$$



Para ver si el punto $P = (5\,,4)$ está en la recta sustituimos en la ecuación continua:

$$\frac{5 - 1}{3} \neq \frac{4 - 2}{4}$$

Como no verifica la ecuación, concluimos que P no está en la recta.

Veamos si $Q = (4\,,6)$ está en la recta:

$$\frac{4 - 1}{3} = \frac{6 - 2}{4}$$

Concluimos que Q sí es un punto de la recta.

☞ Ejemplo: En la recta de ecuación continua $\dfrac{x + 1}{1} = \dfrac{y - 3}{2}$

Un punto de la recta es: $A = (-1\,,3)$

Un vector de dirección es: $\vec{v} = (1\,,2)$

Ecuación general o implícita.

La ecuación general o implícita de una recta se obtiene a partir de la ecuación continua, eliminando denominadores y agrupando términos. Por ejemplo, la ecuación general de la recta que pasa por $A=(1,1)$ y tiene como vector de dirección $\vec{v}=(2,3)$ se obtiene así:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3} \rightarrow 3(x-1)=2(y-1) \rightarrow 3x-2y-1=0$$

> Toda recta es la solución de una ecuación de primer grado de la forma
> $$ax+by+c=0$$
> donde a, b, c son números reales.

☞ Demostración: para la recta que pasa por $A=(x_0,y_0)$ y tiene la dirección de $\vec{v}=(v_1,v_2)$:

$$\frac{x-x_0}{v_1}=\frac{y-y_0}{v_2} \xrightarrow[denominadores]{quitando} v_2(x-x_0)=v_1(y-y_0)$$

Quitando paréntesis y agrupando:

$$v_2x-v_1y+v_1y_0-v_2x_0=0$$

Llamando $a=v_2$, $b=-v_1$ y $c=v_1y_0-v_2x_0$:

$$ax+by+c=0$$

> Es muy importante retener que en la recta de ecuación general
> ax+by+c=0
> un vector de dirección es:
> $\vec{v}=(-b,a)$

☞ Ejemplo: obtengamos la ecuación general de la recta que pasa por los puntos $A=(-2,1)$ y $B=(3,5)$.

Tomamos el punto $A=(-2,1)$ y el vector director $\overrightarrow{AB}=(5,4)$:

$$\frac{x+2}{5}=\frac{y-1}{4} \rightarrow 4(x+2)=5(y-1) \rightarrow 4x-5y+13=0$$

☞ Ejemplo: dada la recta r de ecuación general $3x-2y+5=0$

Un vector director recordemos que es $\vec{v}=(-b,a)=(2,3)$.

Para obtener un punto damos un valor a x y obtenemos la y:

$$x=1 \rightarrow 3-2y+5=0 \rightarrow y=4 \rightarrow A=(1,4)$$

Para saber si el punto $P=(-2,3)$ está en la recta, vemos si ese par verifica la ecuación:

$$3\cdot(-2)-2\cdot 3+5\neq 0 \rightarrow P\notin r$$

3.Pendiente. Ecuación explícita de la recta.

Pendiente de una recta.

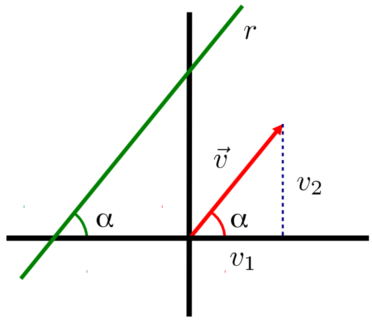
La pendiente es un número de gran importancia en el estudio de la recta:

> Dada la recta con vector director $\vec{v}=(v_1,v_2)$, se define su pendiente por:
> $$m=\frac{v_2}{v_1}$$

☞ Ejemplo: en la recta que pasa por $A = (-2\,,1)$ y $B = (3\,,5)$, un vector de dirección es $\overrightarrow{AB} = (5\,,4)$, luego su pendiente es $m = \dfrac{4}{5}$.

Comprueba que las rectas verticales no tienen pendiente.

La pendiente está relacionada con la inclinación de la recta. Observemos la figura de la derecha.



Si α es el ángulo que forma la recta con el eje X, la tangente de α es:

$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{v_2}{v_1} = m$$

Si una recta forma un ángulo α con el eje de abscisas, entonces
$$m = \tan\alpha$$

❑ Ecuación explícita.

La ecuación explícita de una recta se obtiene cuando despejamos "y" de la ecuación continua o de la ecuación general:

$$\frac{y-y_0}{v_2} = \frac{x-x_0}{v_1} \to y - y_0 = \frac{v_2}{v_1}(x-x_0) \to y - y_0 = m(x-x_0)$$

La ecuación
$$y - y_0 = m\,(x - x_0)$$
es la "ecuación punto – pendiente" de una recta.
Recuérdala, es muy útil en la práctica.

Despejamos ahora y simplificamos:

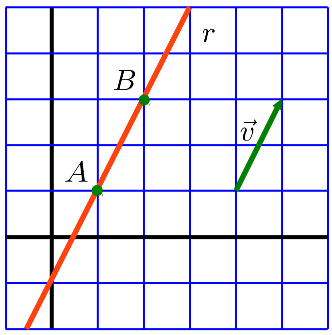
$$y = mx - mx_0 + y_0 \xrightarrow[n=-mx_0+y_0]{llamando} y = mx + n$$

La ecuación $y = mx + n$ es llamada ecuación explícita de la recta.

☞ Ejemplo: obtengamos la ecuación explícita de $r: 3x - 2y + 5 = 0$

$$3x - 2y + 5 = 0 \to 2y = 3x + 5 \to y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$$

☞ Ejemplo: Obtengamos la ecuación explícita de la recta que pasa por los puntos $A = (1\,,1)$ y $B = (2\,,3)$:



Tomamos el punto $A = (1\,,1)$ y el vector director $\overrightarrow{AB} = (1\,,2)$:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} \to y - 1 = 2(x-1) \to y = 2x - 1$$

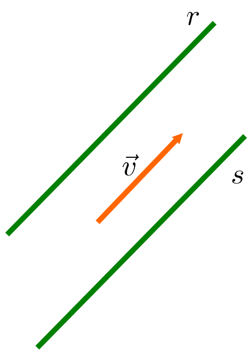
Observemos que su pendiente es $m = 2$.

4. Posiciones relativas de dos rectas.

❑ Rectas paralelas.

Es claro cuándo dos rectas son paralelas:

Dos rectas r y s del plano se dice que son paralelas cuando tienen un mismo vector de dirección.



rectas paralelas

Obviamente, dos rectas son paralelas precisamente cuando tienen la misma pendiente. Esta es una forma sencilla de comprobar, en la práctica, el paralelismo.

☞ Ejemplo: veamos si son paralelas las rectas cuyas ecuaciones son:

$$r : \frac{x-2}{3} = \frac{y}{6} \quad , \quad s : y = 2x + 3$$

Hallemos sus pendientes:

$$\left.\begin{array}{lll} \vec{v}_r = (3\,,6) & \rightarrow & m_r = \dfrac{6}{3} = 2 \\ y = 2x+3 & \rightarrow & m_s = 2 \end{array}\right\} \rightarrow m_r = m_s \rightarrow r \parallel s$$

☞ Ejemplo: Obtengamos a sabiendo que son paralelas las rectas

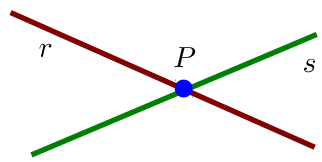
$$r : \frac{x-2}{1} = \frac{y}{4} \quad , \quad s : ax + 3y - 7 = 0$$

Son paralelas cuando tienen igual pendiente:

$$\left.\begin{array}{lll} \vec{v}_r = (1\,,4) & \rightarrow & m_r = \dfrac{4}{1} = 4 \\ \vec{v}_s = (-3\,,a) & \rightarrow & m_r = -\dfrac{a}{3} \end{array}\right\} \xrightarrow{m_r = m_s} -\frac{a}{3} = 4 \rightarrow a = -12$$

❑ Rectas secantes.

En el plano, es claro que si dos rectas no son paralelas se interceptan en un único punto (llamado punto de intersección o de corte de ambas rectas).



rectas secantes

Dos rectas r y s del plano se dice que son secantes cuando tienen un único punto en común.

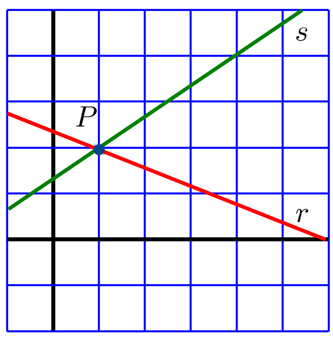
Si dos rectas son secantes, ¿cómo obtener el punto de intersección de ambas? Muy sencillo: las coordenadas del punto P de corte verifican ambas ecuaciones; por tanto, han de ser la solución del sistema formado por las ecuaciones de ambas.

☞ Ejemplo: Estudiemos la posición relativa de las rectas

$$r : \frac{x-6}{5} = \frac{y}{-2} \quad , \quad s : 2x - 3y + 4 = 0$$

Comparemos sus pendientes:

$$\left.\begin{array}{lll} \vec{v}_r = (5\,,-2) & \rightarrow & m_r = -\dfrac{2}{5} \\ \vec{v}_s = (3\,,2) & \rightarrow & m_s = \dfrac{2}{3} \end{array}\right\} \rightarrow m_r \neq m_s \rightarrow \text{Son secantes}$$



Si deseamos obtener el punto de corte, resolvemos el sistema:

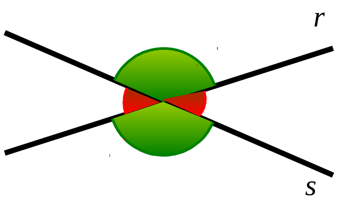
$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-6}{5} = \dfrac{y}{-2} \\ 2x - 3y + 4 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -2x - 5y = -12 \\ 2x - 3y = -4 \end{array}\right\} \rightarrow (x\,,y) = (1\,,2)$$

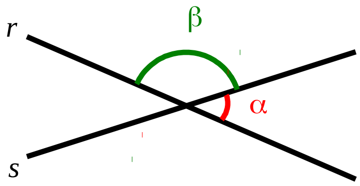
Así, se interceptan en $P = (1\,,2)$

5. Ángulo entre dos rectas.

Convendremos que dos rectas paralelas forman un ángulo cero.

Dos rectas secantes determinan en el plano cuatro regiones angulares opuestas dos a dos por el vértice. Así, dos rectas secantes determinan dos

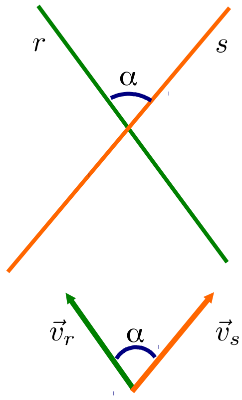




ángulos, α y β, que son suplementarios.

Llamamos ángulo formado por dos rectas secantes r y s al menor de los ángulos que determinan.

Es claro que dicho ángulo se puede obtener a partir de sus respectivos vectores de dirección:



☞ Ejemplo: obtengamos la medida del ángulo que forman las rectas cuyas ecuaciones son:

$$r:\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{2} \quad , \quad s:2x-3y+5=0$$

Saquemos sus vectores directores y calculemos el ángulo que forman a través del producto escalar:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_r=(5\,,2)\\ \vec{v}_s=(3\,,2)\end{array}\right\}\to \cos(\widehat{r\,,s})=\frac{5\cdot 3+2\cdot 2}{\sqrt{5^2+2^2}\cdot\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{19}{\sqrt{377}}$$

Luego:

$$(\widehat{r\,,s})=\arccos\frac{19}{\sqrt{377}}\approx 11°53'19''$$

Razonando como en el ejemplo anterior deducimos la siguiente fórmula:

Si $r: ax+by+c=0$ y $r': a'x+b'y+c'=0$ entonces:

$$\cos\left(\widehat{r\,,r'}\right)=\frac{|a\cdot a'+b\cdot b'|}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a'^2+b'^2}}$$

Observa que en la fórmula que nos da el coseno se ha colocado un valor absoluto. ¿Por qué?

❑ Perpendicularidad.

Es un caso particular muy interesante de ángulo. Claramente dos rectas son perpendiculares cuando sus vectores de dirección son ortogonales:

$$(\widehat{r\,,s})=\frac{\pi}{2}\Longleftrightarrow \vec{v}_r\perp\vec{v}_s$$

De ahí deducimos el siguiente criterio de perpendicularidad de rectas:

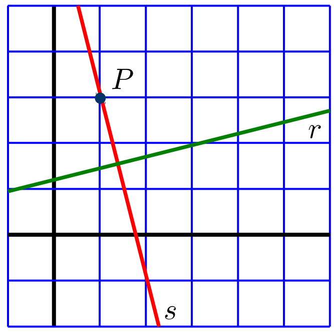
Si $r: ax+by+c=0$ y $r': a'x+b'y+c'=0$ entonces:

$$r\perp r'\longleftrightarrow aa'+bb'=0\longleftrightarrow m\cdot m'=-1$$

La perpendicularidad puede caracterizarse a través de las pendientes:

$$r\perp r'\leftrightarrow m\cdot m'=-1$$

☞ Ejemplo: obtengamos la ecuación de la recta s perpendicular a la de ecuación $r: x-2y+3=0$ y que pasa por el punto $P=(1,3)$.



Vamos a obtenerla a través de la ecuación punto - pendiente. Es:

$$\vec{v}_r=(2,1)\rightarrow m_r=\frac{1}{2}\rightarrow\frac{1}{2}\cdot m_s=-1\rightarrow m_s=-2$$

Así, la ecuación de s es:

$$y-y_0=m\,(x-x_0)\;\rightarrow\;y-3=-2\,(x-1)\;\rightarrow\;s:2x+y-5=0$$

6.Distancias en el plano.

Distancia entre dos puntos.

El cálculo de las distancias entre puntos no reviste ninguna dificultad:

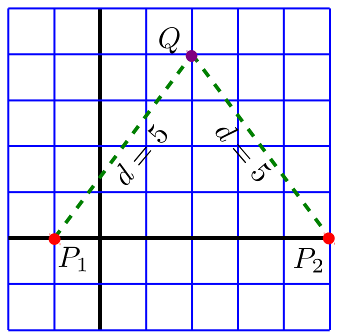
Se define la distancia entre los puntos A y B del plano por:

$$\mathrm{d}\,(A\,,B)\stackrel{def}{=}|\overrightarrow{AB}|$$

☞ Ejemplo: la distancia entre los puntos $A=(2,2)$ y $B=(4,5)$ es:

$$\mathrm{d}\,(A\,,B)=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+3^2}\;\rightarrow\;\mathrm{d}\,(A\,,B)=\sqrt{13}$$

☞ Ejemplo: averigüemos cuál es el punto P del eje de abscisas que dista 5 unidades del punto $Q=(2,4)$.



Pongamos $P=(a,0)$:

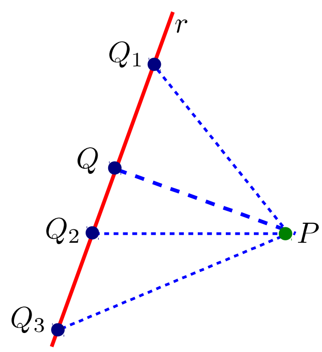
$$\mathrm{d}\,(P\,,Q)\rightarrow\sqrt{(2-a)^2+4^2}=5\rightarrow a^2-4a-5=0\rightarrow\left|\begin{array}{l}a=-1\\a=5\end{array}\right.$$

Hay dos soluciones: $P_1=(-1,0)$ y $P_2=(5,0)$.

Distancia de un punto a una recta.

Vamos a intentar aclarar en primer lugar a qué llamaremos distancia de un punto P a una recta r. Observemos la figura del margen.

Podemos tomar en la recta r puntos Q_1, Q_2, ... y calcular la distancia desde P a cada uno de ellos: $\mathrm{d}\,(P\,,Q_1)$, $\mathrm{d}\,(P\,,Q_2)$, … De todas las distancias, hay una que es la menor, y se obtiene precisamente para el punto Q de la recta r que cumple:



$$\overrightarrow{PQ}\perp r$$

A esa distancia mínima la llamaremos distancia del punto P a la recta r:

Llamamos distancia del punto P a la recta r a la distancia

$$\mathrm{d}\,(P\,,r)\stackrel{def}{=}\mathrm{d}\,(P\,,Q)$$

donde Q es el punto de r tal que $\overrightarrow{PQ}\perp r$.

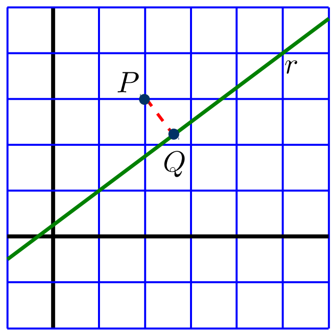
Para calcular la distancia de un punto a una recta de la que se conoce su ecuación, disponemos de la siguiente fórmula:

Si $P=(x_0\,,y_0)$ y $r: ax+by+c=0$ entonces:

$$\mathrm{d}\,(P\,,r)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

☞ Ejemplo: obtengamos la distancia de $P=(2\,,3)$ a $r: 3x-4y+1=0$:

$$\mathrm{d}\,(P\,,r)=\frac{|3\cdot 2-4\cdot 3+1|}{\sqrt{9+16}}=\frac{5}{5}=1$$



Nota: otra forma de obtener esa distancia es:

- obtener la ecuación de la recta perpendicular a r por P
- cortar dichas rectas para obtener el punto Q
- calcular la distancia desde el punto P al punto Q. Esta distancia es la distancia del punto P a la recta r.

7.Lugares geométricos.

A lo largo de este tema hemos estudiado la recta, que no es más que un conjunto de puntos. Pero hay muchos otros tipos de conjuntos de puntos: las circunferencias, las parábolas, las elipses, los cicloides, etc. Cada uno de estos conjuntos de puntos se denomina "lugar geométrico":

Un lugar geométrico es un conjunto de puntos que cumplen una determinada propiedad.

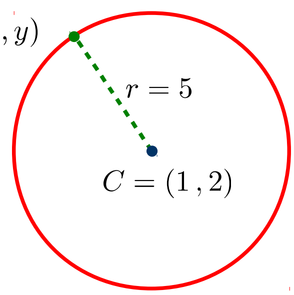
Se llama ecuación del lugar geométrico a una ecuación

$$F\,(x\,,y)=0$$

cuyas soluciones son precisamente los puntos del lugar.

☞ Ejemplo: consideremos el conjunto de los puntos cuya distancia al punto $C=(1\,,2)$ es $r=3$.

Ese lugar geométrico se llama circunferencia con centro en C y radio r = 3.

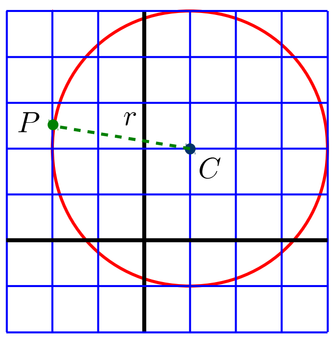


Un punto $P=(x\,,y)$ del lugar geométrico verifica $\mathrm{d}\,(P\,,C)=3$:

$$\mathrm{d}\,(P\,,C)=3\rightarrow\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=3$$

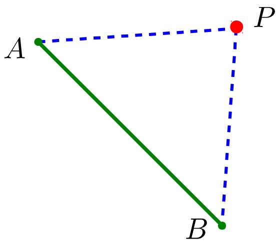
Elevando al cuadrado, desarrollando y simplificando obtenemos la ecuación del lugar:

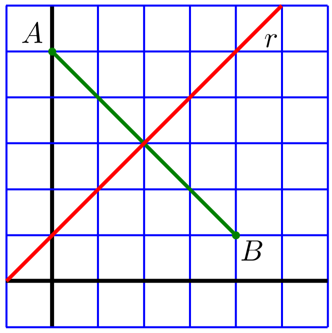
$$x^2+y^2-2x-4y-4=0$$



☞ Ejemplo: consideremos el conjunto de puntos que equidistan de los puntos $A=(0\,,5)$ y $B=(4\,,1)$.

Ese lugar geométrico se llama mediatriz del segmento





Un punto $P=(x\,,y)$ del lugar geométrico verifica $\mathrm{d}\,(P\,,A)=\mathrm{d}\,(P\,,B)$:

$\mathrm{d}\,(P\,,A)=\mathrm{d}\,(P\,,B)\rightarrow\sqrt{(x-0)^2+(y-5)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}$

Elevando al cuadrado, desarrollando y simplificando obtenemos la ecuación del lugar:

$$4x-5y-4=0$$

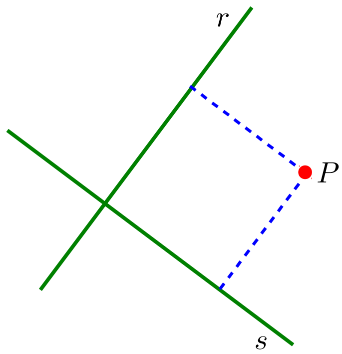
Como vemos, la mediatriz es una recta. Comprueba que pasa por el punto medio del segmento $\overline{AB}$ y que es perpendicular a la recta AB.

☞ Ejemplo: consideremos el lugar geométrico de los puntos que equidistan de las rectas $r:3x+4y-11=0$ y $s:4x-3y+2=0$

Ese lugar geométrico se llama bisectrices de los ángulos determinados por las rectas r y r´.

Para obtener su ecuación, procedemos así: un punto $P=(x\,,y)$ del lugar geométrico verifica $\mathrm{d}\,(P\,,r)=\mathrm{d}\,(P\,,s)$:

$$\mathrm{d}\,(P\,,r)=\mathrm{d}\,(P\,,r)\rightarrow\frac{|3\cdot x+4\cdot y-11|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|4\cdot x-3\cdot y+2|}{\sqrt{16+9}}$$



Quitando denominadores:

$$|3x+4y-11|=|4x-3y+2|$$

Los valores absolutos de esas expresiones son iguales bien cuando las expresiones son idénticas bien cuando son opuestas:

Caso 1. Las expresiones son idénticas:

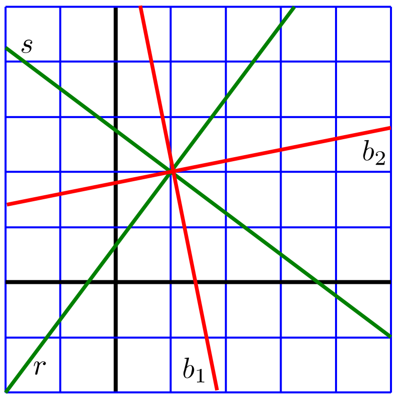
$$3x+4y-11=4x-3y+2\ \rightarrow\ -x+7y-13=0$$

Caso 2. Las expresiones son opuestas:

$$3x+4y-11=-\,(4x-3y+2)\ \rightarrow\ 7x+y-9=0$$

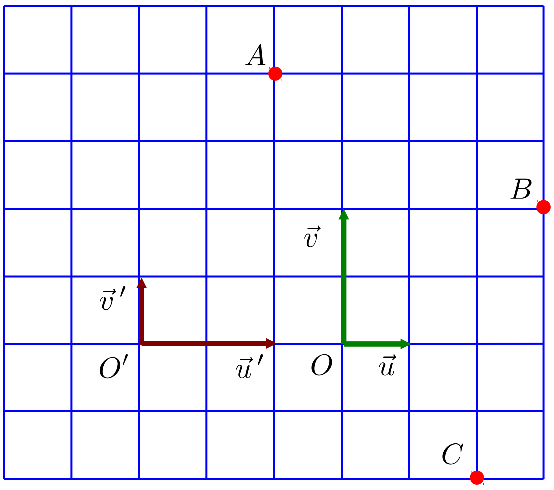
Como vemos, las bisectrices de los ángulos determinados por dos rectas son un par de rectas. Comprueba que:

- Pasan por el punto de intersección de r y s.
- Son perpendiculares entre así.

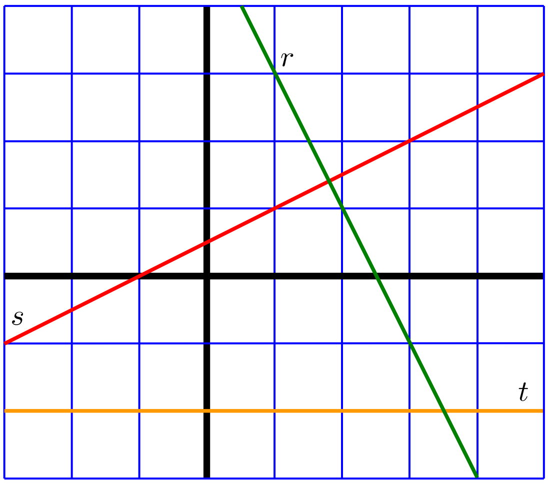


Ejercicios

1. En la figura hay dos referencias: $\mathfrak{R} = \{O\,; \vec{u}\,, \vec{v}\}$ y $\mathfrak{R}' = \{O'\,; \vec{u}'\,, \vec{v}'\}$. Calcula las coordenadas en ellas de los puntos A, B y C:



2. Obtén las ecuaciones de r, s y t:



3. Consideremos la recta de ecuación $r : \dfrac{x-5}{-2} = \dfrac{y}{7}$.

a) Da un punto de ella y un vector director.

b) Halla su ecuación implícita.

c) ¿Pasa por el punto $P = (3\,,7)$?

d) Calcula su pendiente.

e) Obtén la ecuación de la paralela a r por el punto $P = (2\,,3)$.

4. Dada la recta de ecuación $r : x + 3y - 5 = 0$:

a) Halla dos puntos de ella y dibújala.

b) Obtén un vector de dirección y su pendiente.

c) Escribe la ecuación explícita de la paralela a r por $P = (3\,,4)$.

5. Sea r la recta de ecuación $y = 2x - 5$.

a) Halla un vector director de ella.

b) Dibújala en unos ejes coordenados.

c) Halla a para que sea paralela a $s : \dfrac{x-3}{a} = \dfrac{y}{3}$

6. Dados $A = (1\,,2)$, $B = (-1\,,5)$ y $C = (3\,,3)$, halla la ecuación de la recta que pasa por A y por el punto medio del segmento $\overline{BC}$.

7. Sea r la recta que pasa por $A = (1\,,3)$ y $B = (2\,,5)$.

a) Halla la ecuación general de r .

b) ¿Está $P = (1\,,-2)$ en ella?

c) Halla a para que el punto $Q = (a\,,8)$ esté en la recta r .

d) Calcula el valor de b sabiendo que r es paralela a la recta $s : 3x + by - 3 = 0$

8. Sea la recta de ecuación $r : 2x + 3y - 6 = 0$.

a) Obtén un punto y un vector de dirección de la recta.

b) Halla los puntos en que intersecta a los ejes coordenados, y dibújala.

c) Escribe la ecuación de la paralela a ella por el punto $P = (1\,,1)$.

9. Consideremos el punto A y las rectas r y s:

$A = (2\,,-2)$, $r : 3x - y + c = 0$, $s : ax + 2y = 0$

Obtén a y c sabiendo que r pasa por A y que r y s son rectas paralelas.

10. Dados $A = (2\,,-1)$, $B = (3\,,4)$ y $C = (-2\,,2)$:

a) Halla la ecuación de la recta AB .

b) ¿Cuál es su pendiente? ¿Es una recta creciente o decreciente?

c) Comprueba que no pasa por el punto C .

d) Obtén la ecuación de la paralela a ella por el punto C.

e) ¿Para qué valores de a es secante la recta AB con la de ecuación $2ax + 3y - 5 = 0$?

11. Sean $A=(-2\,,0)\ ,\ B=(6\,,2)$ y $C=(2\,,4)$

a) Dibuja el triángulo ΔABC.

b) Dibuja y obtén las ecuaciones de las medianas del triángulo (la mediana relativa al vértice A pasa por dicho punto y por el punto medio de $\overline{BC}$).

c) Comprueba que las tres son secantes en un punto G , que se denomina *baricentro* del triángulo, cuyas coordenadas hay que calcular.

12. Halla la ecuación general de la recta perpendicular a $r: 3x-2y+5=0$ por el punto $A=(3\,,-1)$.

13. Halla el valor de a sabiendo que las rectas

$$r: 6x+5y+7=0\ ,\ s: ax+2y+3=0$$

son perpendiculares.

14. Determina el valor de a y de b sabiendo que

$$r: 2x+3y-b=0\ ,\ s: 6x-ay-1=0$$

son rectas perpendiculares y que la primera pasa por el punto $P=(1\,,0)$.

15. Sean $A=(1\,,1)\ ,\ B=(-3\,,2)$ y $C=(-1\,,-4)$

a) Dibuja el triángulo ΔABC

b) Obtén las ecuaciones de las rectas altura.

c) Comprueba que las tres son secantes en un punto H, que se denomina *ortocentro* del triángulo, cuyas coordenadas se piden.

16. Las rectas $ax+2y=3$ y $5x+by=7$ se cortan en el punto $(-1\,,3)$. ¿Qué ángulo determinan?

17. Halla la ecuación de la recta que, formando un ángulo de 45° con $2x-y=0$, pasa por $(-2\,,4)$.

18. ¿Qué puntos de la recta $r: x-2y-3=0$ distan 3 unidades del origen?

19. Obtén las coordenadas de un punto equidistante de $A=(1\,,0)$, $B=(-1\,,-2)$ y $C=(2\,,-5)$.

20. Halla la distancia de $P=(2\,,-1)$ a la recta que pasa por los puntos $A=(1\,,1)$ y $B=(-2\,,-3)$

21. Calcula k sabiendo que el punto $P=(1\,,k)$ dista 3 unidades de la recta $r: 3x+4y-5=0$.

22. Escribe la ecuación de dos rectas paralelas y halla la distancia que las separa.

23. Obtén la ecuación de la recta que pasa por el punto $A=(2\,,1)$ y dista tres unidades de $P=(2\,,-4)$.

24. Halla las coordenadas de los puntos de la recta $r: x+y=0$ que disten 3 unidades de la recta $s: 3x+4y-5=0$.

25. Determina en $r: x-y+1=0$ un punto que equidista de $s: x+y-3=0$ y $t: x-y+8=0$.

26. consideremos el triángulo ΔABC con

$$A=(1\,,-4)\ ,\ B=(3\,,2) \text{ y } C=(-2\,,0)$$

a) Dibújalo.

b) Calcula su área.

27. Dados los puntos $A=(1\,,3)$ y $B=(3\,,1)$:

a) Halla la ecuación de la mediatriz del segmento $\overline{AB}$.

b) Dibújala

c) Comprueba que pasa por el punto medio de $\overline{AB}$ y que es perpendicular a este segmento.

28. Dado el triángulo de vértices

$$A=(2\,,8)\ ,\ B=(6\,,2) \text{ y } C=(-2\,,-1)$$

a) Dibújalo.

b) Obtén las ecuaciones de las mediatrices de sus lados.

c) Comprueba que las tres son secantes en un punto *C* , que se denomina *circuncentro* del triángulo, cuyas coordenadas se piden.

d) Intenta dibujar una circunferencia circunscrita al triángulo. ¿Dónde está situado su centro?

29. Halla las ecuaciones de las bisectrices de las rectas $6x-8y+5=0$ y $8x-6y+5=0$, y comprueba que son dos rectas perpendiculares.

30. Sean $A=(0\,,0)\ ,\ B=(4\,,0)$ y $C=(0\,,3)$

a) Dibuja el triángulo ΔABC

b) Obtén las ecuaciones de las bisectrices interiores.

c) Comprueba que las tres son secantes en un punto *I* , que se denomina *incentro* del triángulo, cuyas coordenadas se piden.

d) Intenta dibujar una circunferencia inscrita en el triángulo. ¿Dónde está situado su centro?

Cuestiones

1. Las coordenadas en $\mathfrak{R} = \{O\,; \vec{u}\,,\, \vec{v}\}$ del punto P son $(x\,, y)$. ¿Cuáles serán sus coordenadas en la referencia $\mathfrak{R}' = \{O\,; \vec{v}\,,\, -\vec{u}\}$?

2. ¿Cuántos vectores directores tiene una recta?

3. Escribe la ecuación de una recta que pase por el punto $(1\,, 2)$.

4. Considera la recta que es paralela al eje X y que pasa por el punto $(a\,, b)$:

a) Da un vector director de ella.

b) Halla su ecuación general.

c) ¿Cuál es su pendiente?

d) Da su ecuación explícita.

5. Considera la recta que es paralela al eje Y, y que pasa por el punto $(a\,, b)$:

a) Da un vector director de ella.

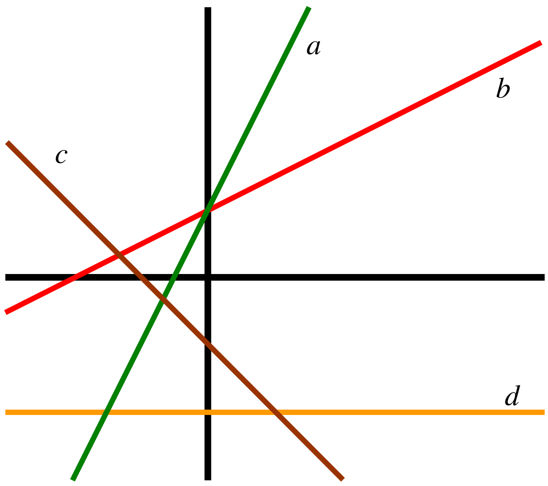
b) Halla su ecuación general.

c) ¿Cuál es su pendiente?

d) Da su ecuación explícita

6. Prueba que un vector director de la recta de ecuación $r : y = mx + n$ es $\vec{v} = (1\,, m)$.

7. Asocia a cada recta su ecuación:



$$y = -x - 1\,,\; y = \frac{1}{2}x + 1\,,\; y = -3\,,\; y = 2x + 1$$

8. Demuestra que si una recta corta a los ejes en los puntos $A = (a\,, 0)$ y $B = (0\,, b)$, su ecuación es

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Esta forma se denomina ecuación segmentaria de la recta.

9. Tomemos dos rectas r y s que forman un ángulo cuya medida es α. ¿Cuánto puede medir el ángulo $\left(\widehat{\vec{v}_r\,, \vec{v}_r}\right)$?

10. Comprueba que el vector $\vec{n} = (a\,, b)$ es perpendicular a la recta de ecuación $r : ax + by + c = 0$.

Un vector así es denominado vector normal a la recta.

11. Demuestra que el ángulo φ que forman dos rectas viene dado por

$$\tan\varphi = \left|\frac{m - m'}{1 + m \cdot m'}\right|$$

donde m y m' son las respectivas pendientes.

Autoevaluación

1. Dados $A = (2\,,3)$, $B = (3\,,5)$ y $C = (1\,,-1)$:

a) Halla la ecuación de la recta AB.

b) ¿Cuál es su pendiente? ¿Es una recta creciente o decreciente?

c) Comprueba que no pasa por C .

d) Obtén la ecuación de la perpendicular a ella por el punto C .

e) ¿Para qué valores de b es paralela la recta AB a la de ecuación $x + by - 7 = 0$?

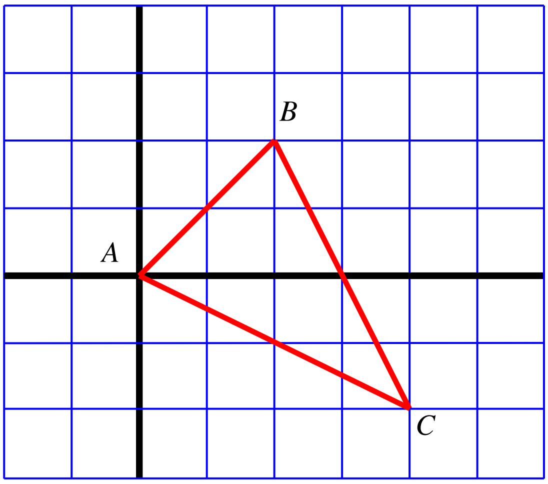
2. Halla k para que el triángulo de vértices

$$A = (0\,,1),\ B = (3\,,2) \text{ y } C = (k\,,1)$$

tenga de superficie 1 unidad de área.

3. Obtén un punto de la recta $r : x - y - 1 = 0$ que diste 2 unidades de la recta $s : -3x + 4y + 2 = 0$.

4. En el triángulo ΔABC de la figura



a) Halla la ecuación de la mediana correspondiente al vértice C .

b) Halla la ecuación de la mediatriz del lado $\overline{BC}$.

c) Calcula las coordenadas del punto en el que se interceptan estas dos rectas.

Autoevaluación

1.

a) La recta AB pasa por A con dirección $\overrightarrow{AB}$:

$$\left.\begin{array}{r} A=(2\,,3) \\ \overrightarrow{AB}=(1\,,2) \end{array}\right\} \to \frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}$$

Simplificando:

$$AB: 2x-y-1=0$$

b) $\overrightarrow{AB}=(1\,,2) \to m_{AB}=\dfrac{2}{1} \to m_{AB}=2$

c) Sustituyendo las coordenadas de C en la ecuación de AB:

$$2\cdot 1-(-1)-1 \neq 0 \to C \notin AB$$

d) Si la pendiente de la perpendicular es m:

$$m\cdot m_{AB}=-1 \to m\cdot 2=-1 \to m=-\frac{1}{2}$$

Así, la perpendicular tiene de ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} C=(1\,,-1) \\ m=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \to y+1=-\frac{1}{2}\,(x-1)$$

Simplificando:

$$x+2y+1=0$$

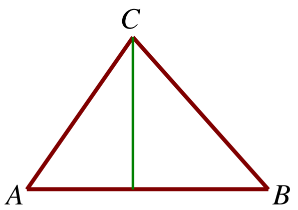
e) La pendiente de la recta dada es:

$$x+by-7=0 \to \vec{v}=(-b\,,1) \to m=-\frac{1}{b}$$

Como dos rectas son paralelas cuando tienen la misma pendiente, debe ser:

$$m=m_{AB} \to -\frac{1}{b}=2 \to b=-\frac{1}{2}$$

2. Tomemos como base el segmento $\overline{AB}$.Así



Dibujo orientativo

$$\text{base}=|\overrightarrow{AB}| \quad , \quad \text{altura}=\mathrm{d}\,(C\,,AB)$$

a) Obtengamos la longitud de la base b:

$$\overrightarrow{AB}=(3\,,1) \to |\overrightarrow{AB}|=\sqrt{10} \to base=\sqrt{10}$$

b) Obtengamos la longitud de la altura: es la distancia del vértice C a la recta AB.

$$\left.\begin{array}{r} A=(0\,,1) \\ \overrightarrow{AB}=(3\,,1) \end{array}\right\} \to \frac{x}{3}=\frac{y-1}{1} \to x-3y+3=0$$

La distancia de C a esa recta es

$$altura=\mathrm{d}\,(C\,,AB)=\frac{|k-3+3|}{\sqrt{1+9}}=\frac{|k|}{\sqrt{10}}$$

c) El área es base por altura dividido entre dos:

$$\frac{\sqrt{10}\cdot\dfrac{|k|}{\sqrt{10}}}{2}=1 \to |k|=2 \to k=\pm 2$$

3. Sea $P=(a\,,b)$

$$P\in r \to a-b-1=0 \to b=a-1.$$

Como $\mathrm{d}\,(P\,,s)=2$:

$$\frac{|-3a+4b+2|}{\sqrt{9+16}}=2 \to |-3a+4b+2|=10$$

Sustituyendo $b=a-1$ en esta expresión resulta:

$$|a-2|=10 \to \left|\begin{array}{lll} a-2=10 & \to & a=12 \\ a-2=-10 & \to & a=-8 \end{array}\right.$$

Resolviendo y sustituyendo:

$$P_1=(12\,,11) \;\;,\;\; P_2=(-8\,,-9)$$

4.

a) Hallemos el punto medio de $\overline{AB}$:

$$M=\frac{A+B}{2}=(1\,,1)$$

La mediana pasa por el vértice C y por ese punto medio:

$$\left.\begin{array}{r} C=(4\,,-2) \\ \overrightarrow{CM}=(-3\,,3) \end{array}\right\} \to \frac{x-4}{-3}=\frac{y+2}{3}$$

Simplificando:

$$x+y-2=0$$

b) Un punto $P=(x\,,y)$ está en la mediatriz de $\overline{BC}$ precisamente cuando $\mathrm{d}\,(P\,,B)=\mathrm{d}\,(P\,,C)$:

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y+2)^2}$$

Elevando al cuadrado, desarrollando y pasando todo a un miembro:

$$4x - 8y - 12 = 0$$

Simplificando:

$$x - 2y - 3 = 0$$

c) Para obtener el corte de ambas rectas resolvemos el sistema que forman sus ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x + y - 2 = 0 \\ x - 2y - 3 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \ x = \frac{7}{3}\,,\, y = -\frac{1}{3}$$

El punto intersección es $P = \left(\frac{7}{3}\,, -\frac{1}{3}\right)$.