TEMA 6

VECTORES

Contenidos

1. Vectores y traslaciones.
2. Operaciones.
3. Bases en el plano.
4. Producto escalar.

Tiempo estimado

4 sesiones

Criterios de Evaluación

1. Ver la estrecha relación que hay entre movimientos, vectores y pares de números.
2. Saber operar con vectores, tanto gráficamente como a través de sus componentes.
3. Saber estudiar dependencias lineales sencillas.
4. Comprender qué es una base y las coordenadas en ella.
5. Entender el concepto de producto escalar y conocer sus propiedades y aplicaciones.
6. Manejar con solturas las expresiones analíticas del producto escalar, del módulo y del ángulo.

1.Vectores y traslaciones en el plano.

❑ Concepto.

A lo largo de este tema nos vamos a dedicar al estudio de una de las herramientas más importantes de las Matemáticas y que usa, por ejemplo, la Física para el estudio del movimiento: el vector.

Nosotros daremos una definición analítica, a través de los números:

Un vector es un par ordenado de números reales. Al conjunto de todos los vectores se le designa por $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{R}^2 = \{(v_1, v_2) : v_1, v_2 \in \mathbb{R}\}$$

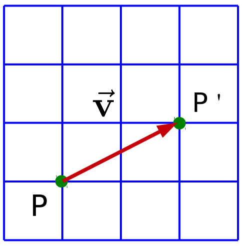
Dado el vector $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2)$, al número v_1 se le llama primera componente y a v_2 se le llama segunda componente del vector.

☞ Ejemplo: Tenemos que $\vec{\mathbf{v}} = (-2, 3)$ es un vector de $\mathbb{R}^2$. Su primera componente es -2 y su segunda componente es 3 .

❑ Interpretación geométrica.

Un vector define en el plano un movimiento llamado "**traslación**".

Supongamos que cada punto P del plano puede "moverse", "trasladarse de una posición hasta otra" y tomemos, por ejemplo, el vector $\vec{\mathbf{v}} = (2, 1)$: éste define el movimiento $+2$ horizontalmente y $+1$ verticalmente; es decir: 2 hacia la derecha y 1 hacia arriba.



Si aplicamos al punto $P = (x, y)$ el vector $\vec{\mathbf{v}}$, éste lo trasladará hasta $P' = (x+2, y+1)$. Simbólicamente:

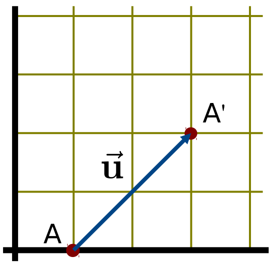
$$P \longrightarrow P' = P + \vec{\mathbf{v}}$$

En el margen se ha representado gráficamente ese movimiento.

Se dice que $\vec{\mathbf{v}}$ es el vector que lleva P hasta P' , o que es el vector que va de P a P' . Y se escribe:

$$\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{PP'}$$

☞ Ejemplo: El vector $\vec{\mathbf{u}} = (2, 2)$ lleva el punto $A = (1, 0)$ hasta el punto $A' = (3, 2)$:

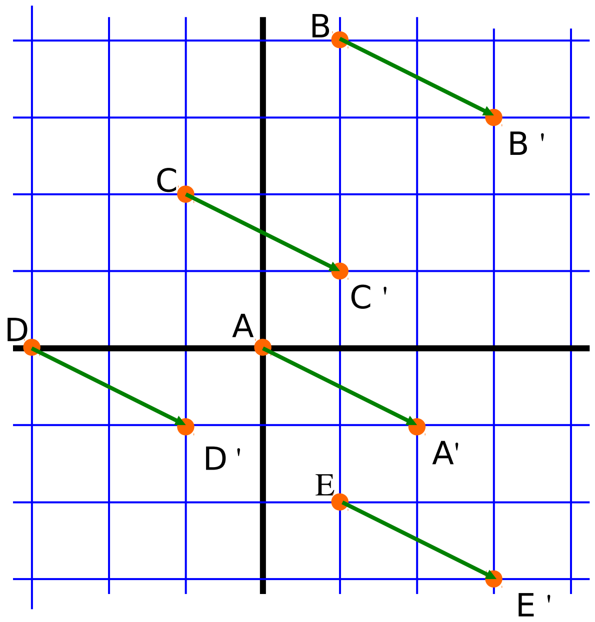


☞ Ejemplo: Si $\vec{\mathbf{v}} = (2,-1)$, el vector traslada

$$\begin{array}{lcl} A=(0,0) & \xrightarrow{hasta} & A' = A+\vec{\mathbf{v}} = (2,-1) \\ B=(1,4) & \xrightarrow{hasta} & B' = B+\vec{\mathbf{v}} = (3,3) \\ C=(-1,2) & \xrightarrow{hasta} & C' = C+\vec{\mathbf{v}} = (1,1) \\ D=(-3,0) & \xrightarrow{hasta} & D' = D+\vec{\mathbf{v}} = (-1,-1) \\ E=(1,-2) & \xrightarrow{hasta} & E' = E+\vec{\mathbf{v}} = (3,-3) \end{array}$$

Observemos en este ejemplo que:

1. El movimiento que define el vector es "dos cuadrículas hacia la derecha y una cuadrícula hacia abajo".
2. Todas las representaciones de un mismo vector tienen igual longitud, dirección y sentido: se dice que las representaciones de un mismo vector son equipolentes.
3. Decimos que el vector se ha representado, por ejemplo, con origen en A y extremo en A'.
4. El vector $\vec{v}$ puede dibujarse o representarse con origen en cualquier punto del plano. Si deseamos representarlo con origen en el punto *P*, tomaremos como extremo $Q = P+\vec{v}$.



Nótese que así tenemos que es:

$$\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{EE'}$$

Cerremos con las definiciones pertinentes:

Llamamos traslación de vector $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2)$ al movimiento en el plano $\mathbf{XY}$ que lleva el punto $P=(x,y)$ hasta el punto $P' = (x+v_1, y+v_2)$.

Se dice en ese caso que el vector $\vec{\mathbf{v}}$ va desde P hasta P' . Y se escribe así:

$$\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{PP'}$$

❑ Coordenadas y componentes.

Un problema que aparece continuamente en la geometría es obtener las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$ conocidas las coordenadas de los puntos A y B Es fácil: como a las coordenadas del origen hay que sumar las componentes del vector para obtener el extremo, para obtener las componentes del vector restaremos a las coordenadas del extremo las del origen:

Si $P=(x,y)$ y $P'=(x',y')$, entonces tenemos que:

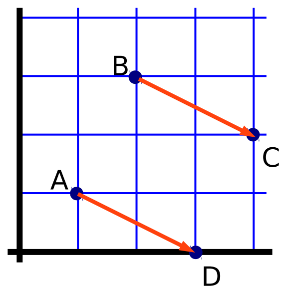
$$\overrightarrow{PP'} = (x'-x, y'-y)$$

☞ Ejemplo: Sean $A=(1,1)$, $B=(2,3)$, $C=(4,2)$, $D=(3,0)$.

Comprobemos que el vector que lleva A sobre D es el mismo que va desde B hasta C :

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AD}=(3-1,0-1)=(2,-1)\\ \overrightarrow{BC}=(4-2,2-3)=(2,-1)\end{array}\right\} \longrightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$$

Obsérvese que el cuadrilátero de vértices $ABCD$ es un paralelogramo.



2.Operaciones.

❑ Suma algebraica.

Para sumar dos vectores basta sumar las correspondientes componentes:

> Dados $\vec{\mathbf{u}}=(u_1,u_2)$ y $\vec{\mathbf{v}}=(v_1,v_2)$ se define el vector suma $\vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathbf{v}}$ por:
>
> $$\vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathbf{v}}=(u_1+v_1,u_2+v_2)$$

☞ Ejemplo:

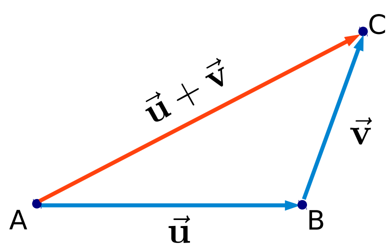
$$\vec{\mathbf{u}}\,(3,1)\ ,\ \vec{\mathbf{v}}\,(-3,4)\ \rightarrow \left\{\begin{array}{l}\vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathbf{v}}=(3-3,1+4)=(0,5)\\ \vec{\mathbf{u}}-\vec{\mathbf{v}}=(3+3,1-4)=(6,-3)\end{array}\right.$$

> La suma de vectores tiene las siguientes propiedades: asociativa, conmutativa, hay elemento nulo y todo vector tiene un opuesto.
>
> El elemento nulo es el vector cero:
>
> $$\vec{\mathrm{v}}=(0,0)$$
>
> Dos vectores son opuestos cuando sus respectivas componentes son opuestas entre sí:
>
> $$-\vec{\mathrm{u}}=(-\mathrm{u}_1,-\mathrm{u}_2)$$
>
> La diferencia o resta se define así:
>
> $$\vec{\mathrm{u}}-\vec{\mathrm{v}}\overset{def}{=}\vec{\mathrm{u}}+(-\vec{\mathrm{v}})$$

❑ Regla del paralelogramo.

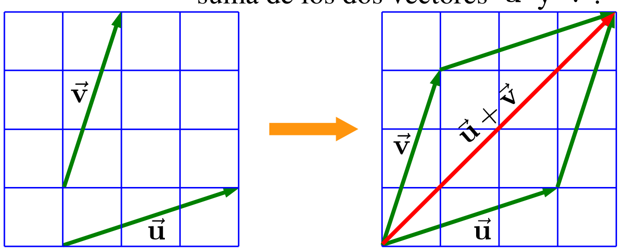
Es posible sumar gráficamente dos vectores, sin componentes:

> Si $\vec{\mathbf{u}}=\overrightarrow{AB}$ y $\vec{\mathbf{v}}=\overrightarrow{BC}$ entonces
>
> $$\vec{\mathbf{u}}+\vec{\mathbf{v}}=\overrightarrow{AC}$$



- Prueba: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(B-A)+(C-B)=C-A=\overrightarrow{AC}$

☞ Ejemplo: observemos cómo se realiza de modo totalmente gráfico la suma de los dos vectores $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$:



> Colocamos ambos vectores con un origen común y a continuación representamos cada uno a continuación del otro: la suma es la diagonal del paralelogramo que determinan los sumandos (es el vector que va del "origen común" al "extremo común").
>
> Por ello al procedimiento descrito se le llama regla del paralelogramo.

Observación: deducimos de lo anterior dos cosas:

– El opuesto del vector $\overrightarrow{AB}$ es $\overrightarrow{BA}$ pues $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{\mathbf{0}}$:

$$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$$

– Una regla para realizar la resta gráficamente:

$$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$$

❑ Producto por números.

Para multiplicar un vector por un número basta multiplicar cada una de las componentes del vector por dicho número:

> Si t es un número real y $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2)$ es un vector, se define el producto del número por el vector mediante:
> $$t \cdot \vec{\mathbf{u}} = (tu_1, tu_2)$$

☞ Ejemplo:

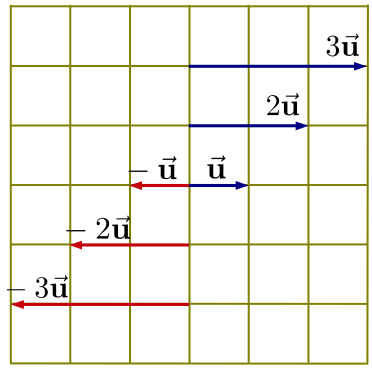
$$\vec{\mathbf{u}} = (1, -2) \;\rightarrow\; \begin{cases} 3 \cdot \vec{\mathbf{u}} = (3 \cdot 1, 3 \cdot (-2)) = (3, -6) \\ -2\vec{\mathbf{u}} = (-2 \cdot 1, -2 \cdot (-2)) = (-2, 4) \end{cases}$$

Es fácil comprobar que el producto goza de las siguientes propiedades elementales:

- Distributiva del producto respecto de la suma:
  $$\mathrm{t} \cdot (\vec{\mathrm{u}} + \vec{\mathrm{v}}) = \mathrm{t} \cdot \vec{\mathrm{u}} + \mathrm{t} \cdot \vec{\mathrm{v}}$$
- Distributiva de la suma respecto del producto:
  $$\mathrm{t} \cdot (\vec{\mathrm{u}} + \vec{\mathrm{v}}) = \mathrm{t} \cdot \vec{\mathrm{u}} + \mathrm{t} \cdot \vec{\mathrm{v}}$$
- Asociativa mixta:
  $$(\mathrm{s} + \mathrm{t}) \cdot \vec{\mathrm{u}} = \mathrm{s} \cdot \vec{\mathrm{u}} + \mathrm{t} \cdot \vec{\mathrm{u}}$$
- Producto por unidad:
  $$1 \cdot \vec{\mathrm{u}} = \vec{\mathrm{u}}$$

❑ Cálculo geométrico del producto.

¿Qué relación hay entre la representación geométrica de un vector y la de sus múltiplos? Vamos a estudiarlo con $\vec{\mathbf{u}} = (1, 0)$. Observemos la representación en el margen.



Es fácil observar que la representación de $t \cdot \vec{\mathbf{u}}$:

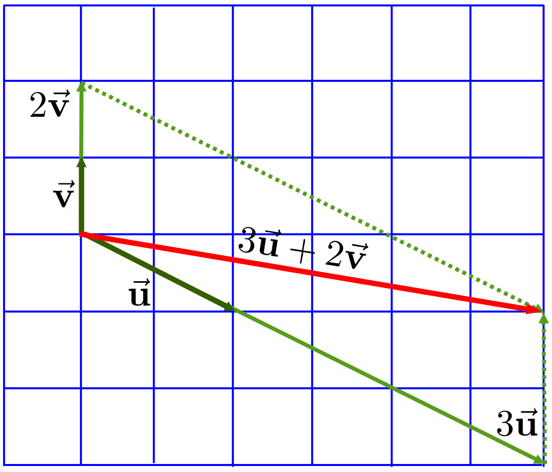
- tiene igual dirección que $\vec{\mathbf{u}}$
- tiene sentido igual a $\vec{\mathbf{u}}$ si es $t > 0$
- tiene sentido contrario a $\vec{\mathbf{u}}$ si es $t < 0$
- tiene la longitud de $\vec{\mathbf{u}}$ multiplicada por $|t|$.

Esto conduce a un criterio algebraico para averiguar si dos vectores son paralelos: uno debe ser múltiplo del otro y por ello sus componentes son proporcionales.

$$\boxed{\vec{\mathbf{u}} \parallel \vec{\mathbf{v}} \iff \frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2}}$$

❑ Combinaciones lineales.

☞ Ejemplo: dados los vectores $\vec{\mathbf{u}} = (2, -1)$, $\vec{\mathbf{v}} = (0, 1)$, observa cómo se ha representado la combinación lineal $\vec{\mathbf{x}} = 3\vec{\mathbf{u}} + 2\vec{\mathbf{v}}$:



Una combinación lineal uno o más vectores es cualquier operación que combine (de ahí el nombre) sumas o restas con productos por números reales.

☞ Ejemplo: si $\vec{u}=(1,-2)$, $\vec{v}=(3,4)$, $\vec{w}=(-1,0)$, calculemos:

$3\vec{u}=(3,-6)$

$2\vec{u}+3\vec{v}=(2,-4)+(9,12)=(11,8)$

$\vec{u}-\vec{v}+3\vec{w}=(1,-2)-(3,4)+(-3,0)=(-5,-6)$

☞ Ejemplo: estudiemos si $\vec{w}=(5,0)$ es combinación lineal de $\vec{u}=(1,-2)$ y $\vec{v}=(1,3)$.

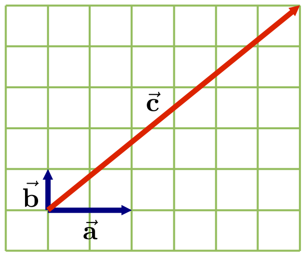
Veamos si existen dos números reales s y t tales que $\vec{w}=s\cdot\vec{u}+t\cdot\vec{v}$:

$$(5,0)=s\cdot(1,-2)+t\cdot(1,3)=(s+t,-2s+3t)\rightarrow\begin{cases} s+\ \ t=5\\ -2s+3t=0\end{cases}$$

Resolviendo obtenemos $s=3$ y $t=2$.

Tenemos así que $\vec{w}$ es la siguiente combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\vec{w}=3\vec{u}+2\vec{v}$$



☞ Ejemplo: observa los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ representados en el margen.

Es $\vec{c}$ combinación lineal de $\vec{a}$, $\vec{b}$, ya que como es fácil observar:

$$\vec{c}=3\vec{a}+5\vec{b}$$

3.Bases en el plano.

En el estudio de los espacios vectoriales destaca un concepto: el de base.

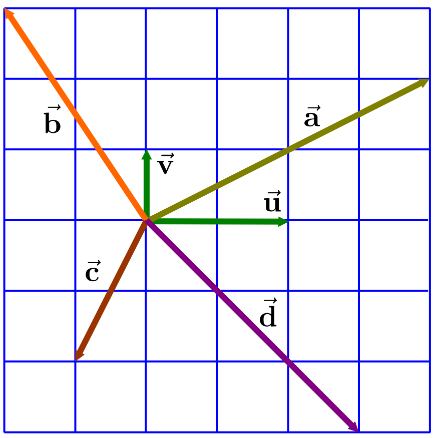
> En el plano, una base es una pareja de vectores linealmente independientes, es decir, con direcciones distintas.

Es usual decir que
- dos vectores paralelos son linealmente dependientes.
- dos vectores no paralelos son linealmente independientes.

Ésta es la característica más importante de las bases:

> Si $\mathfrak{B}=\{\vec{u},\vec{v}\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$, entonces cualquier vector $\vec{x}$ puede expresarse de forma única como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$:
>
> $$\vec{x}=s\vec{u}+t\vec{v}$$
>
> En ese caso, se dice que las coordenadas de $\vec{x}$ en la base $\mathfrak{B}$ son (s,t) .

☞ Ejemplo: Fijémonos en los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de la figura que tenemos aquí. Esos dos vectores son una base del plano, porque son linealmente independientes (no paralelos).



Observa cómo cualquier vector que se dibuje puede expresarse como combinación lineal de ellos dos:

$\vec{a}=2\vec{u}+2\vec{v}\quad\rightarrow\quad\vec{a}$ tiene coordenadas $(2,2)$ en $\mathfrak{B}$

$\vec{b}=-\vec{u}+3\vec{v}\quad\rightarrow\quad\vec{b}$ tiene coordenadas $(-1,3)$ en $\mathfrak{B}$

$\vec{c}=-0{,}5\vec{u}-2\vec{v}\quad\rightarrow\quad\vec{c}$ tiene coordenadas $(-0{,}5,-2)$ en $\mathfrak{B}$

$\vec{d}=1{,}5\vec{u}-3\vec{v}\quad\rightarrow\quad\vec{d}$ tiene coordenadas $(1{,}5,-3)$ en $\mathfrak{B}$

☞ **NOTA**: no confundamos las componentes de un vector con las coordenadas de ese vector en una base determinada.

☞ Ejemplo: sean $\vec{\mathbf{u}} = (1,1)$, $\vec{\mathbf{v}} = (0,-1)$.

Probemos que $\mathfrak{B} = \{\vec{\mathbf{u}}\,,\,\vec{\mathbf{v}}\}$ es una base del plano. Se trata de dos vectores que verifican:

$$\frac{0}{1} \neq \frac{-1}{1} \longrightarrow \vec{\mathbf{u}} \nparallel \vec{\mathbf{v}}$$

Así, se trata de una pareja de vectores independientes, i.e. una base.

Calculemos las coordenadas de $\vec{\mathbf{x}} = (3,5)$ en la base $\mathfrak{B}$.

Para ello expresamos el vector como c. l. de los vectores de la base:

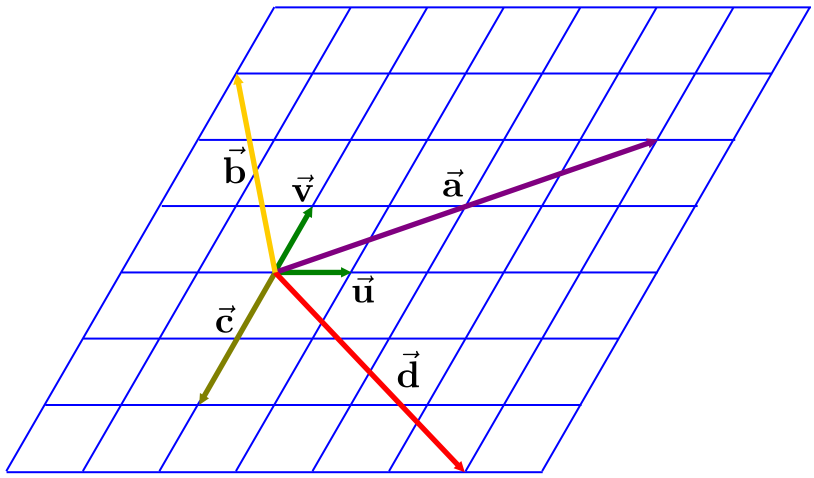
$$\vec{\mathbf{x}} = s\vec{\mathbf{u}} + t\vec{\mathbf{v}} \to (3,5) = s\cdot(1,1) + t\cdot(0,-1) \to \begin{cases} s=3 \\ s-t=5 \to t=-2 \end{cases}$$

Tenemos así que las coordenadas de $\vec{\mathbf{x}}$ en la base $\mathfrak{B}$ son $(3,-2)$.

Calculemos el vector $\vec{\mathbf{y}}$ con coordenadas $(5,5)$ en la base $\mathfrak{B}$:

$$\vec{\mathbf{y}} = 5\vec{\mathbf{u}} + 5\vec{\mathbf{v}} \to \vec{\mathbf{y}} = 5\cdot(1,1) + 5\cdot(0,-1) \to \vec{\mathbf{y}} = (5\,,0)$$

☞ Ejemplo: en la figura siguiente



$\mathfrak{B} = \{\vec{\mathbf{u}}\,,\vec{\mathbf{v}}\}$ es una base del plano pues $\{\vec{\mathbf{u}}\,,\vec{\mathbf{v}}\}$ son independientes.

$\vec{\mathbf{a}} = 4\vec{\mathbf{u}} + 2\vec{\mathbf{v}} \quad \to \quad \vec{\mathbf{a}}$ tiene coordenadas $(4\,,2)$ en $\mathfrak{B}$

$\vec{\mathbf{b}} = -2\vec{\mathbf{u}} + 3\vec{\mathbf{v}} \quad \to \quad \vec{\mathbf{b}}$ tiene coordenadas $(-2\,,3)$ en $\mathfrak{B}$

$\vec{\mathbf{c}} = -2\vec{\mathbf{v}} \quad \to \quad \vec{\mathbf{c}}$ tiene coordenadas $(0\,,-2)$ en $\mathfrak{B}$

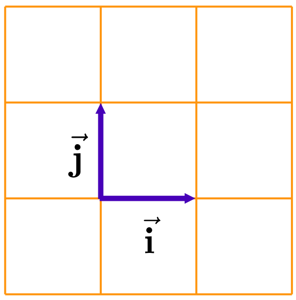
$\vec{\mathbf{d}} = 4\vec{\mathbf{u}} - 3\vec{\mathbf{v}} \quad \to \quad \vec{\mathbf{d}}$ tiene coordenadas $(4\,,-3)$ en $\mathfrak{B}$

☞ Ejemplo: es fácil comprobar que los vectores $\vec{\mathbf{i}} = (1,0)$ y $\vec{\mathbf{j}} = (0,1)$ forman una base del plano.

A la base $\mathfrak{B} = \left\{\vec{\mathbf{i}}\,,\vec{\mathbf{j}}\right\}$ se la denomina base canónica, y es la más usada en la práctica.

Observa que las coordenadas de cualquier vector en la base canónica coinciden con sus componentes, pues:

$$\vec{\mathbf{x}} = s\vec{\mathbf{i}} + t\vec{\mathbf{j}} \longrightarrow \vec{\mathbf{x}} = (s\,,t)$$



4.Producto escalar

Concepto.

El producto escalar se introduce para el estudio de ángulos y distancias:

Si $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2)$ y $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2)$, se define su producto escalar $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$ por:

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

Importante: el producto escalar de dos vectores es un número (no un vector).

El curso próximo estudiaremos el denominado producto vectorial, donde el resultado es un vector.

☞ Ejemplo: el producto de escalar de $\vec{\mathbf{u}} = (3,1)$, $\vec{\mathbf{v}} = (-3,4)$ es:

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = 3 \cdot (-3) + 1 \cdot 4 = -5$$

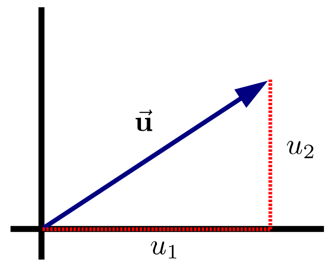
Aquí tenemos recogidas las propiedades más importantes:

Conmutatividad:	$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{u}}$
Asociatividad mixta:	$\vec{\mathbf{u}} \cdot (t\vec{\mathbf{v}}) = (t\vec{\mathbf{u}}) \cdot \vec{\mathbf{v}} = t(\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}})$
Distributividad:	$\vec{\mathbf{u}} \cdot (\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}) = \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{w}}$
Positividad:	$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{u}} > 0$ si $\vec{\mathbf{u}} \neq \vec{\mathbf{0}}$

- Prueba: veamos la última

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{u}} = u_1 u_1 + u_2 u_2 = u_1^2 + u_2^2 > 0 \text{ si } \vec{\mathbf{u}} \neq \vec{\mathbf{0}}$$

Módulo y producto escalar.



Observemos el vector $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2)$ dibujado al margen y designemos su longitud o módulo por $|\vec{\mathbf{u}}|$. Por el Teorema de Pitágoras es:

$$|\vec{\mathbf{u}}|^2 = u_1^2 + u_2^2$$

Extrayendo la raíz cuadrada obtenemos:

El módulo o longitud del vector $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2)$ viene dado por

$$|\vec{\mathbf{u}}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

Observemos que $|\vec{\mathbf{u}}|^2 = \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{u}}$

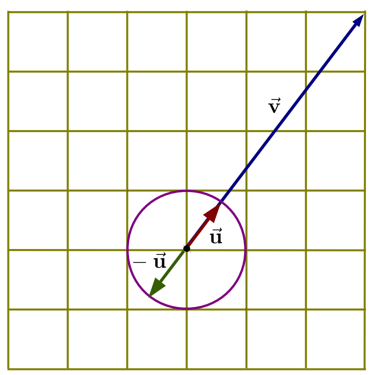
☞ Ejemplo: calculemos el módulo del vector $\vec{\mathbf{v}} = (3,4)$:

$$|\vec{\mathbf{v}}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

☞ Ejemplo: comprobemos que para cualquier valor de α , el vector $\vec{\mathbf{u}} = (\cos\alpha\,,\operatorname{sen}\alpha)$ es unitario; esto es, que tiene longitud 1:

$$|\vec{\mathbf{u}}| = \sqrt{\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha} = 1$$

☞ Ejemplo: demos un vector unitario con igual dirección que $\vec{\mathbf{v}} = (3,4)$.



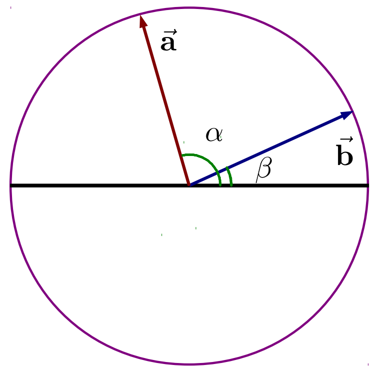
Si dividimos el vector por su longitud, el resultado será un vector con módulo 1 (unitario) y tendrá igual dirección (al ser un múltiplo suyo):

$$\pm\frac{1}{5}\vec{\mathbf{v}} \rightarrow \begin{cases} \vec{\mathbf{u}} = \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right) & \text{con igual sentido.} \\ -\vec{\mathbf{u}} = \left(-\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5}\right) & \text{con distinto sentido.} \end{cases}$$

❑ Ángulo y producto escalar.

El producto escalar es una magnífica herramienta para obtener ángulos. Aquí tenemos cómo obtener el ángulo formado por dos vectores:

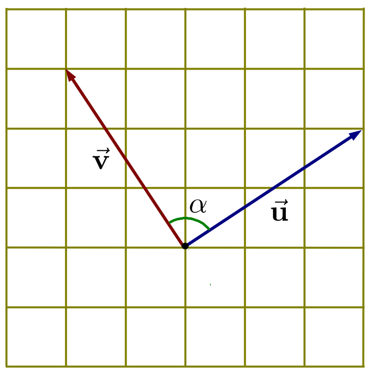
> Dados los vectores $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$, se tiene que:
> $$\cos\left(\widehat{\vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}}}\right)=\frac{\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}{|\vec{\mathbf{u}}||\vec{\mathbf{v}}|}$$



- <u>Prueba</u>: el ángulo θ que forman dos vectores $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ es el mismo que forman los vectores unitarios $\vec{\mathbf{a}}=\frac{1}{|\vec{\mathbf{u}}|}\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{b}}=\frac{1}{|\vec{\mathbf{v}}|}\vec{\mathbf{v}}$. Así que calculemos el ángulo que forman estos dos.

  Llamemos β al ángulo que forma con la horizontal $\vec{\mathbf{b}}$ y α al que forma con la horizontal $\vec{\mathbf{a}}$. Así:

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\\ &=(\cos\alpha,\operatorname{sen}\alpha)\cdot(\cos\beta,\operatorname{sen}\beta)=\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}=\frac{\vec{\mathbf{u}}}{|\vec{\mathbf{u}}|}\cdot\frac{\vec{\mathbf{v}}}{|\vec{\mathbf{v}}|}\\ &=\frac{\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}{|\vec{\mathbf{u}}||\vec{\mathbf{v}}|}\end{aligned}$$



☞ <u>Ejemplo</u>: calculemos el ángulo formado por los vectores dibujados al margen.

Como $\vec{\mathbf{u}}=(3,2)$ y $\vec{\mathbf{v}}=(-2,3)$:

$$\cos(\alpha)=\frac{\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}{|\vec{\mathbf{u}}||\vec{\mathbf{v}}|}=\frac{3\cdot(-2)+2\cdot 3}{\sqrt{3^2+2^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+3^2}}=\frac{0}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}}=0$$

Luego:

$$\alpha=\frac{\pi}{2}$$

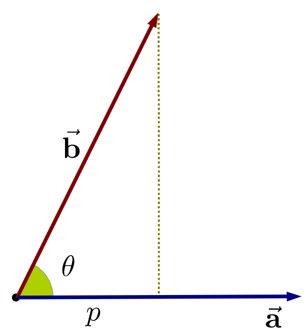
☞ <u>Observaciones</u>: podemos sacar del ejemplo anterior las siguientes consecuencias, ambas muy importantes.

- Si el producto escalar de dos vectores es cero, ambos son perpendiculares (se dice también que son ortogonales).

$$\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}=0\iff\alpha=\frac{\pi}{2}$$

- Dado el vector $\vec{\mathbf{u}}=(a,b)$, un vector ortogonal a él es $\vec{\mathbf{v}}=(-b,a)$.

☞ <u>Ejemplo</u>: veamos una aplicación típica del producto escalar. Calculemos el valor de la proyección p de un vector $\vec{\mathbf{b}}$ sobre otro vector $\vec{\mathbf{a}}$.



En la figura observamos $$\frac{p}{|\vec{\mathbf{b}}|}=\cos\theta\ \to\ \frac{p}{|\vec{\mathbf{b}}|}=\frac{\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}}{|\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|}$$

Despejando p: $$p=\frac{\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}}{|\vec{\mathbf{a}}|}$$

Ejercicios

1. Calcula x e y sabiendo que los vectores

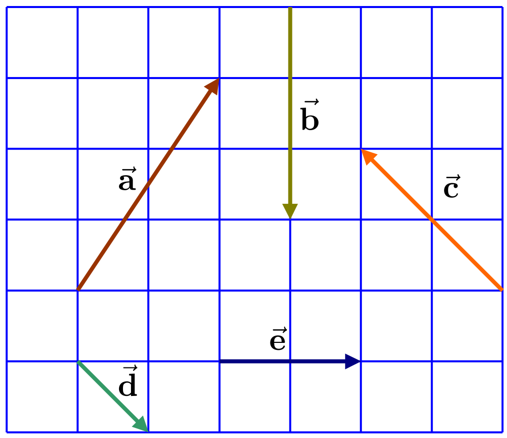
$$\vec{u} = (2x+1, x+2y) \ , \ \vec{v} = (3y+9, -3)$$

son iguales.

2. Representa con un origen común cualquiera los vectores:

$$\vec{x} = (3,-2) \ , \ \vec{y} = (-4,1) \ , \ \vec{z} = (-5,3)$$

3. Halla las componentes de los vectores representados a continuación:



4. Representa $\vec{x} = (-3,1)$ con origen en el punto $A = (3,4)$. ¿Cuál es el extremo?

5. Un vector $\vec{v}$ de componentes $(-5,7)$ tiene origen en $A = (-3\,,3)$. Determina su extremo A' algebraicamente, comprobando gráficamente el resultado.

6. Si $\overrightarrow{AB} = (4\,,3)$ y el punto B tiene de coordenadas $(-1\,,2)$, ¿cuáles son las coordenadas del punto A?

7. Si $A = (2\,,1)$, $B = (1\,,3)$, $C = (4\,,5)$, ¿cuáles deben ser las coordenadas del punto D que verifica $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$? Dibuja la situación.

8. El cuadrilátero de vértices

$$A = (2\,,5) \ , \ B = (6\,,3) \ , \ C = (4\,,1) \ , \ D = (0\,,3)$$

¿es un paralelogramo? Compruébalo algebraicamente tras dibujarlo.

9. Sea $ABCD$ un paralelogramo. Halla las coordenadas de D sabiendo que

$$A = (3\,,-5) \ , \ B = (-5\,,4) \ , \ C = (8\,,-7)$$

10. Sean $\vec{u} = (-2,3)$, $\vec{v} = (5,-3)$, $\vec{w} = (2,2)$. Calcula:

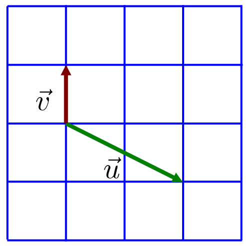
a) $\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$.

b) $2\vec{u} + 3\left(\vec{v} - \dfrac{1}{2}\vec{w}\right)$.

11. Sea $\vec{a} = (1,-2)$, $\vec{b} = (3,1)$. Obtén el vector $\vec{x}$ que verifica

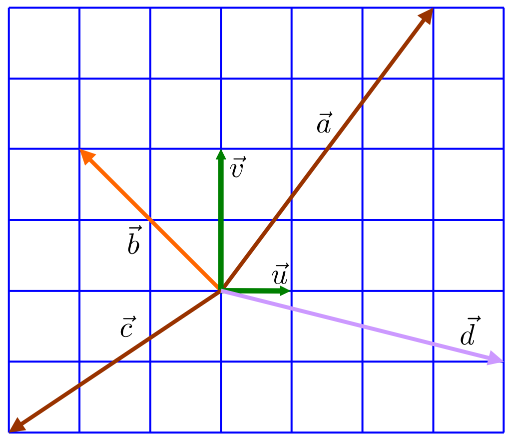
$$3\vec{x} + 2\vec{a} = 3\left(\vec{b} - 2\vec{x}\right)$$

12. Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ son los de la figura, representa los vectores



$$2\vec{u} + 2\vec{v} \ , \ 2\vec{u} - 2\vec{v} \ , \ -\vec{u} + 2\vec{v} \ , \ -\vec{u} - 2\vec{v}$$

13. Observa los vectores de la figura y expresa los vectores $\vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{c}\,,\vec{d}$ como c. l. de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.



14. Halla s y t sabiendo que

$$(1,8) = s\,(2,1) + t\,(1,-2)$$

15. Expresa $\vec{x} = (5,-2)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{a} = (1,-3)$, $\vec{b} = (3,4)$.

16. Sin realizar ningún dibujo, averigua si los vectores $\vec{u} = (1\,,3)$, $\vec{v} = (2\,,5)$ son paralelos. ¿Son linealmente independientes?

17. Se sabe que $\vec{a} = (-2\,,3)$, $\vec{b} = (5\,,y)$ son dos vectores dependientes. ¿Cuál es el valor de y?

18. Estudia si son dependientes o independientes los siguientes pares de vectores:

a) $\vec{a}=(-2\,,0)$, $\vec{b}=(4\,,0)$

b) $\vec{a}=(0\,,3)$, $\vec{b}=(0\,,1)$

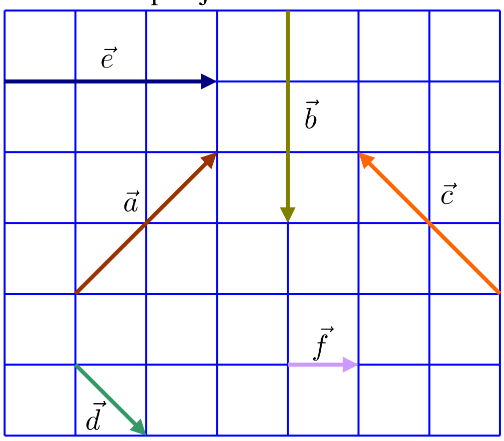
c) $\vec{a}=(-1\,,3)$, $\vec{b}=(2\,,-6)$

d) $\vec{a}=(2\,,3)$, $\vec{b}=(3\,,4)$

e) $\vec{x}=(-4\,,-6)$, $\vec{y}=(6\,,18)$

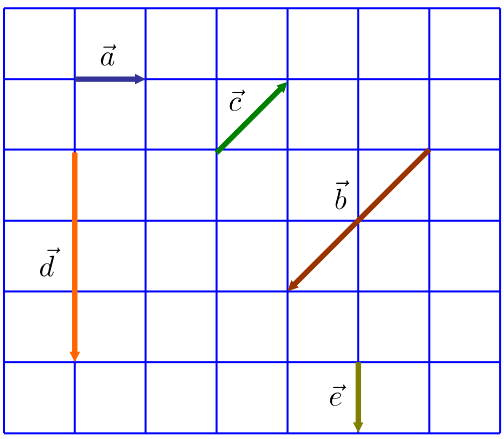
f) $\vec{u}=(-5\,,0)$, $\vec{v}=(7\,,12)$

19. En los vectores de la figura siguiente, estudia si son dependientes las parejas de vectores :



$\{\vec{a}\,,\vec{b}\}$; $\{\vec{b}\,,\vec{c}\}$; $\{\vec{c}\,,\vec{d}\}$; $\{\vec{d}\,,\vec{e}\}$; $\{\vec{e}\,,\vec{f}\}$

20. Dados los vectores de la figura:



a) Estudia si $\{\vec{a}\,,\vec{b}\}$ son una base.

b) Estudia si $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son dependientes.

c) $\{\vec{c}\,,\vec{d}\}$ es una base porque...

d) En la pareja $\{\vec{d}\,,\vec{e}\}$ expresa cada uno como combinación lineal del otro.

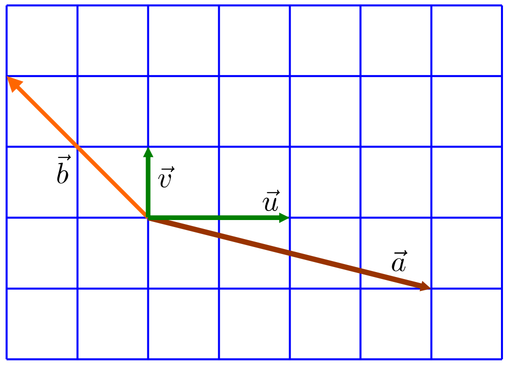
21. Dados los vectores $\vec{u}=(1\,,0)$, $\vec{v}=(1\,,1)$:

a) Demuestra que $\mathfrak{B}=\{\vec{u}\,,\,\vec{v}\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$

b) Halla las coordenadas en $\mathfrak{B}$ de $\vec{w}=(5\,,2)$.

c) Un vector $\vec{x}$ tiene coordenadas $(3\,,-2)$ en $\mathfrak{B}$. Obtén sus componentes.

22. Dados los vectores de la figura



a) Demuestra que $\mathfrak{B}=\{\vec{u}\,,\,\vec{v}\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$

b) Halla las coordenadas en $\mathfrak{B}$ de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

c) Dibuja el vector $\vec{x}$ cuyas coordenadas en $\mathfrak{B}$ son $(2\,,3)$.

23. Se consideran las bases del plano

$$\mathfrak{B}_1=\{(1\,,1)\ ,\ (1\,,2)\}\ \text{ y }\ \mathfrak{B}_2=\{(0\,,3)\ ,\ (2\,,2)\}$$

Si las coordenadas en $\mathfrak{B}_1$ de $\vec{x}$ son $(3\,,5)$: ¿cuáles son sus coordenadas en $\mathfrak{B}_2$?

24. Sea $\vec{u}=(2\,,-3)$ y $\vec{v}=(4\,,1)$.

a) Halla su producto escalar.

b) Calcula sus longitudes.

c) Obtén la medida del ángulo que determinan.

d) ¿Para qué valor de x es $\vec{v}=(x\,,1)$ ortogonal a $\vec{u}$?

25. Halla los dos vectores ortogonales a $\vec{a}=(3\,,2)$ y que tienen su mismo módulo.

26. Dado $\vec{a}=(4\,,3)$, halla un vector unitario con la misma dirección y sentido que él.

27. Calcula x para que:

a) $\vec{a}=(1\,,3)$ sea ortogonal a $\vec{b}=(x\,,2)$.

b) $\vec{c}=(x\,,-1)$ tenga el mismo módulo que el vector $\vec{d}=(3\,,0)$.

c) El producto escalar de $\vec{u}=(x\,,1)$ y $\vec{v}=(2\,,3)$ sea 9.

28. Encuentra un vector unitario $\vec{y}$ ortogonal a $\vec{x} = (3\,, -4)$.

29. Comprueba que los vectores

$$\vec{u}_1 = \left(\frac{1}{2}\,, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ y } \vec{u}_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,, -\frac{1}{2}\right)$$

son ortonormales (unitarios y ortogonales).

30. Obtén $\vec{a}\cdot\vec{b}$ si

a) $|\vec{a}| = 3\,,\ |\vec{b}| = 2\,,\ \left(\widehat{\vec{u}\,,\vec{v}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$

b) $|\vec{a}| = 1\,,\ |\vec{b}| = 5\,,\ \left(\widehat{\vec{u}\,,\vec{v}}\right) = \pi$

31. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ verificando

$$|\vec{u}| = 2\,,\ |\vec{v}| = 1\,,\ \vec{u}\cdot\vec{v} = -1$$

a) ¿Qué ángulo forman dichos vectores?

b) ¿Cuánto mide la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$?

c) Calcula $2\vec{u}\cdot(\vec{u}+3\vec{v})$.

d) Halla el módulo o longitud de $\vec{u}+\vec{v}$.

32. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ verificando

$$|\vec{u}| = 1\,,\ |\vec{v}| = \sqrt{2}\,,\ \vec{u}\cdot\vec{v} = 1$$

a) ¿Qué ángulo forman dichos vectores?

b) ¿Cuánto mide la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$?

c) Calcula $3\vec{v}\cdot(\vec{u}-2\vec{v})$.

d) Halla $|\vec{u}+\vec{v}|$

Cuestiones

1. ¿Qué es una traslación? Pon un ejemplo ilustrativo.

2. Consideremos un cuadrilátero de $ABCD$ en el que se tiene $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

a) Demuestra que entonces $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

b) ¿Qué tipo de cuadrilátero es?

3. Consideremos el segmento $\overline{AB}$ y sea M el punto medio. Observa que es

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$$

y deduce de ahí que es

$$M = \frac{A+B}{2}$$

4. Dibuja un paralelogramo $ABCD$.

a) Expresa la diagonal $\overrightarrow{AC}$ como combinación de los lados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$.

a) Expresa la diagonal $\overrightarrow{BD}$ como combinación de los lados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$.

5. Demuestra que las diagonales de un paralelogramo se cortan en sus puntos medios.

6. En un cuadrilátero calculamos los puntos medios de cada lado. Demuestra que determinan un paralelogramo.

7. En un triángulo unimos los puntos medios de dos lados. Demuestra que se obtiene una paralela al tercer lado. ¿Qué relación hay entre las longitudes?

8. ¿Qué significa el término “equipolencia”?

9. ¿Existe un vector que coincida con su opuesto?

10. ¿Qué es la regla del paralelogramo? Ejemplifícala.

11. La longitud de $\vec{u}$ es el triple de la de $\vec{v}$. ¿Son vectores dependientes o independientes?

12. Si se verifica $3\vec{x}+2\vec{y} = \vec{0}$, comprueba que los vectores $\vec{x}$ y $\vec{y}$ son dependientes.

13. Dos vectores de la misma dirección, ¿pueden ser una base en el plano?

14. En la base $\mathfrak{B} = \{\vec{u}\,,\vec{v}\}$ las coordenadas del vector $\vec{x}$ son $(3\,,2)$. ¿Cuáles serán las coordenadas de $\vec{x}$ en la base $\mathfrak{B}' = \{-\vec{v}\,,\vec{u}\}$?

15. Si el ángulo que determinan dos vectores es obtuso, ¿qué signo tiene su producto escalar?

16. ¿Cuánto es el producto escalar de dos vectores cuyas representaciones son perpendiculares?

17. Comprueba que $|\vec{u}|^2 = \vec{u}\cdot\vec{u}$

18. Si es $\vec{a}\cdot\vec{b} = -|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$, ¿qué puede afirmarse de las direcciones y de los sentidos de ambos vectores?

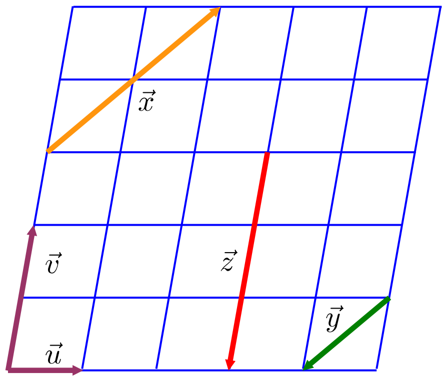
19. Comprueba que puede ser $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c}$ siendo $\vec{a}\neq\vec{0}$ y $\vec{b}\neq\vec{c}$.

20. Prueba que $(\vec{u}+\vec{v})\perp(\vec{u}-\vec{v})$ y es equivalente a $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

Deduce que las diagonales de un paralelogramo son perpendiculares sólo cuando se trata de un rombo.

Autoevaluación

1. Observa los vectores y responde:



a) Explica brevemente qué es la regla del paralelogramo y dibuja el vector $3\vec{u}+2\vec{v}$.

b) Expresa $\vec{x}\,,\vec{y}\,,\vec{z}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

c) Estudia la dependencia de estos pares:

$$\{\vec{x}\,,\vec{y}\}\ ;\ \{\vec{u}\,,\vec{z}\}\ ;\ \{\vec{v}\,,\vec{z}\}$$

d) ¿Por qué es $\{\vec{u}\,,\vec{v}\}$ una una base del plano?

e) Halla las coordenadas de $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ en dicha base.

2. Dados los puntos del plano

$$A=(1\,,-1)\ ,\ B=(2\,,1)\ ,\ C=(1\,,1)\ ,\ D=(3\,,4)$$

a) Demuestra que $\mathfrak{B}=\left\{\overrightarrow{AB}\,,\ \overrightarrow{AC}\right\}$ es una base del plano.

b) Expresa $\overrightarrow{AD}$ como c. l. de los vectores de la base.

3.

a) Dados $A=(1\,,-1)$, $B=(-1\,,2)$, $C=(2\,,1)$, halla un punto D de forma que $ABCD$ sea un paralelogramo.

b) Dibújalo y calcula $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$. Comprueba que es igual a $\overrightarrow{DB}$.

c) En un segmento $\overline{PQ}$ se conoce $P=(3\,,2)$ y el punto medio $M=(1\,,-2)$. ¿Cuál es el punto Q?

4. Si $\vec{x}=(\alpha\,,1)$, $\vec{y}=(-1\,,\beta)$, $\vec{z}=(-3\,,-4)$:

a) Halla α sabiendo que $\vec{x}\perp\vec{z}$.

b) Halla β sabiendo que $|\vec{y}|=2$.

c) Obtén un vector unitario paralelo a $\vec{z}$.

5. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ verificando

$$|\vec{u}|=\sqrt{2}\ ,\ |\vec{v}|=2\ ,\ \vec{u}\cdot\vec{v}=-2$$

a) ¿Qué ángulo forman dichos vectores?

b) ¿Cuánto mide la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$?

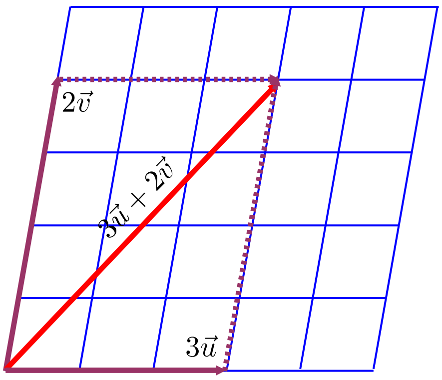
c) Calcula $3\vec{u}\cdot(2\vec{u}-\vec{v})$.

d) Halla el módulo o longitud de $\vec{u}-\vec{v}$.

Autoevaluación

1.

a) Empleamos la regla del paralelogramo:



b) Puede comprobarse que:

$\vec{x} = 2\vec{u} + \vec{v}$

$\vec{y} = -\vec{u} - \dfrac{1}{2}\vec{v}$

$\vec{z} = -\dfrac{3}{2}\vec{v}$

c) $\{\vec{x}\,,\vec{y}\}$ son dependientes, pues tienen la misma dirección. Observemos que es $\vec{x} = -2\vec{y}$.

$\{\vec{u}\,,\vec{z}\}$ son independientes, pues no tienen igual dirección.

$\{\vec{v}\,,\vec{z}\}$ son dependientes, pues tienen la misma dirección. Observemos que es $\vec{z} = -\dfrac{3}{2}\vec{v}$.

d) $\{\vec{u}\,,\vec{v}\}$ forman una base porque son un par de vectores independientes (ya que tienen distintas direcciones).

e) Las coordenadas se deducen del apartado (b):

$$\vec{x} = 2\vec{u} + \vec{v} \xrightarrow{coordenadas} (2\,,1)$$

$$\vec{y} = -\vec{u} - 0{,}5\vec{v} \xrightarrow{coordenadas} (-1\,,-0{,}5)$$

$$\vec{z} = -1{,}5\vec{v} \xrightarrow{coordenadas} (0\,,-1{,}5)$$

2.

a) Basta comprobar que son un par de vectores independientes:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = B - A = (1\,,2) \\ \overrightarrow{AC} = C - A = (0\,,2) \end{array}\right\} \to \frac{0}{1} \neq \frac{2}{2}$$

Como vemos, son independientes.

b) Pongamos $\overrightarrow{AD} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$:

$$(2,5) = s\cdot(1\,,2) + t\cdot(0\,,2) \to \left\{\begin{array}{l} s = 2 \\ t = 0.5 \end{array}\right.$$

Luego:

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + 0.5\overrightarrow{AC}$$

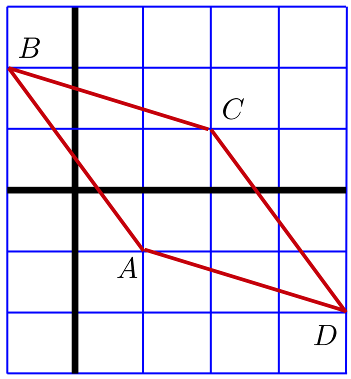
3.

a) $ABCD$ es un paralelogramo si $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$:

$$D - (2,1) = (1,-1) - (-1,2) \to D = (4,-2)$$

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = (-2,3) - (3,-1) = (-5,4)$

$\overrightarrow{DB} = (-1,2) - (4,-2) = (-5,4)$



c) Usamos la fórmula del punto medio y despejamos

Es: $\dfrac{P+Q}{2} = M \to Q = 2M - P$

Luego: $Q = 2\,(1\,,-2) - (3\,,2)$

De donde: $Q = (-1\,,-6)$.

4.

a) $\vec{x} \perp \vec{z} \to \vec{x}\cdot\vec{z} = 0 \to -3\alpha - 4 = 0 \to \alpha = -\dfrac{4}{3}$

b) $|\vec{y}| = 2 \to 1 + \beta^2 = 4 \to \beta = \pm\sqrt{3}$

c) Como

$$|\vec{z}| = \sqrt{9+16} = 5$$

los dos vectores unitarios y paralelos a $\vec{z}$ son

$$\frac{1}{5}\vec{z} = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) \text{ y } -\frac{1}{5}\vec{z} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

5.

a) Si llamamos α a dicho ángulo:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{-2}{\sqrt{2}\cdot 2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \to \alpha = \frac{3\pi}{4}$$

b) La proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ es:

$$p = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|} = \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

c) Es:

$$3\vec{u}\cdot(2\vec{u}-\vec{v}) = 6|\vec{u}|^2 - 3\,\vec{u}\cdot\vec{v}$$

Luego:

$$3\vec{u}\cdot(2\vec{u}-\vec{v}) = 6\cdot(\sqrt{2})^2 - 3(-2) = 18$$

d) Es

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$$

Así:

$$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - \vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2 = 10$$

Por ello:

$$|\vec{u}-\vec{v}| = 10$$