TEMA 4

Resolución de Triángulos

Contenidos

1. Aplicaciones de la trigonometría.
2. Teorema de los senos.
3. Teorema de los cosenos.
4. Resolución de triángulos.

Tiempo estimado

10 sesiones

Criterios de Evaluación

1. Conoce los resultados elementales que permiten la resolución de triángulos rectángulos.
2. Conoce y sabe aplicar el teorema de los senos y el de los cosenos.
3. Aplica la trigonometría en problemas que requieran la resolución de triángulos de cualquier tipo.

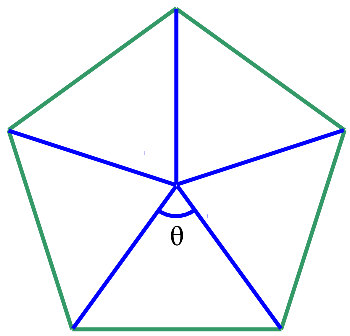
1.Aplicaciones de la Trigonometría.

❑ Geométricas.

Son muchas y variadas, al relacionar ángulos con longitudes. Veamos un cómo puede usarse para calcular áreas de polígonos regulares

☞ Ejemplo: calculemos el área de un pentágono regular de lado 10 cm.

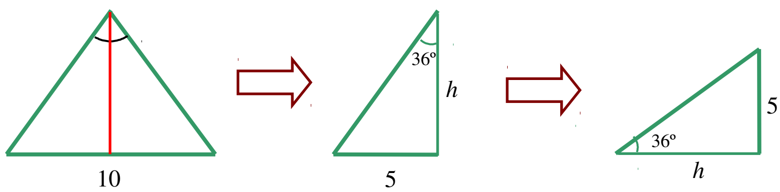
Primero dibujamos el pentágono ***P*** y lo triangulamos desde el centro. Es fácil obtener la medida del ángulo central : $\theta = 360º : 5$. Así, es $\theta = 72º$.



A continuación nos concentramos en uno de los triángulos ***T*** resultantes. Tenemos

- ✔ Es un triángulo isósceles.
- ✔ Su área multiplicada por cinco es el área del pentágono.

Dibujemos ese triángulo isósceles y tracemos su altura:



En el triángulo rectángulo:

$$\cot 36º = \frac{h}{5} \rightarrow h = 5 \cot 36º$$

Para el triángulo isósceles es:

$$Área_T = \frac{10 \cdot 5 \cot 36º}{2} = 25 \cot 36º$$

Luego:

$$Área_P = 5 \cdot 25 \cot 36º = 125 \cot 36º \, cm^2 \approx 172{,}05 \, cm^2$$

El procedimiento que utilizamos aquí para obtener el área del pentágono regular es válido para cualquier otro.

Es un método para enfrentarse a problemas con polígonos y otras figuras: dividir el problema en partes más simples, buscando triángulos, círculos, cuadrados, ... en los que poder aplicar fórmulas y propiedades.

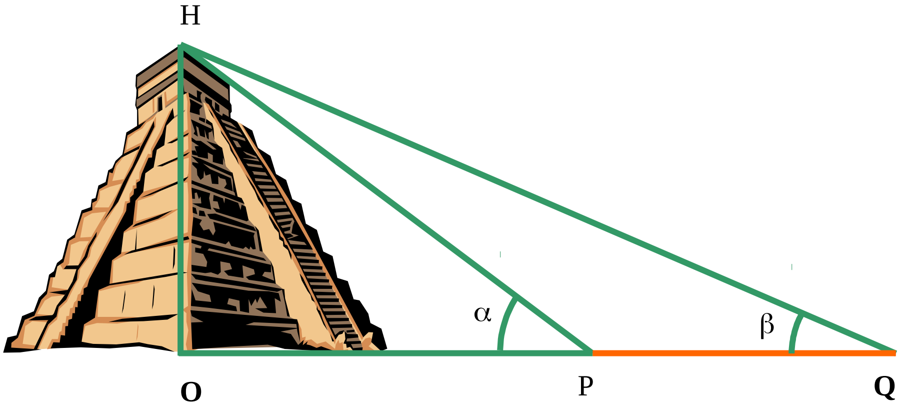
❑ Topográficas.

La Trigonometría es una de las partes de las Matemáticas que más aplicación tiene en todos aquellas ciencias relacionadas con la construcción de edificios, caminos, puentes, etc. , debido a que permite calcular longitudes sin necesidad de medirlas directamente.

Busca en el diccionario el significado de los siguientes términos: geodesia, topografía, teodolito y trigonometría.

Vamos aquí a ver un modelo: calcular la altura de un objeto cuyo pie es inaccesible, siendo horizontal el terreno que ocupa: Un topógrafo ha de calcular la altura de la pirámide mostrada en la figura. Para ello se situa en un punto **P** exterior y con un teodolito o grafómetro mide el ángulo α, obteniendo $\alpha = 71º5'$. En la dirección OP se aleja 50 m. hasta un punto **Q** y vuelve a medir el ángulo, obteniendo $\beta = 55º40'$.

Aquí una representación:



El resto lo haremos nosotros con la trigonometría. Llamemos

$$h=\overline{OH} \quad \text{y} \quad x=\overline{OP}$$

En ΔHOP : $\quad \dfrac{h}{x}=\tan 71^\circ 5' \;\rightarrow\; h=x\cdot\tan 71^\circ 5'$

En ΔHOQ : $\quad \dfrac{h}{x+50}=\tan 55^\circ 40' \;\rightarrow\; h=(x+50)\cdot\tan 55^\circ 40'$

Resolviendo el sistema $\quad \begin{cases} h=x\cdot\tan 71^\circ 5' \\ h=(x+50)\cdot\tan 55^\circ 40' \end{cases}$

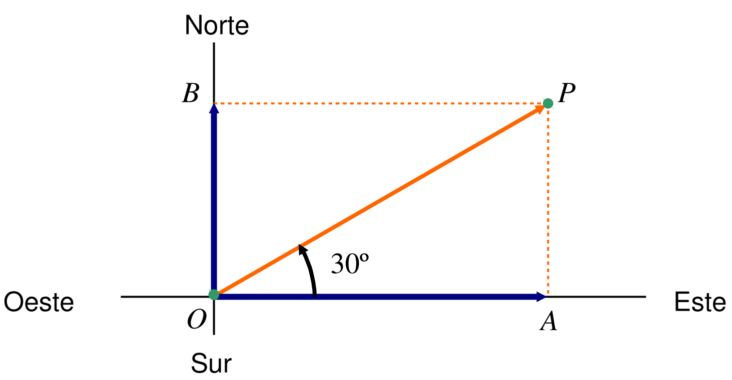
obtenemos la solución:

$$h=\frac{50\cdot\tan 71^\circ 5'\cdot\tan 55^\circ 40}{\tan 71^\circ 5'-\tan 55^\circ 40'} \approx 140 \text{ m.}$$

❑ Físicas.

La Trigonometría es una de las partes de las Matemáticas que es usada continuamente en la Física. Veamos un ejemplo simple.

Un móvil recorre en línea recta una distancia de 50 km. hacia el noreste, de tal forma que su trayectoria se ha desviado 30º de la dirección oeste - este. ¿Cuántos kilómetros ha avanzado en dirección norte? ¿Y en dirección este?



Vamos a suponer que el móvil estaba inicialmente en el punto ***O*** y que se ha trasladado hasta el punto ***P***. Así, la distancia $\overline{OP}$ es de 50 km. Queremos calcular las distancias $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$.

En ΔOAP :

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{OP}}=\text{sen}\,30° \rightarrow \overline{AP}=\overline{OP}\cdot\text{sen}\,30°=\frac{50\cdot 1}{2}=25 \rightarrow \overline{OB}=25$$

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OP}}=\cos 30° \rightarrow \overline{OA}=\overline{OP}\cdot\cos 30°=50\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=25\sqrt{3}$$

Luego el móvil ha recorrido $25\cdot\sqrt{3}\approx 43{,}3$ km. hacia el este y 25 km. en dirección norte.

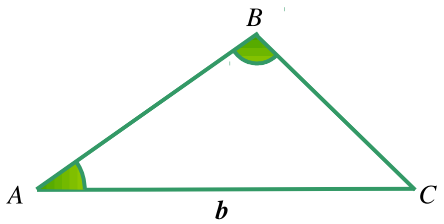
2. Teorema de los senos.

Hasta ahora, para aplicar la Trigonometría en un triángulo que no fuese rectángulo nos hemos visto obligados a trazar una de sus alturas. De esta manera hemos dividido el original en dos triángulos rectángulos, en los que hemos hecho uso de las razones de los ángulos. Esta es una buena estrategia que nos seguirá siendo siendo útil, sobre todo si lo que queremos es calcular alturas o áreas.

Sin embargo, existe una sencilla relación entre los lados y los ángulos de un triángulo cualquiera que en muchos casos es de utilidad. Es el llamado teorema de los senos:

> En un triángulo ΔABC sus lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos:
>
> $$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}}=\frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}}=\frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}}$$

☞ <u>Ejemplo</u>: Calculemos los elementos restantes de un triángulo con $\hat{A}=35°$, $\hat{B}=100°$, $b=5$ cm :



Ante todo, obtengamos el tercer ángulo:

$$\hat{C}=180°-(\hat{A}+\hat{B})=45°$$

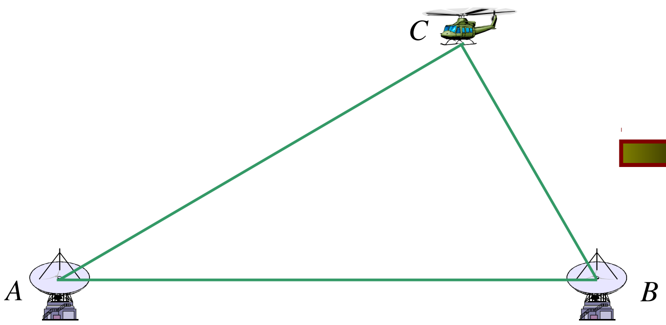
Obtenemos las medidas de los lados *a* y *c* por el Teorema de los senos:

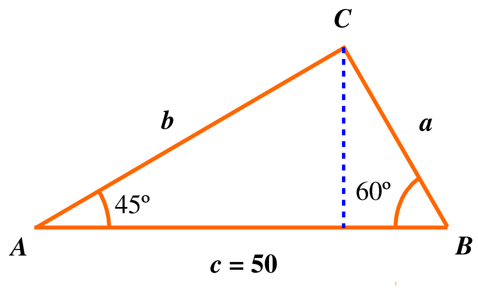
$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}}=\frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} \rightarrow a=\frac{b\cdot\text{sen}\,\hat{A}}{\text{sen}\,\hat{B}}=\frac{5\cdot\text{sen}\,35°}{\text{sen}\,100°} \rightarrow a\approx 2{,}91 \text{ cm.}$$

$$\frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}}=\frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} \rightarrow c=\frac{b\cdot\text{sen}\,\hat{C}}{\text{sen}\,\hat{B}}=\frac{5\cdot\text{sen}\,45°}{\text{sen}\,100°} \rightarrow c\approx 3{,}59 \text{ cm.}$$

☞ Ejemplo: entre dos observatorios situados al nivel del mar, y distantes entre sí 50 km., vuela un objeto. Desde uno de los observatorios se observa bajo un ángulo de 45º, y desde el otro bajo un ángulo de 60º.

Obtendermos la distancia del objeto a cada uno de los observatorios y la altura a la que se encuentra. Observemos la figura:





Ante todo:

$$\hat{C}=180º-(\hat{A}+\hat{B})=75º$$

Queremos calcular a, b y h_C. Por el Teorema de los senos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}}=\frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \rightarrow a=\frac{c\cdot\operatorname{sen}\hat{A}}{\operatorname{sen}\hat{C}}=\frac{50\cdot\operatorname{sen}45º}{\operatorname{sen}75º} \rightarrow a\approx 36{,}60 \text{ km.}$$

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}}=\frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \rightarrow b=\frac{c\cdot\operatorname{sen}\hat{B}}{\operatorname{sen}\hat{C}}=\frac{50\cdot\operatorname{sen}60^o}{\operatorname{sen}75^o} \rightarrow b\approx 44{,}83 \text{ km.}$$

Tenemos así que el helicóptero se encuentra a unos 36,60 km. del observatorio B y a unos 44,83 km. de A.

En cuanto a la altura a la que se encuentra:

$$\frac{h_C}{b}=\operatorname{sen}\hat{A} \rightarrow h_C=b\cdot\operatorname{sen}\hat{A}=\frac{50\cdot\operatorname{sen}45º\cdot\operatorname{sen}60º}{\operatorname{sen}75º} \rightarrow h_C\approx 31{,}70 \text{ km.}$$

Tenemos así que se encuentra a una altura de unos 31,70 km.

3.Teorema de los cosenos.

En los triángulos rectángulos los lados están relacionados por una relación, que conocemos todos como Teorema de Pitágoras.

Este resultado es un caso particular del llamado teorema de los cosenos:

En un triángulo ΔABC el cuadrado de cada lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble del producto de estos dos lados por el coseno del ángulo comprendido:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\hat{B}$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\hat{C}$$

☞ Ejemplo: Resolvamos el triángulo en el que conocemos

$$\hat{A}=35^\circ \quad , \quad b=5 \text{ cm} \quad \text{y} \quad c=3{,}59 \text{ cm}$$

Tenemos que hallar en primer lugar el lado a. Forzosamente hemos de usar el Teorema de los Cosenos:

$$a^2=b^2+c^2-2\,b\,c\cos\hat{A} \;\rightarrow\; a\approx 2{,}91 \text{ cm}$$

Calculamos el ángulo $\hat{B}$ por el Teorema de los Cosenos, despejando de la igualdad correspondiente:

$$\cos\hat{B}=\frac{c^2+a^2-b^2}{2\,a\,c} \;\rightarrow\; \cos\hat{B}=-0{,}17439623\ldots \;\rightarrow\; \hat{B}\approx 100^\circ$$

El ángulo restante:

$$\hat{C}=180^\circ-(\hat{A}+\hat{B})\approx 45^\circ$$

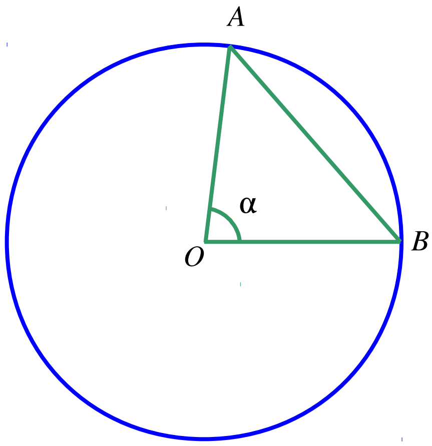
Importante: hemos optado por calcular el ángulo $\hat{B}$ por el Teorema de los Cosenos: obtenemos que es obtuso.

Si hubiésemos optado por usar el Teorema de los Senos, hubiéramos tenido que hallar primero el ángulo enfrentado al menor de los lados conocidos : forzosamente ha de ser agudo. Y es que como el ángulo conocido es agudo, desconocemos si el ángulo opuesto al mayor lado conocido es obtuso o agudo.

Esta duda no aparece si el ángulo conocido es obtuso: evidentemente los otros dos deben ser agudos.

☞ Ejemplo: En una circunferencia de radio 4 cm. trazamos una cuerda de 6 cm. de longitud. Vamos a obtener el ángulo central que abarca.

En primer lugar hagamos el dibujo correspondiente: la cuerda es el segmento $\overline{AB}$ y el ángulo central que abarca es el ángulo α .



Vamos a calcular la medida de α , sabiendo que

$$\overline{OA}=\overline{OB}=4 \quad \text{y} \quad \overline{AB}=6$$

Por el Teorema de los cosenos:

$$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\cdot\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\cos\alpha \;\rightarrow\; 36=16+16-2\cdot 4\cdot 4\cdot\cos\alpha$$

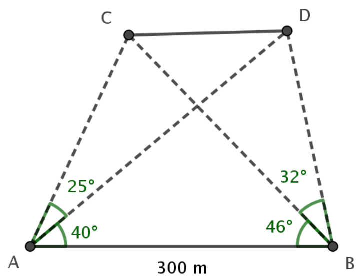
Despejando el coseno:

$$\cos\alpha=-\frac{1}{8} \;\rightarrow\; \alpha=\arccos\left(-\frac{1}{8}\right)$$

Con la calculadora:

$$\alpha\approx 97^\circ 10'51''$$

☞ Ejemplo: Para calcular la distancia que separa dos puntos inaccesibles, C y D, tomamos las medidas que vemos en la figura desde puntos A y B.



En $\triangle ABC$ calculamos $\overline{AC}$ (por el Teorema de los senos)

$$A\hat{B}C = 180^\circ - (25^\circ + 40^\circ) - 46^\circ = 69^\circ$$

$$\frac{\overline{AC}}{\operatorname{sen} 46^\circ} = \frac{300}{\operatorname{sen} 69^\circ} \rightarrow \overline{AC} = \frac{300 \operatorname{sen} 46^\circ}{\operatorname{sen} 69^\circ} \approx 231.16 \text{ m}$$

En $\triangle ABD$ calculamos $\overline{AD}$ (por el Teorema de los senos)

$$A\hat{D}B = 180^\circ - (46^\circ + 32^\circ) - 40^\circ = 62^\circ$$

$$\frac{\overline{AD}}{\operatorname{sen} 78^\circ} = \frac{300}{\operatorname{sen} 62^\circ} \rightarrow \overline{AD} = \frac{300 \operatorname{sen} 78^\circ}{\operatorname{sen} 62^\circ} \approx 332.35 \text{ m}$$

En $\triangle ACD$ calculamos por fin $\overline{CD}$ (por el Teorema de los cosenos)

$$\overline{CD}^2 = 231.16^2 + 332.35^2 - 2 \cdot 231.16 \cdot 332.35 \cdot \cos 25^\circ$$

$$\overline{CD} \approx 157 \text{ m}$$

4.Resolución de triángulos.

Se trata de conocer los tres ángulos y los tres lados conocidos tres de ellos.

Resuelve como ejercicios cada uno de los posibles casos.

<u>Caso 1</u>: conocemos tres lados.

☞ 1A. Alguno no es menor que la suma de los otros dos: no hay solución.

Por ejemplo: $a = 2 \, , b = 4 \, , c = 7$.

☞ 1B. Cada uno de ellos es menor que la suma de los otros dos: 1 solución.

Por ejemplo: $a = 2 \, , b = 4 \, , c = 5$.

Recordemos que en un triángulo cada lado es menor que la suma de los otros dos.

<u>Caso 2</u>: conocemos un lado y dos ángulos.

☞ 2A. La suma de los ángulos supera 180º: no hay solución.

Por ejemplo: $a = 2 \, , \hat{B} = 80° \, , \hat{C} = 110°$.

☞ 2B. La suma de los ángulos no supera 180º: única solución.

Por ejemplo: $a = 2 \, , \hat{B} = 40° \, , \hat{C} = 60°$.

En todo triángulo la suma de los ángulos interiores es 180º.

<u>Caso 3</u>: conocemos dos lados y el ángulo comprendido.

☞ 3A. El ángulo no es inferior 180º: sin solución.

Por ejemplo: $a = 2 \, , b = 4 \, , \hat{C} = 190°$.

☞ 3B. El ángulo es inferior a 180º: única solución.

Por ejemplo: $a = 2 \, , b = 4 \, , \hat{C} = 60°$.

<u>Caso 4</u>: conocemos dos lados y el ángulo no comprendido.

☞ 4A. El lado frente el ángulo conocido es el mayor: única solución.

Por ejemplo: $a = 5 \, , b = 4 \, , \hat{A} = 110°$.

Siempre y cuando sea el conocido inferior a 180º.

☞ 4B. El lado frente el ángulo conocido no es el mayor $[a \, , b \, , \hat{A}]$.

1. $\dfrac{b \operatorname{sen} \hat{A}}{a} > 1$: sin solución.

   Por ejemplo: $a = 2 \, , b = 4 \, , \hat{A} = 40°$.

2. $\dfrac{b \operatorname{sen} \hat{A}}{a} = 1 \to \hat{B} = 90°$: hasta una solución.

   Por ejemplo: $a = 2 \, , b = 4 \, , \hat{A} = 30°$ (única pues $\hat{A} < 90°$).

   Por ejemplo: $a = 2 \, , b = 2 \, , \hat{A} = 90°$ (sin solución pues $\hat{A} \geq 90°$).

3. $\dfrac{b \operatorname{sen} \hat{A}}{a} < 1$: hasta dos soluciones.

   Por ejemplo: $a = 2 \, , b = 4 \, , \hat{A} = 25°$ (2 soluciones: $\hat{B}$ agudo u obtuso).

   Por ejemplo: $a = 2 \, , b = 4 \, , \hat{A} = 30°$ (1 solución).

   Por ejemplo: $a = 2 \, , b = 3 \, , \hat{A} = 150°$ (sin solución).

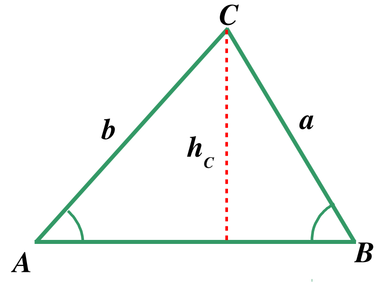
5.Ampliación: demostraciones.

❑ Teorema de los senos.

Veamos que para $\triangle ABC$ tenemos

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

☞ Demostración: tomemos un triángulo como el que figura en el margen y tracemos la altura correspondiente al vértice C.



Tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{h_C}{a}=\operatorname{sen}\hat{B} \rightarrow h_C=a\operatorname{sen}\hat{B} \\ \dfrac{h_C}{b}=\operatorname{sen}\hat{A} \rightarrow h_C=b\operatorname{sen}\hat{A} \end{array}\right\} \overset{\text{igualando}}{\rightarrow} a\operatorname{sen}\hat{B}=b\operatorname{sen}\hat{A} \rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}}=\frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}}$$

Análogamente, trazando la altura correspondiente al vértice A obtenemos:

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}}=\frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

Reuniendo ambas igualdades obtenemos la triple igualdad.

El razonamiento anterior, en realidad, sólo demuestra el teorema de los senos cuando es un triángulo acutángulo. Sería preciso retocarlo para triángulos obtusángulos.

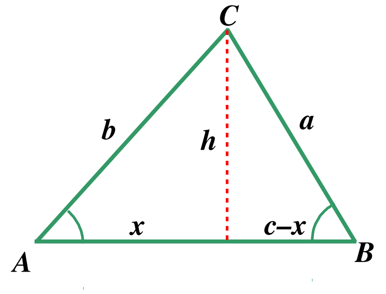
❑ Teorema de los cosenos.

Veamos que para $\triangle ABC$ tenemos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ab\cos\hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$$

☞ Demostración: Basta probar la primera de las igualdades.

Para ello, tomemos un triángulo como el que figura en el margen y tracemos la altura correspondiente al vértice C. Aplicando el Teorema de Pitágoras a los dos triángulos rectángulos:



$$h^2=b^2-x^2 \quad \text{y} \quad h^2=a^2+(c-x)^2$$

Igualamos y despejamos a^2 :

$$a^2-(c-x)^2=b^2-x^2 \rightarrow a^2=b^2+c^2-2cx \ (*)$$

Ahora bien:

$$\frac{x}{b}=\cos\hat{A} \rightarrow x=b\cdot\cos\hat{A}$$

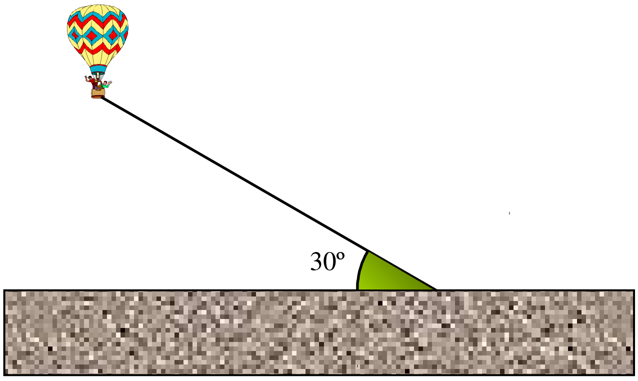
Sustituyendo el valor de x en (*), obtenemos:

$$a^2=b^2+c^2-2cb\cos\hat{A}=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$$

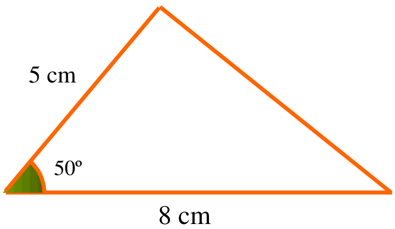
El razonamiento anterior, en realidad, sólo demuestra el teorema de los cosenos cuando Â es agudo. Sería preciso retocarlo en caso de que no lo fuese.

Ejercicios

1. El globo de la figura está unido al suelo por un hilo tirante que mide 100 m. Obtén la altura a la que se halla.



2. Obtén el área del triángulo siguiente:



3. Resuelve los triángulos en los que conocemos dos lados, dos ángulos o tres lados.

a) $\hat{A} = 44^\circ$, $b = 8 \text{ cm}$, $c = 7 \text{ cm}$

b) $a = 10 \text{ cm}$, $b = 8 \text{ cm}$, $c = 7 \text{ cm}$

c) $a = 10 \text{ cm}$, $b = 18 \text{ cm}$, $c = 7 \text{ cm}$

d) $\hat{A} = 48^\circ$, $\hat{B} = 64^\circ$, $c = 10 \text{ cm}$

4. Resuelve los triángulos en los que conocemos dos lados y un ángulo no comprendido entre ellos:

a) $\hat{A} = 80^\circ$, $a = 45 \text{ cm}$, $c = 60 \text{ cm}$ (0 sol.)

b) $\hat{A} = 135^\circ$, $a = 3 \text{ cm}$, $c = 3.5 \text{ cm}$ (0 sol.)

c) $\hat{A} = 30^\circ$, $a = 7 \text{ cm}$, $c = 10 \text{ cm}$ (1 sol.)

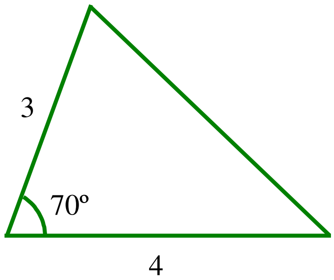
d) $\hat{A} = 48^\circ$, $a = 12 \text{ cm}$, $c = 15 \text{ cm}$ (2 sol.)

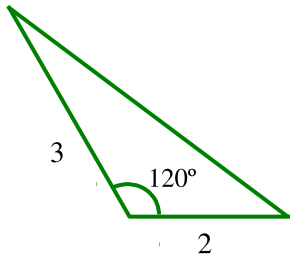
5. El área del siguiente triángulo es 2 cm^2.

Resuélvelo.

6. La base de un triángulo isósceles, que es el lado desigual, mide 10 cm y el ángulo opuesto mide 40°. Obtén su perímetro y su área.

7. Resuelve los siguientes triángulos y halla sus áreas:





8. Halla el área de un pentágono regular cuyo lado mide diez centímetros. ¿Cuáles son los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita al polígono?

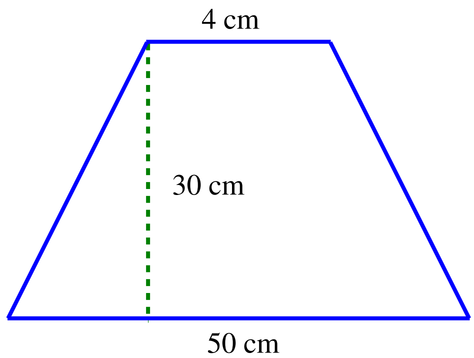
9. Calcula el perímetro de un octógono regular inscrito en una circunferencia de radio diez centímetros. ¿Cuál es su área?

10. En una circunferencia de radio diez centímetros se traza una cuerda de cinco centímetros de longitud. ¿Cuál es el ángulo central que abarca?

11. Las diagonales de un rombo miden diez y cinco centímetros, respectivamente. Calcula su perímetro, su área y la medida de sus ángulos interiores.

12. Desde cierto punto del suelo se ve un árbol bajo un ángulo de 50°. ¿Bajo qué ángulo se verá si me sitúo a distancia doble?

13. Las bases de un trapecio isósceles miden, respectivamente, 50 cm y 20 cm. Su altura mide 30 cm. Averigua su perímetro y su área. ¿Cuánto miden sus ángulos interiores?



14. Desde un punto situado a 40 cm de su centro, se trazan las tangentes a una circunferencia cuyo radio mide 4 cm. ¿Qué ángulos forman las tangentes?

Cuestiones

1. Demuestra que, en cualquier circunferencia, el ángulo inscrito tiene una amplitud igual a la mitad de la del ángulo central que abarca su arco.

2. Deduce de lo anterior que todos los ángulos inscritos en una circunferencia que abarcan la misma cuerda son iguales (propiedad del arco capaz).

3. Deduce también de lo anterior que, en cualquier circunferencia, el ángulo inscrito que abarca un diámetro es recto.

4. Sin realizar ningún dibujo, demuestra que el triángulo cuyos lados miden 3, 4 y 6 cm., respectivamente, es obtusángulo.

5. Pruébese que en cualquier $\triangle ABC$ se cumple:

a) $\tan\hat{A}+\tan\hat{B}+\tan\hat{C}=\tan\hat{A}\tan\hat{B}\tan\hat{C}$.

b) $\tan\hat{A}\cdot\tan\dfrac{\hat{B}+\hat{C}}{2}=1$.

c) $\operatorname{sen}\hat{A}+\operatorname{sen}\hat{B}+\operatorname{sen}\hat{C}=4\cos\dfrac{\hat{A}}{2}\cos\dfrac{\hat{B}}{2}\cos\dfrac{\hat{C}}{2}$.

6. Deduce el teorema de Neper o de las tangentes, partiendo del teorema de los senos y usando las transformaciones de sumas o restas de senos en productos:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\dfrac{\hat{A}+\hat{B}}{2}}{\tan\dfrac{\hat{A}-\hat{B}}{2}}$$

7. Demuestra que el área de un triángulo es la mitad del producto de dos de sus lados por el seno del ángulo comprendido entre ellos.

8. Deduce de lo anterior que el área de cualquier cuadrilátero es igual a la mitad del producto de sus diagonales por el seno del ángulo que forman.

9. Pruébese que en $\triangle ABC$, su superficie es:

$$S=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen}\hat{B}\cdot\operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen}\left(\hat{B}+\hat{C}\right)}$$

10. Busca información sobre los Teoremas de Menelao y de Ceva, así como sus demostraciones usando el Teorema de los senos.

11. Demuestra que si R es el radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo $\triangle ABC$, entonces:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}}=\frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}}=\frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}=2R$$

12. Consideremos un triángulo $\triangle ABC$ y sea R el circunradio (radio de la circunferencia circunscrita).

Demuestra que es la superficie del triángulo es:

$$S=\frac{abc}{4R}$$

13. En el triángulo $\triangle ABC$, sea y p el semiperímetro y sea r el inradio (radio de la cicunferencia inscrita).

Demuestra que su área viene dada por:

$$S=p\cdot r$$

14. Sea p el semiperímetro del triángulo $\triangle ABC$. Demostremos que su área viene dada por la siguiente igualdad, como fórmula de Herón.

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

15. Consideremos un triángulo y llamemos r al inradio y p al semiperímetro. Demostremos las igualdades

$$\tan\frac{\hat{A}}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}=\frac{r}{p-a}$$

$$\tan\frac{\hat{B}}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}=\frac{r}{p-b}$$

$$\tan\frac{\hat{C}}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}=\frac{r}{p-c}$$

que son conocidas como fórmulas de Briggs.

16. Demostremos el denominado Teorema de Napoleón:

Si se construyen tres triángulos equiláteros a partir de los lados de un triángulo cualquiera, todos al interior o todos al exterior, entonces los centros de los triángulos equiláteros forman también un triángulo equilátero.

Sugerencia: calcular el lado del triángulo construido usando el teorema de los cosenos.

17. Demuéstrese que si los puntos A, B y C son colineales y D no es colineal con ellos, se tiene

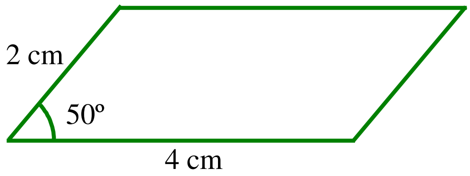
$$\frac{AB}{BC}=\frac{AD\operatorname{sen}A\hat{D}B}{DC\operatorname{sen}B\hat{D}C}$$

Autoevaluación

1. Enuncia los teoremas de los seno y de los cosenos.

2. Resuelve $\triangle ABC$ conociendo $a = 20$ cm, $b = 15$ cm y $\hat{B} = 30°$.

3. En el paralelogramo de la figura:

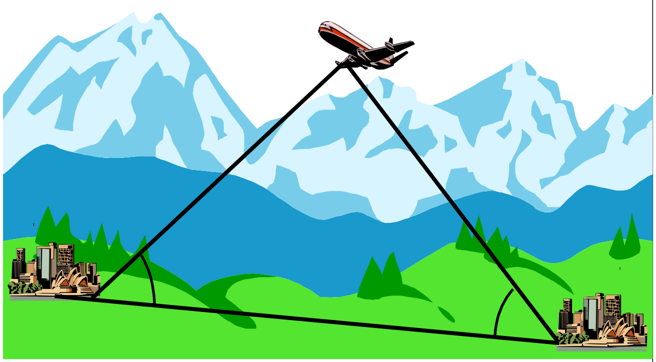


a) Calcula su perímetro y su superficie.

b) Obtén la medida de sus ángulos interiores.

c) Halla las longitudes de sus diagonales.

4. La distancia que separa las dos ciudades es 20 km. , observándose desde cada una de ellas el avión bajo un ángulo de $30°$ y de $45°$, respectivamente. ¿A qué distancia está el avión de cada una de las ciudades?



Autoevaluación

1. Repasar las nociones expuestas en el tema.

2. Estamos ante el caso 'peor': conocemos dos lados y el ángulo enfrentado al menor de ellos.

Lo primero es calcular el ángulo $\hat{A}$. Por el Teorema de los senos:

$$\operatorname{sen}\hat{A}=\frac{20\operatorname{sen}30^\circ}{15}=\frac{2}{3}$$

Tenemos dos soluciones:

Caso 1: ($\hat{A}$ agudo)

$\hat{A}=\operatorname{arcsen}\frac{2}{3}\approx 41^\circ 48' 37''$

$\hat{C}=180^\circ-\hat{A}-\hat{B}\approx 108^\circ 11' 23''$

$c=\dfrac{15\operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen}30^\circ}\approx 28.5\text{ cm}$

Caso 2: ($\hat{A}$ obtuso)

$\hat{A}=180^\circ-\operatorname{arcsen}\frac{2}{3}\approx 138^\circ 11' 23''$

$\hat{C}=180^\circ-\hat{A}-\hat{B}\approx 11^\circ 48' 37''$

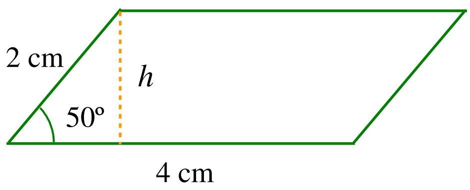
$c=\dfrac{15\operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen}30^\circ}\approx 15.14\text{ cm}$

3.

a) El perímetro es fácil:

$$p=4\cdot 2+2\cdot 2=12\text{ cm}.$$

Para obtener su superficie trazamos la altura:



En el triángulo rectángulo que se forma:

$$\frac{h}{2}=\operatorname{sen}50^\circ \;\rightarrow\; h=2\cdot\operatorname{sen}50^\circ$$

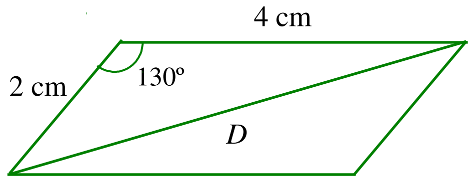
Luego:

$$\begin{aligned}\text{S} &= \text{base}\times\text{altura}=4\cdot 2\cdot\sin 50^\circ= \\ &= 8\cdot\sin 50^\circ\approx 6{,}13\text{ cm}^2\end{aligned}$$

b) Como sus ángulos interiores son iguales dos a dos (coinciden los opuestos) y suman 360°, cada uno de los ángulos de la pareja que resta conocer medirá

$$\frac{360^\circ-100^\circ}{2}=130^\circ$$

c) Dividiendo el paralelogramo por la mitad tenemos:



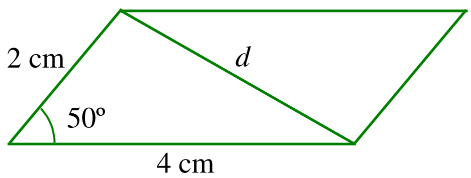
Por el teorema de los cosenos:

$$D^2=2^2+4^2-2\cdot 2\cdot 4\cdot\cos 130^\circ$$

Luego:

$$D=\sqrt{20-16\cdot\cos 130^\circ}\approx 5{,}5\text{ cm}$$

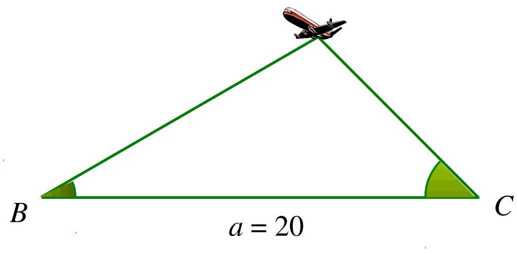
Para la otra diagonal:



Por el teorema de los cosenos, análogamente:

$$d=\sqrt{20-16\cdot\cos 50^\circ}\approx 3{,}1\text{ cm}$$

4. Esquemáticamente, la situación se reduce a calcular b y c en el siguiente triángulo, en el que sabemos que $\hat{B}=30^\circ$, $\hat{C}=45^\circ$ y $a=20$:



Obviamente:

$$\hat{A}=180^\circ-(45^\circ+30^\circ)=105^\circ$$

Aplicando el teorema de los senos:

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}}=\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}}\;\rightarrow\; b=\frac{20\cdot\operatorname{sen}30^\circ}{\operatorname{sen}105^\circ}\approx 30{,}35\text{ km}$$

$$\frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}=\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}}\;\rightarrow\; c=\frac{20\cdot\operatorname{sen}30^\circ}{\operatorname{sen}105^\circ}\approx 14{,}6\text{ km}$$