TEMA 5

NÚMEROS COMPLEJOS

Contenidos

1. El número complejo.
2. Operaciones.
3. Representación gráfica.
4. Módulo y argumento: forma polar.
5. Operaciones en forma polar.

Tiempo estimado

8 sesiones

Criterios de Evaluación

1. Comprende la necesidad de ampliación de los números a través de la unidad imaginaria.
2. Sabe resolver ecuaciones con soluciones complejas.
3. Conoce el vocabulario básico: conjugado, módulo, argumento,...
4. Sabe realizar operaciones aritméticas elementales tanto en forma binómica como polar.
5. Pasa una forma a otra, conociendo la conveniencia de cada una en su caso.
6. Conoce la interpretación geométrica de un complejo y, en particular, la interpretación gráfica de las raíces n-ésimas.

1.El número complejo.

La unidad imaginaria.

Los números complejos se introdujeron, muy lentamente, como una herramienta para resolver ecuaciones. Nosotros sabemos que hay ecuaciones muy sencillas que no pueden resolverse usando números reales, como por ejemplo:

$$x^2 + 1 = 0$$

Para poder hacerlo se introdujo un objeto que fue denominado por Euler la unidad imaginaria:

> Llamaremos unidad imaginaria a:
>
> $$i = \sqrt{-1}$$

Así, la unidad imaginaria tiene la siguiente propiedad fundamental:

$i^2 = -1$

Ahora la ecuación anterior sí tiene solución:

$$x^2 + 1 = 0 \;\rightarrow\; x^2 = -1 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{-1} \;\rightarrow\; x = \pm i$$

☞ <u>Ejemplo</u>: Resolvamos la ecuación $x^2 + 4 = 0$.

$$x^2 + 4 = 0 \;\rightarrow\; x^2 = -4 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{-4}$$

Haciendo ahora uso del siguiente truco:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{-1} = 2i$$

Tenemos por fin:

$$x^2 + 4 = 0 \;\rightarrow\; x = \pm 2i$$

Números complejos.

Ahora podemos *resolver* cualquier ecuación de segundo grado.

$$x^2 + 2x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$$

Esas expresiones en las que se mezclan números reales con la unidad imaginaria se denominan números complejos:

> Se llama número complejo a una expresión de la forma
>
> $$z = a + bi$$
>
> donde a y b son números reales e i es la unidad imaginaria.
>
> Al conjunto de los números complejos se le designa por $\mathbb{C}$.

En el número complejo

$z = a + b\,i$

- a es llamado parte real
- b es llamado parte imaginaria.

Observa que si:

- a = 0 es z imaginario puro
- b = 0 es z un número real

Tenemos así que

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Usando números complejos, toda ecuación polinómica tiene solución: esta propiedad es conocida con el nombre de Teorema Fundamental del Álgebra.

Esto se expresa diciendo que el cuerpo de los números complejos es algebraicamente cerrado.

2.Operaciones.

Suma, resta y producto.

Las operaciones se definen de tal manera que sean válidas las propiedades básicas que tienen las operaciones con números reales o con polinomios. Sólo hemos de recordar que $i^2 = -1$.

Dados $u = 3 - 2i$, $v = -5 + 4i$, calculemos $-2u + 3v$ y $u \cdot v$.

$-2u + 3v = -2(3 - 2i) + 3(-5 + 4i) = -6 + 4i - 15 + 12i = -21 + 16i$

$u \cdot v = (3 - 2i) \cdot (-5 + 4i) = -15 + 12i + 10i - 8i^2 = -7 + 22i$

Cociente.

Según hemos visto arriba, es: $(3 - 2i) \cdot (-5 + 4i) = -7 + 22i$

Deberá ser, entonces:

$$\frac{-7 + 22i}{3 - 2i} = -5 + 4i$$

Pero, ¿cómo desarrollar el primer miembro hasta obtener el segundo? ¿Cómo quitar el número complejo del denominador? Se usa un truco parecido al que se usa al racionalizar: multiplicar numerador y denominador por la expresión conjugada:

$$\frac{-7 + 22i}{3 - 2i} = \frac{(-7 + 22i) \cdot (3 + 2i)}{(3 - 2i) \cdot (3 + 2i)} = \frac{-21 - 14i + 66i + 44i^2}{9 - 4i^2} = $$
$$= \frac{-65 + 52i}{13} = -5 + 4i$$

Se llama conjugado del complejo

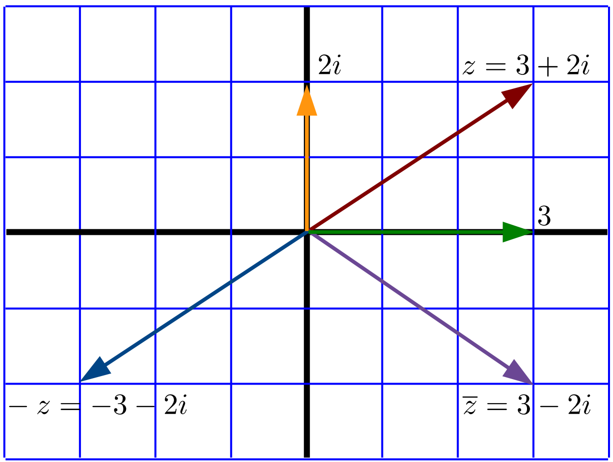
$z = a + bi$

al número

$\overline{z} = a - bi$

3.Representación gráfica.

Para representar un número complejo $z = a + bi$ dibujamos en unos ejes de coordenadas una flecha o vector que va desde el origen de coordenadas hasta el punto $P = (a\,,b)$ denominado afijo del número complejo. Algunos ejemplos:



A la izquierda tenemos el denominado plano complejo o de Argand.

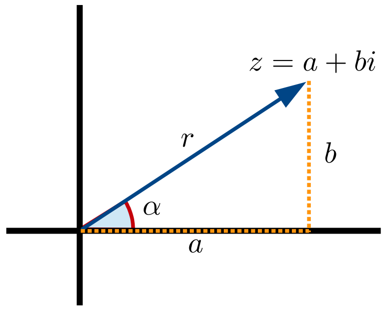
Podemos considerarlo como una modificación del plano cartesiano, donde el eje de abscisas se ha convertido en el denominado eje real y el eje de ordenadas en el llamado eje imaginario.

Algunas observaciones:

- Un número imaginario puro es un vector que no se sale del eje de ordenadas, ahora denominado eje imaginario.
- El opuesto de un número complejo se representa como un vector con igual longitud y dirección, pero con sentido contrario.
- El conjugado se representa como el simétrico respecto del eje real.

4.Módulo y argumento: forma polar.

Partiendo de la representación gráfica, veremos que hay varias maneras de expresar un número complejo. Observemos la siguiente figura, donde se ha representado $z = a + bi$. En ella son importantes:



La longitud r del número complejo, que es denominado módulo.

Y el ángulo α que forma con el eje real, que es denominado argumento.

Todo número complejo queda determinado por su módulo y su argumento, y hay una forma alternativa de expresarlo:

> Un complejo z queda determinado por su módulo r y su argumento α. A la expresión
> $$z = r_\alpha$$
> se la denomina forma polar.

> Usaremos siempre como argumento el ángulo positivo de la primera vuelta, denominado a veces argumento prinicipal.

☞ Ejemplo: Expresemos en forma polar $z = -5i$.

Si lo dibujamos observamos que su módulo es $r = 5$ y que su argumento es $\alpha = 270°$, así su expresión en forma polar será:

$$-5i = 5_{270°}$$

Pasar de la forma polar a la usual forma binómica requiere a veces de un poquito de trigonometría. Observa que en la figura anterior se cumple:

> A la expresión
> z = a + b i
> se la denomina forma binómica.

$$\frac{a}{r} = \cos\alpha \;\rightarrow\; a = r\cos\alpha$$

$$\frac{b}{r} = \operatorname{sen}\alpha \;\rightarrow\; b = r\operatorname{sen}\alpha$$

Y así nos queda

$$z = a + b\,i = r\cos\alpha + r\operatorname{sen}\alpha\, i$$

> Si sacamos factor común, a la expresión
> z = r (cos α + i sen α)
> se la denomina forma trigonométrica.

☞ Ejemplo: Expresemos en forma binómica $z = 2_{\frac{3\pi}{4}}$.

Observando que:

$$\frac{3\pi}{4} = 135° = 180° - 45°$$

$$\operatorname{sen}45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Resulta:

$$z = 2\cdot\cos 135° + 2\cdot\operatorname{sen}135°\, i = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

5.Operaciones en forma polar.

❑ Producto.

Multiplicar o dividir números complejos en forma polar es sumamente sencillo y elegante. Se deduce de las fórmulas trigonométricas de adición:

Si son $z = r_\alpha$ y $z' = r'_{\alpha'}$ dos complejos expresados en forma polar, entonces se cumple:

$$z \cdot z' = (r \cdot r')_{\alpha+\alpha'}$$

El producto de dos complejos es un complejo que tiene por módulo el producto de los módulos y por argumento la suma de los argumentos.

- Demostración: usaremos la forma trigonométrica

$$\begin{aligned} z \cdot z' &= r \cdot (\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) \cdot r' \cdot (\cos\alpha' + i \operatorname{sen}\alpha') \\ &= (r \cdot r') \cdot (\cos\alpha\cos\alpha' - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha' + i\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha' + i\operatorname{sen}\alpha'\cos\alpha) \\ &= (r \cdot r')\,(\cos(\alpha+\alpha') + i\operatorname{sen}(\alpha+\alpha')) = (r \cdot r')_{\alpha+\alpha'} \end{aligned}$$

❑ Cociente.

Multiplicar o dividir números complejos en forma polar es sumamente sencillo y elegante. Se deduce de las fórmulas trigonométricas de adición:

Si son $z = r_\alpha$ y $z' = r'_{\alpha'}$ dos complejos expresados en forma polar, entonces se cumple:

$$z : z' = (r : r')_{\alpha-\alpha'}$$

El cociente de dos complejos es un complejo que tiene por módulo el cociente de los módulos y por argumento la diferencia de los argumentos.

- Demostración: se deduce de la fórmula del producto.

❑ Potencia entera.

Elevar un número complejo a un exponente natural es también sencillo en forma polar. Deducimos del producto:

Si $z = r_\alpha$ es un complejo expresado en forma polar y n es un número entero:

Una potencia entera tiene módulo la potencia de su módulo y tiene de argumento el producto del exponente por su argumento:

$$z^n = (r^n)_{n \cdot \alpha}$$

La potencia de un complejo es tiene de módulo la potencia del módulo y por argumento el producto del exponente por el argumento de la base.

- Demostración: Basta aplicar n veces la fórmula del producto:

$$z^n = z \cdot \ldots \cdot z = (r_\alpha) \cdot \ldots \cdot (r_\alpha) = (r \cdot \ldots \cdot r)_{\alpha+\ldots+\alpha} = (r^n)_{n\cdot\alpha}$$

☞ Ejemplo: Sean $u = 8_{60^\circ}$, $v = 2_{210^\circ}$. Calculemos $u \cdot v$, $u : v$, v^4.

$$u \cdot v = (8 \cdot 2)_{60^\circ+210^\circ} = 16_{270^\circ}$$

$$\frac{u}{v} = (8 : 2)_{60^\circ-210^\circ} = 4_{(-150^\circ)} = 4_{210^\circ}$$

$$v^4 = \left(2^4\right)_{4\cdot 210^\circ} = 16_{840^\circ} = 16_{120^\circ}$$

❑ Radicación.

De la fórmula de la potencia deducimos la siguiente

El número complejo r_α tiene n raíces n-ésimas:

Sus módulos son todos iguales a: $\sqrt[n]{r}$

Sus argumentos vienen dados por : $\dfrac{\alpha + k\cdot 2\pi}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$

Para $n \geq 3$ sus afijos son los vértices de un n-ágono regular centrado en el origen.

Para n > 2 sus afijos son los vértices de un n-ágono regular centrado en el origen.

- Demostración: Si R_β es una raíz entonces, de la fórmula de la potencia:

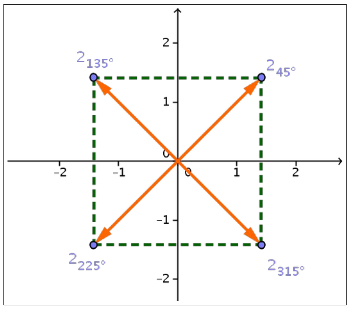
$$r_\alpha = (R_\beta)^n \to r_\alpha = (R^n)_{n\cdot\beta} \to \begin{cases} R^n = r \to R = \sqrt[n]{r} \\ n\beta = \alpha + 2k\pi \to \beta = \frac{\alpha+2k\pi}{n} \end{cases}$$

Ahora vamos dando valores: $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

A partir de $k = n$ volvemos a obtener los mismos ángulos.

☞ Ejemplo: Resolvamos en el campo complejo $x^4 + 16 = 0$.

$$x^4 = -16 = 16_{180°} \to \begin{cases} R = \sqrt[4]{16} = 2 \\ \beta = \dfrac{180° + k\cdot 360°}{4} = 45°, 135°, 225°, 315° \end{cases}$$



Si queremos pasar a forma binómica:

$$x = \sqrt{2} + i\sqrt{2}\ ,\ -\sqrt{2} + i\sqrt{2}\ ,\ -\sqrt{2} - i\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

❑ Exponenciación.

Aunque fuera del temario, no podíamos dejar de mostrar la definición, aunque sólo sea para mostrar la bella fórmula de Euler.

Se define

$$\mathrm{e}^{x+iy} = \mathrm{e}^x \cdot (\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

Calculemos, como ejemplo:

$$\mathrm{e}^{i\pi} = \cos\pi + i\operatorname{sen}\pi = -1$$

Pasando al primer miembro:

$$\mathrm{e}^{i\pi} + 1 = 0$$

Ahí tenemos la famosa y peculiar fórmula de Euler, en la que aparecen los cinco números fundamentales de las matemáticas: 0 , 1 , e , π , i.

Ejercicios

1. Resuelve las siguientes ecuaciones en el campo complejo:

a) $x^2 - 2x + 2 = 0$

b) $x^3 - 5x^2 + 7x + 13 = 0$

c) $x^3 + 1 = 0$

d) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

e) $x^4 - 1 = 0$

2. Consideremos los números complejos

$$u = -2 + 4i \ , \ v = 1 + i$$

Calcula:

a) $2u - 5v$

b) $-u \cdot \overline{v}$

c) $\dfrac{u}{v}$

3. Calcula las sucesivas potencias de la unidad imaginaria:

$$i \ , \ i^2 \ , \ i^3 \ , \ i^4$$

Deduce el valor de i^{42}, i^{31} e i^{1241}.

4. Encuentra el polinomio cuadrático cuyas raíces son $4 + i$ y $4 - i$.

5. Halla x sabiendo que el producto

$$(x + i) \cdot (4 + i)$$

es real.

6. Halla m y n de manera que

$$(m + 2i)(4 - ni) = 18 - i$$

7. Halla a y b en el cociente

$$\frac{a + 19i}{-5 + bi} = 3 - 2i$$

8. Halla k para que el módulo de $-3 + ki$ sea 5:

$$|-3 + ki| = 5$$

9. Encuentra un número complejo que sumado con su recíproco dé la unidad real.

10. El afijo de un número complejo es $P = \left(-2 \, , 2\sqrt{3}\right)$. Expresa ese complejo en forma polar.

11. Pasa a forma polar:

a) -8 b) $6i$

c) $4 - 4i$ d) $-3i$

e) $\sqrt{3} + i$ f) $-5 - 5\sqrt{3}i$

12. Pasa a forma binómica:

a) 5_0 b) 2_π

c) $6_{\frac{2\pi}{3}}$ d) $4_{\frac{3\pi}{2}}$

e) $\sqrt{2}_{\frac{5\pi}{4}}$ f) $6_{\frac{\pi}{2}}$

13. Consideremos los números complejos

$$u = 1_{90^\circ} \ , \ v = 2_{135^\circ}$$

a) Calcula su producto $p = u \cdot v$ y su cociente $c = \dfrac{u}{v}$.

b) Obtén v^5

c) Halla las raíces cuartas de u.

14. Calcula, pasando a forma polar:

a) $(-1 - i\sqrt{3})^6 \cdot (\sqrt{3} - i)$

b) $\dfrac{16}{(1 - i)^5}$

c) $\sqrt[3]{-8i}$

15. Halla dos complejos sabiendo que su producto es $2i$ y que el primero entre el cubo del segundo es 2.

16. Pasando a forma polar, calcula y representa gráficamente:

a) $\sqrt[3]{-27}$

b) $\sqrt[5]{-\dfrac{32}{i}}$

17. Consideremos el triángulo cuyos vértices son los afijos de las raíces cúbicas de -64.

a) Obtén las coordenadas de los vértices.

b) Halla su área (aplica el teorema del coseno y ten en cuenta que es equilátero).

18. Resuelve las siguientes ecuaciones en el campo complejo usando el cálculo de raíces complejas:

a) $x^3 + 8 = 0$

b) $x^5 - 1 = 0$

Cuestiones

1. La suma de dos números imaginarios puros, ¿es siempre otro número imaginario puro?

2. ¿Puede el producto de dos números imaginarios puros ser un número real?

3. Consideremos la ecuación con coeficientes reales

$$ax^2 + bx + c = 0 \ , \ a \neq 0$$

a) ¿Puede tener una solución real y otra imaginaria?

b) Si sabemos que una solución es $4 + 5i$, ¿cuál es la otra solución?

4. Comprueba que la ecuación de segundo grado cuyas soluciones son $a \pm bi$ es

$$(x-a)^2 + b^2 = 0$$

5. ¿Cómo son dos números complejos cuya suma es real?

6. Escribe dos números complejos cuyo producto es un número real.

7. Dado el número complejo

$$z = a + bi$$

Escribe:

a) Su conjugado.

b) El conjugado del conjugado.

c) Su opuesto.

d) El conjugado del opuesto.

e) El opuesto del conjugado.

8. Demuestra que es:

a) $\overline{u+v} = \overline{u} + \overline{v}$

b) $\overline{u \cdot v} = \overline{u} \cdot \overline{v}$

c) $\overline{\left(\dfrac{u}{v}\right)} = \dfrac{\overline{u}}{\overline{v}}$

9. Si designamos por $|z|$ el módulo del complejo z, demuestra que

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$$

10. Demuestra que

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$$

11. ¿Cómo es el argumento de un numero real no nulo?

12. Consideremos el número complejo

$$z = r_\alpha$$

Escribe en forma polar:

a) Su conjugado.

b) Su opuesto.

Autoevaluación

1. Resuelve la siguiente ecuación en el campo complejo:

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$$

2. Consideremos los números complejos

$$u = -5 + i \ , \ v = 3 + 2i$$

Dibújalos y calcula:

a) $-3u + 4v$

b) $\overline{u} \cdot v$

c) $\dfrac{u}{v}$

d) $|v|$

3.

a) El afijo de un número complejo es $P = (-8\,,8)$. Expresa ese complejo en forma polar.

b) Pasa a forma binómica $10_{\frac{5\pi}{6}}$.

4. Calcula, pasando a forma polar:

a) $(\sqrt{3} - i)^8 \cdot (1 - i\sqrt{3})$

b) $\dfrac{8}{(-1-i)^8}$

5. Calcula $\sqrt[5]{32}$ y dibuja las soluciones. ¿Qué figura determinan sus afijos?

Autoevaluación

1. Consideramos el polinomio asociado:

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$$

Es fácil comprobar que $x = 1$ es solución:

$$p(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 2 = 0$$

Para encontrar las otras soluciones, intentamos factorizar, realizando la división:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 4 & -2 \\ 1 & \downarrow & 1 & -2 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}$$

Así:

$$p(x) = (x-1) \cdot \left(x^2 - x + 2\right)$$

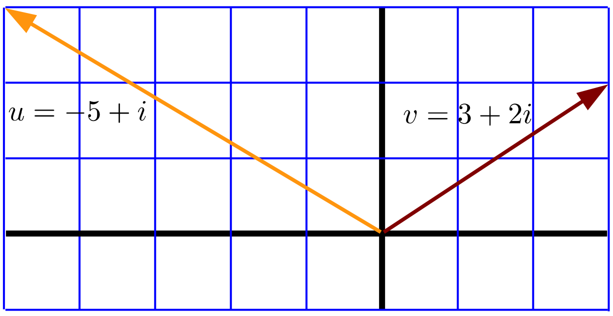
Ahora buscamos los ceros del factor de segundo grado mediante la fórmula:

$$x^2 - x + 2 = 0 \to x = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

Concluimos que la ecuación tiene una solución real y dos imaginarias (conjugadas):

$$x = 1\,, x = 1 \pm i$$

2. Dibujemos primero los números complejos



Ahora calculemos:

a) $-3u + 4v = 15 - 3i + 12 + 8i = 27 + 5i$

b) $\overline{u} \cdot v = -15 - 10i - 3i + 2 = -13 - 13i$

c) Para dividir multiplicamos numerador y denominador por el conjugado:

$$\frac{u}{v} = \frac{(-5+i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{-13+13i}{13} = -1 + i$$

d) $|v| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

3.

a) Observemos que el punto está en el segundo cuadrante. Hallemos el módulo y el argumento:

$$r = \sqrt{(-8)^2 + 8^2} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$$

$$\tan\alpha = \frac{8}{-8} = -1 \to \alpha = \pi - \arctan 1 = \frac{3\pi}{4}$$

Resulta $8\sqrt{2}_{\frac{3\pi}{4}}$

b) Usamos la forma trigonométrica:

$$10_{\frac{5\pi}{6}} = 10 \cdot (\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ) =$$

$$= 10 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -5\sqrt{3} + 5i$$

4.

a) Llamemos u al resultado:

$$u = \left(2_{330^\circ}\right)^8 \cdot 2_{300^\circ} = 2^8_{2640^\circ} \cdot 2_{300^\circ} = 2^9_{2940^\circ}$$

$$= 512_{60^\circ} = 512 \cdot \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 256 + 256\sqrt{3}i$$

b) Llamemos v al resultado:

$$v = \frac{8_{0^\circ}}{\left(\sqrt{2}_{225^\circ}\right)^8} = \frac{8_{0^\circ}}{16_{1800^\circ}} = 0{,}5_{-1800^\circ} =$$

$$= 0{,}5_{0^\circ} = 0{,}5$$

5. $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{32_{0^\circ}} = R_\beta$:

$$R = \sqrt[5]{32} = 2$$

$$\beta = \frac{0^\circ + k \cdot 360^\circ}{5} = 0^\circ, 72^\circ, 144^\circ, 215^\circ, 315^\circ$$

Así, las raíces quintas de 32 son:

$$2_{0^\circ}, 2_{72^\circ}, 2_{144^\circ}, 2_{215^\circ}, 2_{315^\circ}$$

Sus afijos son los vértices de un pentágono regular centrado en el origen e inscrito en una circunferencia de radio $R = 2$.