TEMA 3

TRIGONOMETRÍA

Contenidos

1. Ángulos.
2. Razones en un triángulo rectángulo.
3. Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.
4. Reducción a ángulos agudos
5. Relaciones entre las razones de un ángulo.
6. Funciones trigonométricas.
7. Fórmulas de adición.
8. Ángulo doble y ángulo mitad.
9. Transformar sumas en productos
10. Ecuaciones trigonométricas.
11. Apéndice: demostraciones.

Tiempo estimado

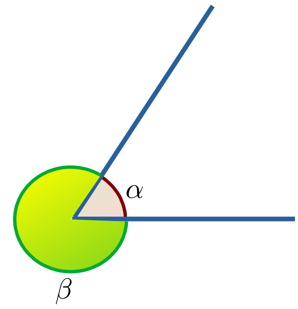
15 sesiones

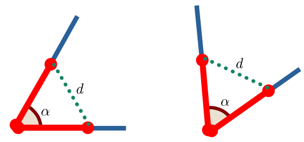
Criterios de Evaluación

1. Conoce las diferentes formas de medir ángulos y la relación que guardan.
2. Comprende qué son las razones trigonométricas de un ángulo y cómo aparecen.
3. Tiene soltura en el manejo de la calculadora.
4. Conoce y aplica las fórmulas que reducen el cálculo de las razones trigonométricas a ángulos agudos.
5. Domina las relaciones entre las razones de un ángulo.
6. Maneja con cierta soltura las fórmulas de adición a la hora de simplificar expresiones sencillas.
7. Conoce las gráficas de las funciones trigonométricas elementales y sus características básicas, muy particularmente la periodicidad.
8. Sabe resolver ecuaciones trigonométricas simples.

1.Ángulos.

❑ Ángulos y su medida





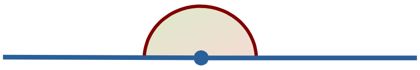
Recordemos que se llama región angular a cada una de las regiones en las que queda dividido el plano por dos semirrectas con un origen común, llamado vértice. Una es convexa y otra es cóncava salvo un caso especial (?).

Diremos que dos regiones angulares del mismo tipo tienen igual amplitud o abertura si al tomar en cada lado un segmento de longitud dada y un extremo igual al vértice tenemos que los otros extremos están a igual distancia. Y llamamos ángulo al conjunto de las regiones angulares del mismo tipo con igual amplitud.

Los ángulos más importantes son el ángulo nulo, el ángulo llano (el determinado por las dos semirrectas en que queda dividida toda recta por un punto cualquiera de ella), el ángulo recto (mitad del llano), el triple recto y el completo (cóncavo correspondiente al nulo).

Usaremos tres sistemas de medida: los grados sexagesimales, las vueltas o revoluciones y los radianes. Y para ello usaremos como patrón el llamado ángulo llano. Convenimos que el ángulo llano mide:

$$180^\circ \equiv \frac{1}{2} \text{ vuelta} \equiv \pi \text{ rad}$$



Pasar de un sistema de medida a otro es cuestión de una simple proporción basada en la medida patrón del ángulo llano.

☞ Ejemplo: veamos la medida en radianes del ángulo 60° :

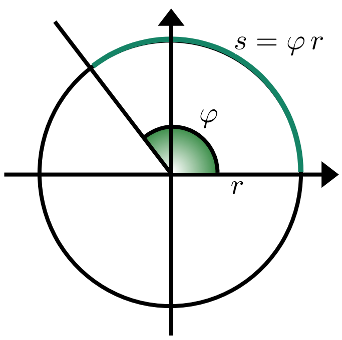
$$\frac{60}{180} = \frac{x}{\pi} \rightarrow x = \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$$

Así, 60° son $\frac{\pi}{3}$ rad .

☞ Ejemplo: Veamos la medida sexagesimal de 1 rad :

$$\frac{x}{180} = \frac{1}{\pi} \rightarrow x = \frac{180}{\pi} \rightarrow x \approx 57^\circ 17' 45''$$

Para estudiar los ángulos y relacionarlos con las giros, lo mejor es dibujarlos en unos ejes de coordenadas de modo que uno de los lados sea siempre el semieje positivo de abscisas.



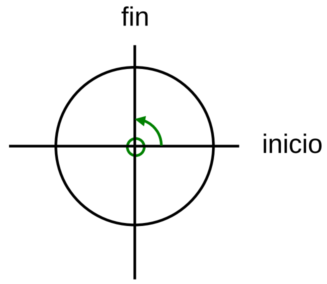
Si dibujamos además una circunferencia centrada en el origen, los ángulos son centrales en ella y se aprecian importantes relaciones entre los giros y los ángulos.

Por ejemplo, el ángulo completo 2π rad abarca un arco que mide $L = 2\pi r$, el llano π rad abarca un arco que mide $L = \pi r$. Y en general:

Si el ángulo central mide φ radianes entonces el arco abarcado tiene una longitud $s = \varphi \cdot r$.

❑ Ángulos que contienen vueltas completas.

Hasta ahora hemos considerado ángulos comprendidos entre $0°$ y $360°$. ¿Qué significado podría tener el ángulo $450°$? ¿Y $1140°$?



Es fácil imaginar una situación en la que aparezca, por ejemplo, un ángulo que "mida" $450°$: consideramos una pista circular en la que un corredor ha dado una vuelta y un cuarto.

Decir que el ángulo central barrido por el corredor al moverse es $90°$ no responde a la realidad. Es mucho más correcto asociarle una medida así:

$$1+\frac{1}{4}\ \text{vueltas} = 360° + 90° = 450°$$

☞ <u>Ejemplo</u>: ¿Qué ángulo corresponde a 1140º? Es claro que contiene varias vueltas. Para averiguar cuántas dividiremos entre 360º:

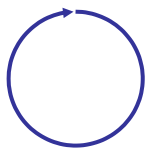
$$\begin{array}{r|l} 1140° & 360° \\ \cline{2-2} 60° & 3 \end{array} \quad \longrightarrow \quad 1140° = 3\cdot 360° + 60°$$

Ahora tenemos claro qué ángulo mide $1140°$: es el que se obtiene al sumar $60°$ a 3 vueltas completas.

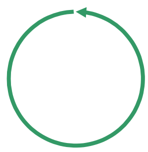
Importante: observa que los ángulos α y α + n · 360º son ángulos que tienen las mismas razones trigonométricas, pues el segundo se obtiene añadiendo n vueltas al primero.

❑ Ángulos negativos.

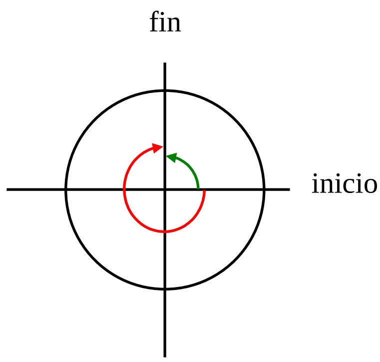
En Trigonometría se manejan ángulos con medida negativa: ¿qué puede significar que un ángulo mida $-90°$? Observemos que en un movimiento circular hay dos posibles sentidos de giro:



Como las agujas del reloj



Contra las agujas del reloj



Imaginemos que en un movimiento circular una persona A recorre $\frac{1}{4}$ de vuelta en contra de las agujas del reloj y otra persona B da $\frac{3}{4}$ de vuelta como las agujas del reloj. Ambas terminan encontrándose. ¿Qué medida corresponde a los ángulos barridos? Tendríamos que decir:

A barre $90°$ en sentido contrario a las agujas del reloj

B barre $270°$ a favor de las agujas del reloj

En este respecto hay un sencillo acuerdo:

Se conviene en que los ángulos barridos a favor de las agujas del reloj tengan medida negativa y los ángulos que son barridos en sentido contrario a las agujas del reloj tengan medida positiva.

Ahora diremos que la persona A ha barrido un ángulo de $90°$ y la persona B uno de $-270°$. Observemos que el inicio y el final del movimiento correspondientes a $90°$ y a $-270°$ son los mismos. Por ello se dice que son ángulos asociados.

Encuentra tú el ángulo negativo asociado a 60º y el ángulo positivo asociado a –30º.

2.Razones en un triángulo rectángulo.

En este tema vamos a estudiar las nociones elementales de la Trigonometría, parte de las Matemáticas que se encarga de estudiar las relaciones que hay entre las longitudes y los ángulos. Ese estudio parte del triángulo rectángulo hasta extenderse a figuras y situaciones geométricas más complejas.

La base de todo el estudio lo constituyen las llamadas "razones trigonométricas de un ángulo". Vamos a introducirlas a continuación:

El significado literal de "razones trigonométricas" es: "cocientes que miden tres ángulos":

razón = cociente

tri = tres

gono = ángulo

métrica = medida

Si α es un ángulo agudo de un triángulo rectángulo se llaman razones trigonométricas de α a los siguientes cocientes de longitudes:

$$\text{seno de } \alpha: \qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{coseno de } \alpha: \qquad \cos\alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tangente de } \alpha: \qquad \tan\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$$

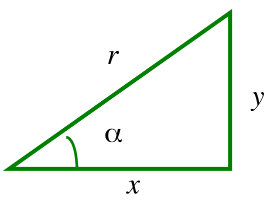
Otras tres razones de un ángulo, de menor importancia son:

secante → *sec* $\alpha = \frac{r}{x}$

cosecante → *csc* $\alpha = \frac{r}{y}$

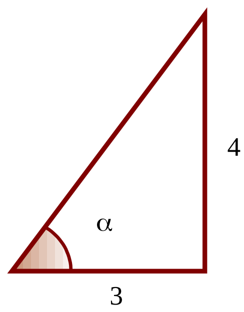
cotangente → cot$\alpha = \frac{x}{y}$

Así en un triángulo rectángulo tenemos:



$$\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{y}{r} \\ \cos\alpha = \dfrac{x}{r} \\ \tan\alpha = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

☞ Ejemplo 1: Obtengamos las razones trigonométricas del ángulo α del triángulo rectángulo del margen:



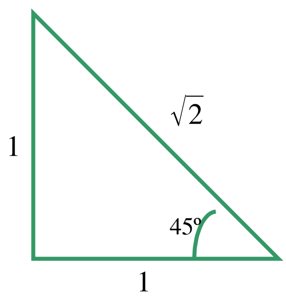
Primero la longitud de la hipotenusa (r) usando el Teorema de Pitágoras:

$$r^2 = 3^2 + 4^2 \to r^2 = 25 \to r = 5$$

Así, de la definición:

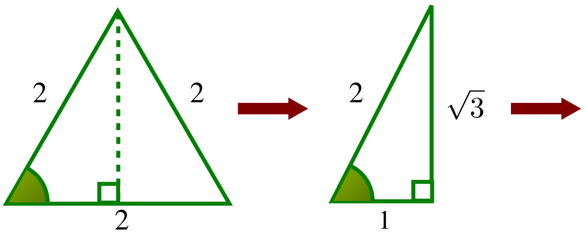
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{5} \quad , \quad \cos\alpha = \frac{3}{5} \quad , \quad \tan\alpha = \frac{4}{3}$$

☞ Ejemplo 2: Calculemos las razones trigonométricas de 45º a partir del triángulo rectángulo siguiente:



$$\begin{cases} \operatorname{sen} 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \tan 45^\circ = 1 \end{cases}$$

☞ Ejemplo 3: Observemos cómo obtener las razones de 60° :

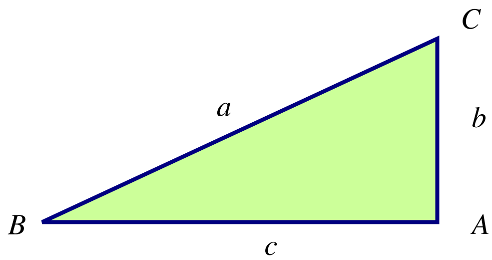


$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen} 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\[2ex] \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2} \\[2ex] \tan 60^\circ = \sqrt{3} \end{array}\right.$$

☞ Ejemplo 4: En ese mismo triángulo deducimos las razones de 30°:

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2} \quad , \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

☞ *Notación*: es usual designar por *A*, *B*, *C* a los vértices de un triángulo y referirse a él mediante $\triangle ABC$. En ese caso se denotan por $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ a los ángulos correspondientes y por a, b y c a las longitudes de los lados opuestos, tal y como se muestra en la figura siguiente:



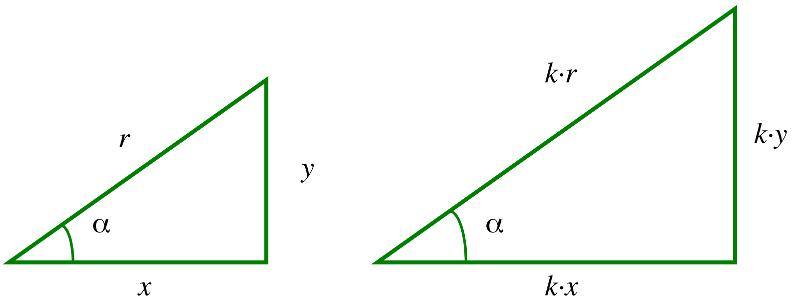
En el triángulo de la izquierda:

$\operatorname{sen}\hat{B} = \dfrac{b}{a}$, $\cos\hat{B} = \dfrac{c}{a}$, $\tan\hat{B} = \dfrac{b}{a}$

❑ Independencia del triángulo.

Las razones trigonométricas de un ángulo α no dependen del triángulo rectángulo en el que se estén calculando. Dichas razones (esto es, cocientes) sólo dependen de la medida de α, siendo independientes del triángulo.

Observemos que si dos triángulos rectángulos tienen un mismo ángulo agudo, entonces los dos triángulos tienen los tres ángulos iguales y, por consiguiente, son dos triángulos semejantes. De aquí que las longitudes de los lados sean proporcionales:



Tenemos así:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{k\cdot y}{k\cdot r} = \frac{y}{r} \quad , \quad \cos\alpha = \frac{k\cdot x}{k\cdot r} = \frac{x}{r} \quad , \quad \tan\alpha = \frac{k\cdot y}{k\cdot x} = \frac{y}{x}$$

Empleo de la calculadora.

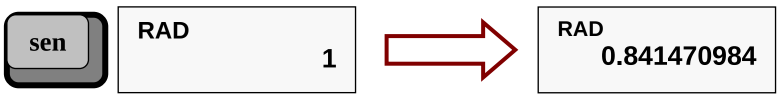
La calculadora puede manejar ángulos medidos en radianes y en grados.

a) Si aparece en ella la expresión "DEG" o "D" los ángulos se supondrán medidos en sistema sexagesimal.

b) si vemos "RAD" o "R" los ángulos se tomarán en radianes.

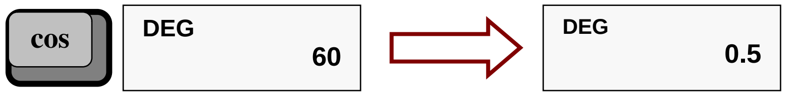
Para cambiar el sistema de medida en la mayoría de los aparatos se utiliza la tecla "MODE". Prueba con la tuya.

☞ Ejemplo: Así calculamos el seno del ángulo cuya medida es 1 radián:



Si vamos a introducir ángulos en la calculadora que están medidos según el sistema sexagesimal (grados, minutos y segundos), lo primero que deberemos comprobar es que la calculadora opera en modo "DEG"

☞ Ejemplo: para obtener el coseno de 60º, Comprobamos primero que está en modo DEG y pulsamos:

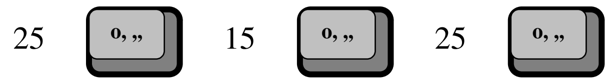


Tenemos así que $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

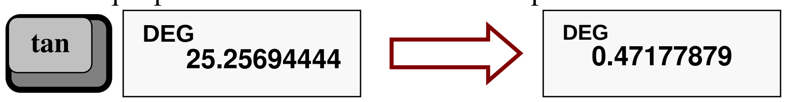
Como ejercicio, comprueba que el ángulo agudo cuyo coseno es 0,3 mide aproximadamente 72º32'33" y que el ángulo agudo cuya tangente es 1,5 mide unos 0,9828 radianes.

☞ Ejemplo: obtengamos la tangente de 25º 15' 25".

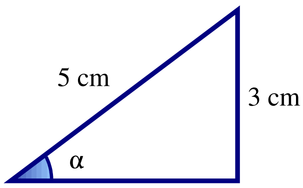
Primero introducimos el ángulo con la tecla correspondiente:



El ángulo aparece en pantalla medido en sistema decimal. Ya sólo tenemos que pulsar la tecla de la razón correspondiente:

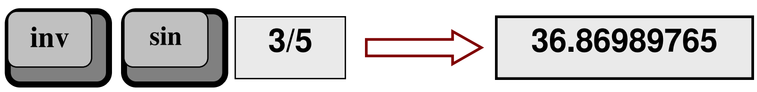


☞ Ejemplo: calculemos la medida del ángulo α del ángulo de la derecha.

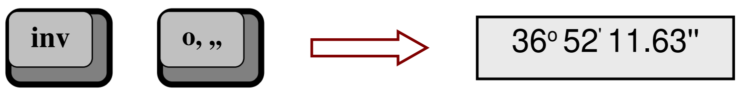


Con un buen transportador podríamos averiguar que α mide unos 37º. ¿No es posible una mejor aproximación?

Sí. Observando que el seno de α es tres quintos:



Ahora convertimos al sistema sexagesimal:



Obtenemos que la medida sexagesimal de α es, aproximadamente, 36 grados, 52 minutos, 11 segundos y 63 centésimas de segundo.

Observemos, por tanto, que si x es un ángulo agudo:

$\operatorname{sen} x = y \rightarrow x = \operatorname{inv} \operatorname{sen} y$

$\cos x = y \rightarrow x = \operatorname{inv} \cos y$

$\tan x = y \rightarrow x = \operatorname{inv} \tan y$

He aquí donde se aprecia la potencia del cálculo trigonométrico: hemos obtenido hasta las centésimas de segundo la medida del ángulo. Es por esto que la Trigonometría es usada en Topografía, Ingeniería y Arquitectura (construcción de carreteras, túneles, puentes, ...).

3.Razones de ángulos cualesquiera.

❑ Definiciones.

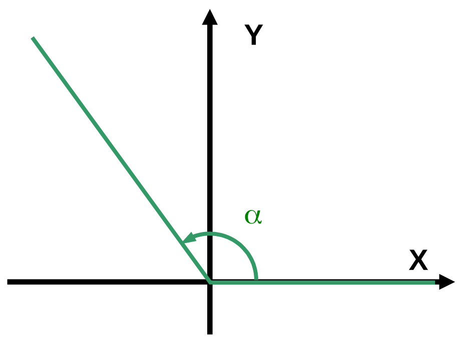
Con la calculadora obtengamos, por ejemplo, el coseno de $120°$:

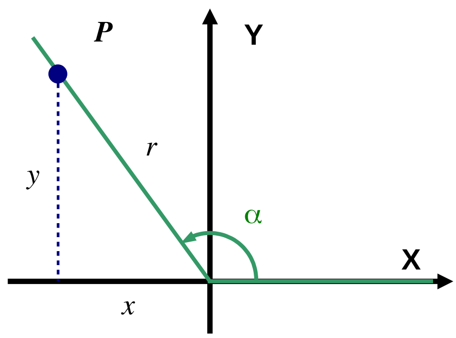
$$\cos 120° = -\frac{1}{2}$$

¿Qué significado tiene esto? No podemos construir un triángulo rectángulo con un ángulo de 120º. Y ese coseno es un número negativo: ¿como el cociente de dos longitudes no puede resultar un nº negativo? ¿Qué significado puede tener ese número?

Vamos a continuación a dar un procedimiento que permitirá asignar a un ángulo cualquiera (agudo, obtuso, cóncavo,...) las razones trigonométricas.

Dibujaremos los ángulos en unos ejes de coordenadas, de modo que el primer lado del ángulo sea el semieje positivo de abscisas, y el sentido de giro de apertura del ángulo contrario a las aguas del reloj para ángulos positivos:

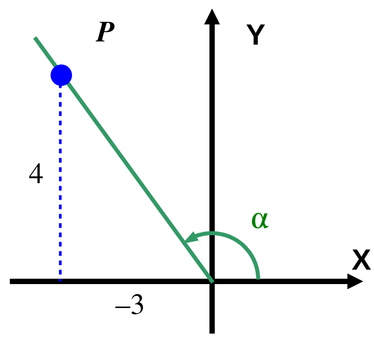




Y a continuación tomaremos un punto $P = (x\,,y)$ del segundo lado del ángulo y llamemos *r* a la distancia del origen a P:

> En la situación mostrada anteriormente definimos el seno, el coseno y la tangente del ángulo α mediante:
>
> $$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r} \quad , \quad \cos\alpha = \frac{x}{r} \quad , \quad \tan\alpha = \frac{y}{x}$$

☞ Ejemplo: vamos a calcular las razones trigonométricas del ángulo α dibujado en el margen. Ante todo, obtengamos la distancia r del origen al punto P. Por el Teorema de Pitágoras, obtenemos que es $r = 5$.



Aplicando la definición:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{5} \quad , \quad \cos\alpha = -\frac{3}{5} \quad , \quad \tan\alpha = -\frac{4}{3}$$

Las inversas:

$$\csc\alpha = \frac{5}{4} \quad , \quad \sec\alpha = -\frac{5}{3} \quad , \quad \cot\alpha = -\frac{3}{4}$$

❑ Signo de las razones.

Como vemos, las razones de un ángulo pueden ser unas positivas y otras negativas. Ello dependerá del cuadrante en el que esté situado su segundo lado.

En general, si $P=(x\,,y)$ es un punto del 2º lado del ángulo α, el seno tiene el signo de y, el coseno tiene el signo de x y la tangente el signo del cociente y/x .

Observemos que un ángulo α:
- Es del cuadrante I si
  0º< α < 90º
- Es del cuadrante II si
  90º< α < 180º
- Es del cuadrante III si
  180º< α < 270º
- Es del cuadrante IV si
  270º< α < 360º

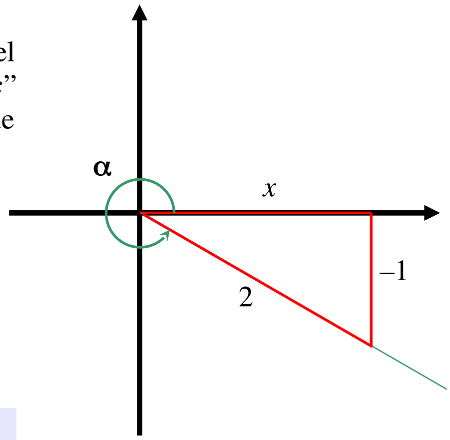
☞ Ejemplo: obtengamos las razones de un ángulo α con $\operatorname{sen}\alpha=-\frac{1}{2}$, sabiendo que $270° < \alpha < 360°$.

En primer lugar, dibujemos el ángulo (observemos que es un ángulo del cuadrante IV). En segundo lugar, necesitamos conocer el valor de "x" para poder obtener el coseno y la tangente. Ello es fácil por el teorema de Pitágoras:

$$x^2+1^2=2^2 \to x=\sqrt{3}$$

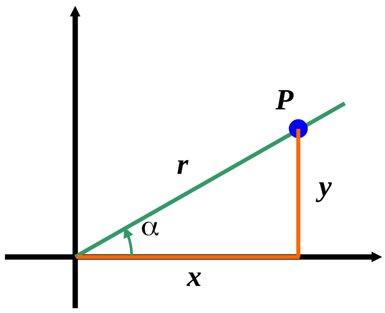
Aplicando las definiciones:

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \tan\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$



4.Relaciones entre las razones de un ángulo.

Las razones trigonométricas de un ángulo guardan una estrecha relación entre sí. Esa ligazón se manifiesta a través de unas fórmulas que iremos viendo a continuación. A continuación nos referiremos a un ángulo cualquiera como el que muestra la figura del margen.



❑ Fórmulas de las inversas.

Aparte de las tres razones más importantes de un ángulo (seno, coseno y tangente), hay otras tres que tienen una importancia secundaria y que ya se mencionaron con anterioridad.

De su definición se deduce directamente:

Si α es un ángulo cualquiera, entonces:

$$\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha} \quad , \quad \sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha} \quad , \quad \csc\alpha=\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$$

☞ Demostración: probaremos la fórmula de la cotangente. Las otras dos tienen la misma deducción.

$$\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{1}{y/x}=\frac{x}{y}=\cot\alpha$$

☞ Ejemplo: obtengamos con la calculadora la secante de 60º.

Como $\sec 60^\circ = \dfrac{1}{\cos 60^\circ}$:

60 cos ⇒ 0.5 1/x ⇒ 2

Resulta ser $\sec 60^\circ = 2$.

❑ Fórmula de la tangente.

La relación que guarda la tangente con el seno y el coseno es sencilla: es su cociente:

Si α es un ángulo cualquiera, entonces:

$$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

Se deduce de aquí:

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

☞ Demostración:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y/r}{x/r} = \frac{y}{x} = \tan\alpha$$

❑ Fórmula Fundamental.

El seno y el coseno de un ángulo están relacionados por la siguiente fórmula, que se usa continuamente en Trigonometría. Permite, entre otras cosas, calcular el coseno conocido el seno y viceversa.

Si α es un ángulo cualquiera, entonces:

$$(\operatorname{sen}\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$$

Es usual escribir:

$\operatorname{sen}^2\alpha$ y $\cos^2\alpha$

en lugar de

$(\operatorname{sen}\alpha)^2$ y $(\cos\alpha)^2$

☞ Demostración:

$$(\operatorname{sen}\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{r^2} \overset{\text{Pitágoras}}{=} \frac{r^2}{r^2} = 1$$

☞ Ejemplo: Comprobemos que las siguientes identidades son ciertas

$$\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha \quad \text{y} \quad \cot^2\alpha + 1 = \csc^2\alpha$$

Tomamos el primer miembro y desarrollamos hasta obtener el segundo, usando la fórmula fundamental:

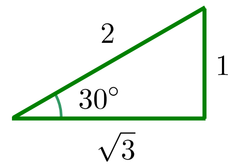
$$\tan^2\alpha + 1 = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} \overset{\text{F.F.}}{=} \frac{1}{\cos^2\alpha} = \csc^2\alpha$$

Se deja como sencillo ejercicio la comprobación de la otra identidad. El procedimiento es análogo.

5.Reducción a ángulos agudos.

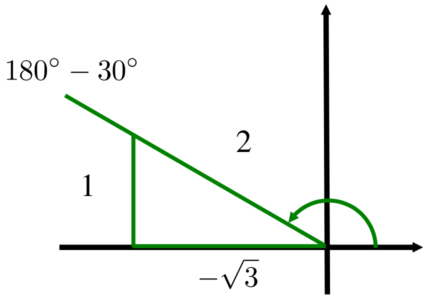
Vamos a comprobar que conociendo sólo las razones de los ángulos agudos podemos deducir las de todos los demás ángulos. Lo veremos con un caso concreto: las razones trigonométricas de 30° , 150° , 210° , 330° y -30°

Las razones de 30° , como sabemos, se obtienen del triángulo de la derecha:



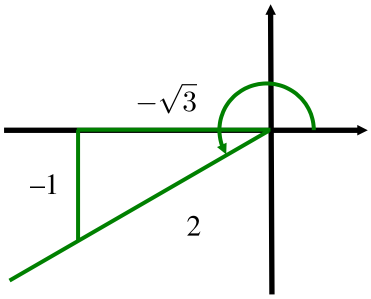
$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2} \quad , \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Las razones de $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ son:



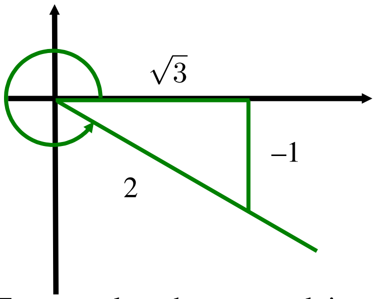
$$\begin{cases} \operatorname{sen} 150^\circ = \dfrac{1}{2} \\ \cos 150^\circ = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan 150^\circ = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Las razones de $180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$ son:



$$\begin{cases} \operatorname{sen} 210^\circ = -\dfrac{1}{2} \\ \cos 210^\circ = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan 210^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Las razones de $360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$ y de -30° son:



$$\begin{cases} \operatorname{sen} 330^\circ = -\dfrac{1}{2} \\ \cos 330^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan 330^\circ = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Observa que las razones trigonométricas de –30º son iguales que las de 330º, ya que las posiciones inicial y final del giro son las mismas.

En general, podemos concluir que:

Las razones trigonométricas de los ángulos

$$\alpha \ , \ \pi - \alpha \ , \ \pi + \alpha \ , \ 2\pi - \alpha \ , \ -\alpha$$

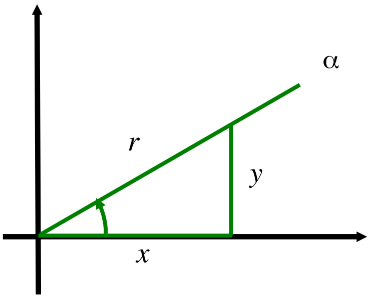
son las mismas con la posible excepción del signo, que viene marcado por el cuadrante en el que se halle el ángulo.

Las razones trigonométricas de los ángulos a y 90º – a también están relacionadas entre sí:

sen (90º – a) = cos a

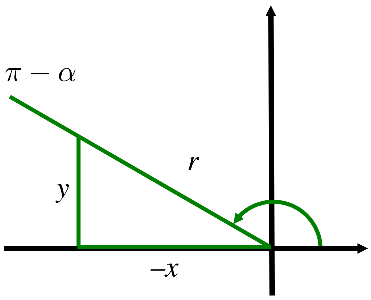
cos (90º – a) = sen a

Partiendo del ángulo α :



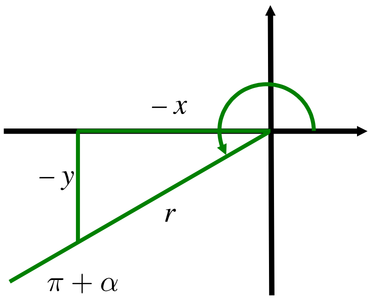
$$\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{y}{r} \\ \cos\alpha = \dfrac{x}{r} \\ \tan\alpha = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

Podemos obtener las razones trigonométricas de $\pi - \alpha$:



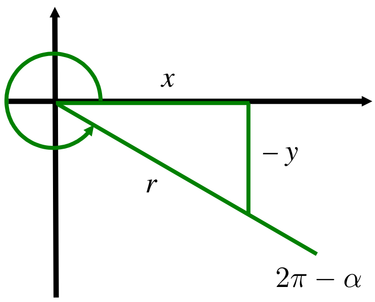
$$\begin{cases} \operatorname{sen}(\pi-\alpha) = \dfrac{y}{r} = \operatorname{sen}\alpha \\ \cos(\pi-\alpha) = -\dfrac{x}{r} = -\cos\alpha \\ \tan(\pi-\alpha) = -\dfrac{y}{x} = -\tan\alpha \end{cases}$$

Podemos obtener las razones trigonométricas de $\pi + \alpha$:



$$\begin{cases} \operatorname{sen}(\pi+\alpha) = -\dfrac{y}{r} = -\operatorname{sen}\alpha \\ \cos(\pi+\alpha) = -\dfrac{x}{r} = -\cos\alpha \\ \tan(\pi+\alpha) = \dfrac{y}{x} = \tan\alpha \end{cases}$$

Podemos obtener las razones trigonométricas de $2\pi - \alpha$ y de $-\alpha$:



$$\begin{cases} \operatorname{sen}(2\pi-\alpha) = -\dfrac{y}{r} = -\operatorname{sen}\alpha \\ \cos(2\pi-\alpha) = \dfrac{x}{r} = \cos\alpha \\ \tan(2\pi-\alpha) = -\dfrac{y}{x} = -\tan\alpha \end{cases}$$

Un detalle importante: si a un ángulo α añadimos vueltas completas, los dos lados de ambos ángulos quedan en las mismas posiciones. Por ello, las razones trigonométricas no varían:

$$\operatorname{sen}(\alpha+2k\pi) = \operatorname{sen}\alpha\ ,\ \cos(\alpha+2k\pi) = \cos\alpha\ ,\ \tan(\alpha+2k\pi) = \tan\alpha$$

6.Funciones trigonométricas

Son funciones definidas a través de fórmulas con las razones trigonométricas. Si a cada ángulo que en radianes mide x le asociamos su seno, su coseno o su tangente, aparecen las funciones seno, coseno y tangente:

$$x \mapsto y = \text{sen}\,(x) \ \ , x \mapsto y = \cos\,(x) \ \ , x \mapsto y = \tan\,(x)$$

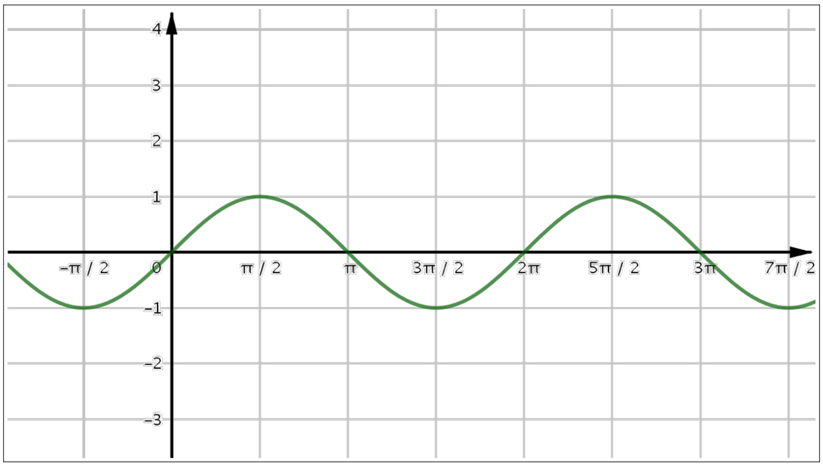
El matemático Fourier, realizando estudios sobre el calor a principios del siglo XIX, fue el primero en formular la idea de que toda función se puede escribir como una combinación infinita de senos y cosenos. Esta idea ha tenido una inmensa influencia en el desarrollo del Análisis Matemático.

Una básica tabla de valores en la primera circunferencia ($0 \leq x \leq 2\pi$):

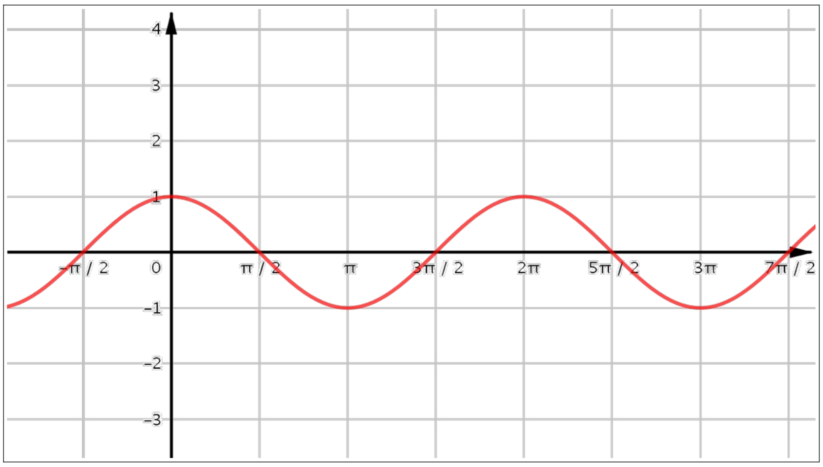
x	0		$\pi/2$		π		$3\pi/2$		2π
sen (x)	0	↗	1	↘	0	↘	–1	↗	0
$\cos\,(x)$	1	↘	0	↘	–1	↗	0	↗	1

Aquí están dibujada mediante geogebra.

La función seno:



La función coseno:



seno y coseno

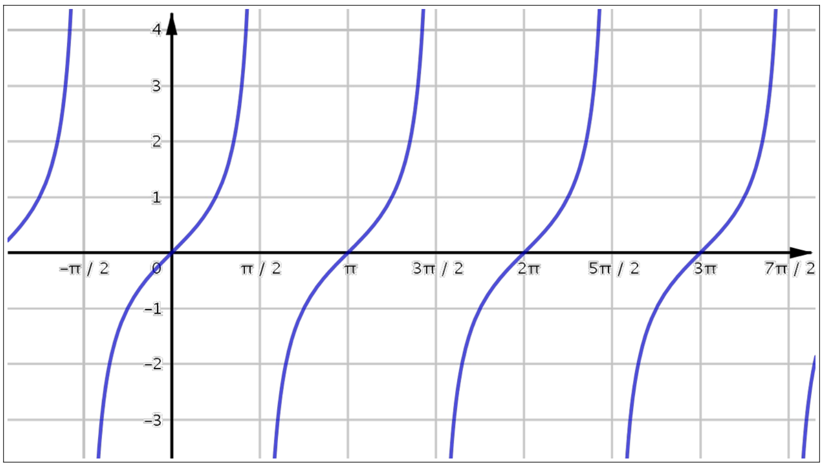
Ambas son continuas y son la representación de una onda, que es periódica, repitiéndose los valores cada 2 π.

Observemos que oscilan de forma periódica entre -1 y 1: están acotadas y esos son sus valores mínimo y máximo.

Son prácticamente iguales: una está desplazada π / 2 respecto de la otra. Pero mientras la función seno corta al eje de ordenadas en el cero, la coseno lo hace en el uno.

Esa curva que describen se denomina sinusoidal.

La función tangente:



La gráfica de la tangente es un más compleja: está formada por trazos que no están unidos unos a otros: no es siempre continua.

Y es que para cada múltiplo impar de $\pi / 2$ desaparece: porque al dividir el seno entre el coseno se hace cero el denominador.

De lo anterior se deriva que no está acotada (ni superior ni inferiormente).

Y observa es periódica, pero su período es π.

7.Fórmulas de adición.

Si conocemos las razones trigonométricas de los ángulos α y β, ¿podemos obtener directamente a partir de ellas las de $\alpha+\beta$ y de $\alpha-\beta$?

Antes de nada, veamos si lo más fácil es cierto:

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen} 30^\circ = 0{,}5 \\ \operatorname{sen} 60^\circ = 0{,}8660\ldots \\ \operatorname{sen} 90^\circ = 1\end{array}\right\} \rightarrow \operatorname{sen} 90^\circ \neq \operatorname{sen} 60^\circ + \operatorname{sen} 30^\circ$$

Las fórmulas que relacionan las razones trigonométricas de dos ángulos con las de su suma no son nada "sencillas":

Dados dos ángulos α y β se tiene que:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

Al final del tema puedes ver una demostración de las fórmulas.

☞ Ejemplo: obtengamos el seno de 75° a partir de las razones de 30° y de 45º, utilizando la fórmula de adición.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 75^\circ &= \operatorname{sen}(45^\circ+30^\circ) = \operatorname{sen} 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \operatorname{sen} 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Es fácil comprobar, como se ha hecho anteriormente, que el seno o el coseno de una diferencia no coincide con el seno o el coseno de la diferencia –salvo en casos muy particulares–.

De las fórmulas anteriores se deducen las correspondientes para la diferencia:

Dados dos ángulos α y β se tiene que:

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

Las fórmulas de la diferencia se pueden obtener de las de la suma cambiando β por $-\beta$.
Consúltalo al final del tema.

☞ Ejemplo: obtengamos el seno de 15º a partir de las razones de 30º y de 45º, utilizando la fórmula de adición.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}15^\circ &= \operatorname{sen}(45^\circ-30^\circ)=\operatorname{sen}45^\circ\cos30^\circ-\cos45^\circ\operatorname{sen}30^\circ\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

8.Ángulo doble y ángulo mitad.

❑ Ángulo doble.

Si conocemos las razones trigonométricas de un ángulo α, ¿podemos obtener directamente a partir de ellas las del ángulo 2α ?

Antes de nada, veamos si lo más fácil es cierto:

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen}30^\circ=0{,}5\\ \operatorname{sen}60^\circ=0{,}8660\ldots\end{array}\right\}\rightarrow\operatorname{sen}60^\circ\neq2\cdot\operatorname{sen}30^\circ$$

Las fórmulas que relacionan las razones trigonométricas de un ángulo con las de su doble son:

Dado un ángulo α se tiene que:

$$\operatorname{sen}(2\alpha)=2\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\tan(2\alpha)=\frac{2\cdot\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

Las fórmulas del ángulo doble se pueden obtener de las de adición colocando dos veces el mismo ángulo. Consúltalo al final del tema.

☞ Ejemplo: simplifiquemos la expresión $\dfrac{\operatorname{sen}2a}{\cos(90^\circ+a)}$.

$$\frac{\operatorname{sen}2a}{\cos(90^\circ+a)}=\frac{2\operatorname{sen}a\cos a}{\cos90^\circ\cos a-\operatorname{sen}90^\circ\operatorname{sen}a}=\frac{2\operatorname{sen}a\cos a}{-\operatorname{sen}a}=-2\cos a$$

❑ Ángulo mitad.

Es fácil comprobar, como se ha hecho anteriormente, que el seno o el coseno del ángulo mitad no coincide con la mitad del seno o del coseno del ángulo –salvo en casos muy particulares–.

De las fórmulas anteriores se deducen las correspondientes para el ángulo mitad:

Dado un ángulo α se tiene que:

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

La fórmulas del ángulo mitad se pueden obtener a partir de las del ángulo doble junto con la fórmula fundamental. Consúltalo al final del tema.

☞ Ejemplo: usando las fórmulas del ángulo mitad obtengamos el coseno de 15º a partir del de 30º.

$$\cos 15^\circ=\cos\frac{30^\circ}{2}=+\sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

Observa que hay que elegir del $\pm$ que aparece en las raíces de las fórmulas el signo correspondiente.

9.Transformar sumas en productos.

En algunas ocasiones interesa transformar una suma de razones trigonométricas en un producto. Las siguientes fórmulas son útiles para ello:

Dados cualesquiera A y B se tiene que:

$$\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B=2\cdot\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\operatorname{sen}A-\operatorname{sen}B=2\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B=2\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A-\cos B=-2\cdot\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{A-B}{2}$$

Las fórmulas que transforman sumas o restas en productos se pueden obtener de las de adición. Consúltalo al final del tema.

☞ Ejemplo: observa cómo podemos simplificar $\dfrac{\operatorname{sen}3a+\operatorname{sen}a}{\cos 3a+\cos a}$.

$$\frac{\operatorname{sen}3a+\operatorname{sen}a}{\cos 3a+\cos a}=\frac{2\operatorname{sen}\frac{3a+a}{2}\cos\frac{3a-a}{2}}{2\cos\frac{3a+a}{2}\cos\frac{3a-a}{2}}=\frac{\operatorname{sen}2a\cos a}{\cos 2a\cos a}=\tan 2a$$

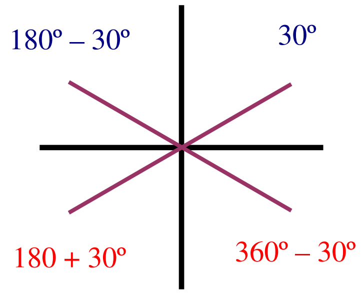
10.Ecuaciones trigonométricas.

Las ecuaciones trigonométricas son aquellas en las que aparecen razones trigonométricas de un ángulo desconocido cuyo valor debe obtenerse. A continuación veremos algunos ejemplos resueltos que pueden ayudarnos a introducirnos en la resolución de estas ecuaciones.

En algunos casos necesitaremos usar las fórmulas de reducción que hemos visto a lo largo del tema.

Deberemos encontrar dar todas las soluciones de la ecuación. En este sentido hemos tener particular cuidado con la calculadora, instrumento que, en general, sólo nos permitirá encontrar algunas soluciones.

☞ <u>Ejemplo</u>: resolvamos la ecuación $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$.



Con la calculadora: $\operatorname{arcsen} \frac{1}{2} = 30^\circ$. Pero debemos tener en cuenta que:

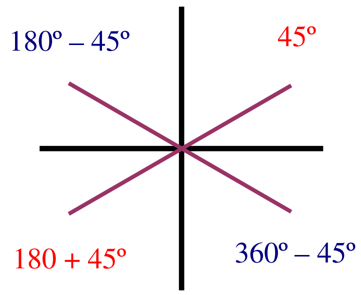
1) si le sumamos vueltas completas, los ángulos que obtengamos también son solución de la ecuación.
2) hay otro ángulo con el mismo seno, que está en el segundo cuadrante y que la calculadora no habla de él. Deberemos calcularlo nosotros. El esquema de la derecha nos es de utilidad.

Tenemos así:

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = \ \ 30^\circ + n \cdot 360^\circ \\ x = 150^\circ + n \cdot 360^\circ \end{cases}$$

☞ <u>Ejemplo</u>: resolvamos la ecuación $\tan(3x) = -1$.

Con la calculadora encontramos que es: $\arctan 1 = 45^\circ$.



Partiendo de este dato consideramos el esquema de la derecha, y obtenemos:

$$\tan(3x) = -1 \rightarrow \begin{cases} 3x = 135^\circ + n \cdot 360^\circ & \rightarrow \quad x = \ \ 45^\circ + n \cdot 120^\circ \\ 3x = 315^\circ + n \cdot 360^\circ & \rightarrow \quad x = 105^\circ + n \cdot 120^\circ \end{cases}$$

☞ <u>Ejemplo</u>: resolvamos la ecuación $\cos(2x) + 6 \operatorname{sen} x = 5$

Desarrollando $\cos 2x$

$$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 6 \operatorname{sen} x = 5$$

De la fórmula fundamental:

$$1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 6 \operatorname{sen} x = 5$$

Simplificando:

$$\operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 2 = 0$$

Resolviendo:

$$\operatorname{sen} x = \frac{3 \pm 1}{2} \rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 2 \rightarrow \ \text{NO} \\ \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow x = 90^\circ + n \cdot 360^\circ \end{cases}$$

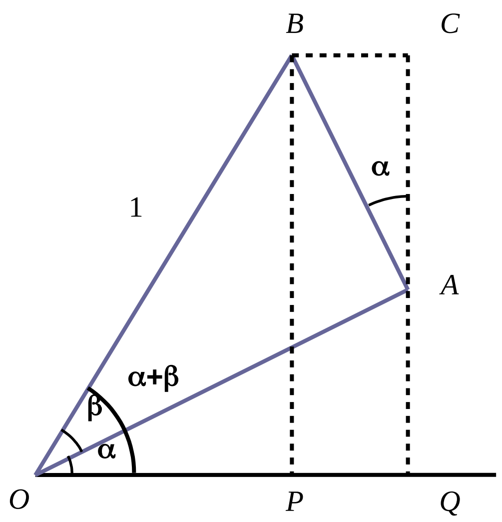
☞ ***<u>Nota</u>*** : cuando utilizamos la calculadora para averiguar el ángulo –x– cuya razón trigonométrica es un número –y–, sólo nos da uno de los posibles:

Si	da el valor de x comprendido entre
$x = \operatorname{arcsen} y$	–90º y 90º
$x = \arccos y$	0º y 180º
$x = \arctan y$	–90º y 90º

11.Anexo: demostraciones.

Demostración de las fórmulas de adición.

Observemos el siguiente esquema, construido de la siguiente forma: sobre el segundo lado del ángulo α dibujamos un triángulo rectángulo de hipotenusa igual a 1, de forma que su ángulo agudo sea β:



En $\triangle OAB$:

$$\frac{\overline{OA}}{1} = \cos\beta \;\rightarrow\; \overline{OA} = \cos\beta \qquad (*)$$

$$\frac{\overline{AB}}{1} = \operatorname{sen}\beta \;\rightarrow\; \overline{AB} = \operatorname{sen}\beta \qquad (**)$$

En $\triangle ABC$, teniendo en cuenta que $\angle BAC = \alpha$:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB}} = \cos\alpha \xrightarrow{(*)} \overline{AB} = \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \operatorname{sen}\alpha \xrightarrow{(**)} \overline{BC} = \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

En $\triangle OAQ$:

$$\frac{\overline{OQ}}{\overline{OA}} = \cos\alpha \xrightarrow{(*)} \overline{OQ} = \cos\alpha \cdot \cos\beta$$

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{OA}} = \operatorname{sen}\alpha \xrightarrow{(*)} \overline{AQ} = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta$$

En $\triangle OPB$:

$$\frac{\overline{OP}}{1} = \cos(\alpha+\beta) \;\rightarrow \overline{OP} = \cos(\alpha+\beta)$$

$$\frac{\overline{BP}}{1} = \operatorname{sen}(\alpha+\beta) \;\rightarrow \overline{BP} = \operatorname{sen}(\alpha+\beta)$$

Así, tenemos:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \overline{OP} = \overline{OQ} - \overline{PQ} = \overline{OQ} - \overline{BC} = \\ &= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \overline{BP} = \overline{AQ} + \overline{AC} = \\ &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta\end{aligned}$$

Dividiendo ambas:

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} \\ &= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}\end{aligned}$$

Demostración de las fórmulas de la diferencia.

Las fórmulas de la diferencia de dos ángulos se deducen de las correspondientes de la suma, sin más que cambiar el signo del segundo sumando. Teniendo en cuenta que:

$$\operatorname{sen}(-\beta) = -\operatorname{sen}\beta \qquad \cos(-\beta) = \cos\beta \qquad \tan(-\beta) = -\tan\beta$$

resulta:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= \operatorname{sen}(\alpha+(-\beta)) = \operatorname{sen}\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\operatorname{sen}(-\beta) = \\ &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta\end{aligned}$$

Deduce tú de la misma forma la del coseno y la de la tangente de la diferencia.

Demostración de las fórmulas del ángulo doble.

Si tomamos $\beta = \alpha$ en las fórmulas de las razones de $\alpha+\beta$, obtendremos las correspondientes para el ángulo 2α. Veamos la del coseno:

$$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$

Comprueba las otras dos de la misma forma.

Demostración de las fórmulas del ángulo mitad.

Las fórmulas del seno y coseno del ángulo mitad se deducen de la del coseno del ángulo doble:

$$\cos(2\beta) = \cos^2\beta - \operatorname{sen}^2\beta = 1 - \operatorname{sen}^2\beta - \operatorname{sen}^2\beta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\beta$$

Despejando $\operatorname{sen}\beta$

$$\operatorname{sen}\beta = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(2\beta)}{2}} \xrightarrow{\beta=\frac{\alpha}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

La del coseno se puede deducir de la fórmula fundamental. La de la tangente del ángulo mitad basta dividir la del seno entre la del coseno y simplificar.

Demostración de las fórmulas que transforman sumas en productos.

Deduciremos la primera.

Con las otras tres se procede análogamente. Sumamos las fórmulas de la adición y de la diferencia:

$$\begin{array}{rl} & \operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta \\ + & \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta \\ \hline (*) & \operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 2\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta \end{array}$$

Llamando

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta = A\\ \alpha-\beta = B\end{array}\right\} \rightarrow \alpha = \frac{A+B}{2}\ ,\ \beta = \frac{A-B}{2}$$

y sustituyendo en (*) obtenemos la fórmula.

Ejercicios

1.

a) Pasa a radianes $90°$, $180°$, $270°$ y $360°$.

b) Expresa en grados sexagesimales los siguientes ángulos medidos en radianes: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{3}$.

c) ¿A qué ángulo de la primera circunferencia equivale $1520°$?

d) ¿A qué ángulo positivo equivale $-240°$.

2. Sea α un ángulo agudo con $\operatorname{sen}\alpha = \frac{5}{13}$. Obtén razonadamente su coseno y su tangente.

¿Cuál es su medida en grados, minutos y segundos?

3. En un triángulo rectángulo, uno de sus ángulos agudos mide $40°$, y la hipotenusa mide 8 cm. Obtén las longitudes de sus catetos.

4. En un triángulo rectángulo las medidas de los catetos son 2 cm y 3 cm, respectivamente. Obtén las medidas de sus ángulos agudos.

5. En un triángulo rectángulo con hipotenusa 13 cm, el cateto opuesto al ángulo α mide 12 cm. Calcula sus razones trigonométricas. ¿Cuánto mide α?

6. Del triángulo rectángulo $\triangle ABC$, rectángulo en A, se sabe que $\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{1}{3}$ y $b = 2$ cm.

a) Obtén a y c.

b) Calcula $\tan\hat{B}$ y $\sec\hat{B}$.

c) Calcula $\hat{B}$ y $\hat{C}$.

7. Obtén con la calculadora:

a) La secante de $10°$.

b) La cosecante de $80°$.

c) El ángulo agudo cuya tangente es 1.

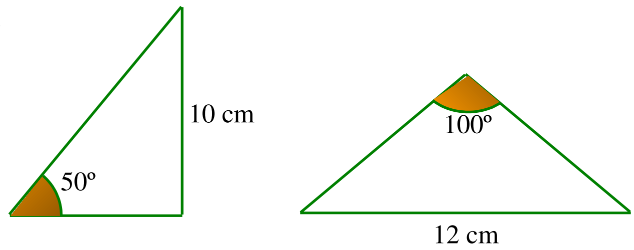
d) El ángulo agudo cuyo coseno es $\frac{1}{2}$.

8. Si α es un ángulo agudo con $\operatorname{sen}\alpha = \frac{7}{25}$, ¿cuáles son sus restantes razones trigonométricas?

9. Ídem si $\tan\alpha = \frac{8}{15}$.

10. Obtén el área y el perímetro de los dos triángulos dibujados , siendo el primero de ellos rectángulo y el segundo isósceles:

11.



Obtén el área y el perímetro de un triángulo isósceles en el que cada uno de los lados iguales mide 5 cm y el ángulo que éstos forman mide $30°$

12. Dibuja un ángulo cuya tangente sea 2. ¿Cuál es el seno y el coseno de dicho ángulo?

13. Sabemos que $90° < \alpha < 180°$ y que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}$. Obtén las restantes razones de α y halla α.

14. Sabemos que $180° < \alpha < 270°$ y $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$.

Obtén las restantes razones de α y halla α.

15. Sabiendo que $270° < \alpha < 360°$ y $\tan\alpha = -1$, obtén las restantes razones de α y la medida de α.

16. Sea α un ángulo comprendido entre $270°$ y $360°$ con $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Obtén razonadamente su seno y su tangente.

¿Cuál es su medida en grados, minutos y segundos?

17. Sea α un ángulo agudo del que sabemos que es

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{4}$$

Sin hallar la medida del ángulo α elabora una tabla con las razones de los ángulos

$$\alpha\ ,\ 180° - \alpha\ ,\ 180° + \alpha\ ,\ 360° - \alpha\ ,\ -\alpha$$

18. Un ángulo agudo a tiene de tangente $\frac{1}{3}$. Sin hallar la medida de ningún ángulo, razona cuáles son las razones trigonométricas siguientes:

$$\operatorname{sen} a\ ,\ \cos(180° - a)\ ,\ \operatorname{sen}(180° + a)\ ,\ \cos(360° - a)$$

19. Partiendo de las razones trigonométricas de $60°$, obtén las de $120°$, $240°$, $300°$, $-60°$.

20. Estudia si son ciertas las siguientes identidades:

a) $\dfrac{\tan\alpha}{\sec\alpha} = \dfrac{1}{\csc\alpha}$

b) $\dfrac{\cot\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{sen}\alpha$

c) $\cot^2\alpha + 1 = \csc^2\alpha$

21. Sea α un ángulo agudo.

a) Siendo $\operatorname{sen}\alpha = t$ expresa $\cos\alpha$ y $\tan\alpha$ en función de t.

b) Siendo $\cos\alpha = t$ expresa $\operatorname{sen}\alpha$ y $\tan\alpha$ en función de t.

c) Siendo $\tan\alpha = t$ expresa $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$ en función de t.

22. Demuestra las siguientes identidades:

a) $\tan a + \cot a = \sec a \cdot \csc a$

b) $(\operatorname{sen} a - \cos a)^2 + (\operatorname{sen} a + \cos a)^2 = 2$

c) $(\csc a + \cot a) \cdot (\csc a - \cot a) = 1$

d) $(\tan a + \cot a) \cdot \operatorname{sen} a \cdot \cos a = 1$

e) $\dfrac{\tan a + \tan b}{\cot a + \cot b} = \tan a \cdot \tan b$

23. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{\sec^2 a - \cos^2 a}{\tan^2 a}$

b) $\dfrac{\csc a}{1 + \cot^2 a}$

c) $\operatorname{sen}^3 a + \operatorname{sen} a \cdot \cos^2 a$

d) $\csc a \cdot \tan a$

24. Sea $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ con $\cos\alpha = -\dfrac{1}{2}$ y $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ con $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{3}{5}$. Obtén

$$\cos(\alpha - \beta)\,,\ \operatorname{sen}(\alpha + \beta)\,,\ \tan(\alpha + \beta)$$

25. Si son α y β verificando $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ con $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$ y $\pi < \beta < \dfrac{3\pi}{2}$ con $\operatorname{sen}\beta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, halla

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta)\,,\ \cos(\alpha + \beta)\,,\ \tan(\alpha - \beta)$$

26. Sea $\alpha \in \mathrm{III}$ con $\tan\alpha = \dfrac{3}{4}$. Obtén

$$\operatorname{sen} 2\alpha\ ,\ \cos 2\alpha\ ,\ \tan 2\alpha$$

27. Sea $\alpha \in \mathrm{II}$ con $\sec\alpha = -2$. Obtén las razones del ángulo mitad con las correspondientes fórmulas.

28. Obtén el valor exacto de las siguientes expresiones, transformando previamente en producto:

a) $\operatorname{sen} 75° + \operatorname{sen} 15°$

b) $\dfrac{\cos 55° - \cos 10°}{\operatorname{sen} 55° + \operatorname{sen} 10°}$

29. Transformar en producto:

a) $1 + \operatorname{sen} a$

b) $\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} 3a + 2\operatorname{sen} 2a$

30. Demuestra las siguientes identidades:

a) $\tan(45° + a) - \tan(45° - a) = 2\tan(2a)$

b) $\cos(x + y) \cdot \cos(x - y) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 y$

c) $\dfrac{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} 5a + 2\operatorname{sen} 3a}{\operatorname{sen} 3a + \operatorname{sen} 7a + 2\operatorname{sen} 5a} = \dfrac{\operatorname{sen} 3a}{\operatorname{sen} 5a}$

31. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\operatorname{sen} x = -1$

b) $\cos 2x = 0$

c) $\operatorname{sen}(2x - 30°) = 0$

d) $\cos(2x + 10°) = 1$

32. Calcula todos los valores de x:

a) $\operatorname{sen}(3x) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

b) $\cos(x - 10°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\cos(2x + 30°) = 0{,}5$

d) $\tan(3x - \dfrac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$

33. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\cos(2x) - \operatorname{sen} x = 0$

b) $2\cos^2 x - 1 = 0$

c) $2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0$

d) $\operatorname{sen}(2x) \cdot \cos x - 3\operatorname{sen}^2 x = 0$

34. Resuelve las siguientes ecuaciones, transformando las sumas en productos:

a) $\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x = 6\operatorname{sen}^2 x$

b) $\operatorname{sen} 7x + \operatorname{sen} 3x = 2\operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} x$

José Álvarez Fajardo

Cuestiones

1. Explica qué es y dibuja un ángulo convexo, cóncavo, agudo y obtuso.

2. Explica qué es y dibuja un par de ángulos complementarios, suplementarios, contiguos, adyacentes y opuestos por el vértice.

3. Explica qué es y dibuja un ángulo central y un ángulo inscrito en una circunferencia.

4. ¿El ángulo que mide –30º es el mismo que el que mide 330º? ¿Es igual el ángulo 370º a 10º?

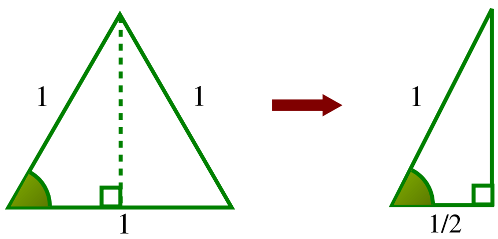
5. Recuerda: la suma de los ángulos de un triángulo es 180°. A partir de esto, averigua el valor de la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero.

6. ¿Existe un triángulo cuyos lados midan 3, 9 y 13 cm. respectivamente?

7. El triángulo cuyos lados miden 2, 5 y 6 centímetros, respectivamente, ¿es rectángulo?

8. A partir de un triángulo rectángulo isósceles, obtén las razones trigonométricas de 45° .

9. A partir del siguiente triángulo rectángulo, obtén las razones trigonométricas de 60° y de 30°



10. Calcula las razones de 0°, 90°, 180°, 270° y 360°.

11. Consideremos un triángulo rectángulo en $\hat{A}$. ¿Son ciertas las siguientes igualdades?

a) $a = \dfrac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}}$ b) $\tan \hat{B} \cdot \tan \hat{C} = 1$

c) $a = c \cdot \cos \hat{B}$ d) $c \cdot \tan \hat{B} = b$

e) $c = \dfrac{b}{\tan \hat{C}}$ f) $\cos \hat{B} \cdot \cos \hat{C} = 1$

g) $\dfrac{b}{a} = \cos \hat{C}$ h) $\dfrac{\operatorname{sen} \hat{C}}{\cos \hat{B}} = 1$

12. En el triángulo rectángulo $\triangle ABC$ deduce que se verifican las siguientes relaciones entre ángulos agudos complementarios:

a) $\operatorname{sen} \hat{C} = \cos \hat{B}$

b) $\cos \hat{C} = \operatorname{sen} \hat{B}$

c) $\cot \hat{C} = \tan \hat{B}$

Deduce cómo están relacionadas las razones trigonométricas de los ángulos complementarios.

13. El coseno de un ángulo agudo es el doble de su seno. ¿Qué ángulo es?

14. Verdadero o falso:

a) El seno de un ángulo puede ser mayor que 1 .

b) El seno de cualquier ángulo es menor que 1 .

15. Verdadero o falso:

a) El seno de un ángulo está comprendido entre -1 y 1 .

b) El coseno de un ángulo es siempre menor que 1 .

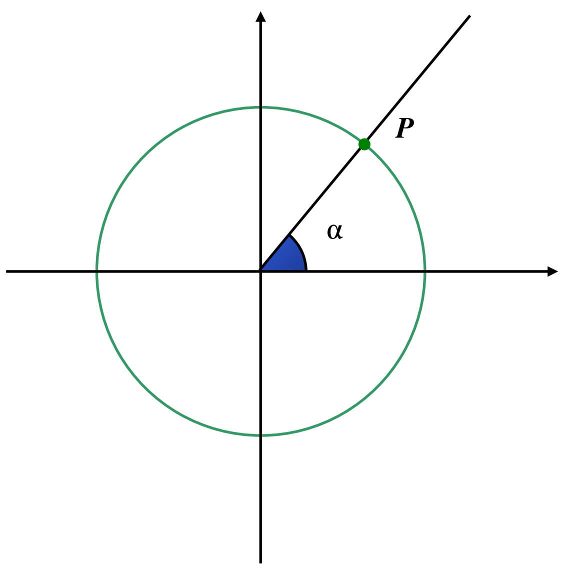
16. ¿Existe algún ángulo α con $\sec \alpha = 0{,}1$?

17. Obtén el ángulo α con $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ que verifica:

a) $\cos \alpha = 0$ b) $\cos \alpha = -1$

c) $\operatorname{sen} \alpha = 1$ d) $\operatorname{sen} \alpha = 0$

18. La circunferencia dibujada a continuación es la llamada circunferencia unidad, pues su radio mide 1:



¿Cuáles son las coordenadas $(x\,,y)$ del punto P ?

19. Comprueba, con contra-ejemplos, que las fórmulas siguientes son todas falsas:

a) $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b$

b) $\dfrac{\operatorname{sen}(2a)}{2} = \operatorname{sen} a$

c) $\cos(2a) = 2\cos a$

d) $\dfrac{\operatorname{sen}(2a)}{2} = \operatorname{sen} \dfrac{a}{2}$

20. Con la calculadora obtenemos $\operatorname{invcos} 0 = 90°$. ¿esto significa que el único ángulo con coseno igual a cero es el ángulo recto?

21. Escribe las fórmulas que relacionan las razones trigonométricas de los ángulos α y $\alpha + n \cdot 360°$.

22. Escribe las fórmulas que relacionan las razones trigonométricas de los ángulos α y $180° - \alpha$.

23. Idem para los ángulos α y $180° + \alpha$.

24. Idem para los ángulos α y $360° - \alpha$.

25. Idem para los ángulos α y $-\alpha$.

26. Verdadero o falso:

a) $\operatorname{sen}(90° + \alpha) = -\cos\alpha$

b) $\cos(270° + \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$

c) $\operatorname{sen}(270° - \alpha) = -\cos\alpha$

27. Si dos ángulos suman 270º, ¿cuál es la relación que hay entre su seno y su coseno?

28. Si dos ángulos se diferencian en 90º, ¿cuál es la relación que hay entre su seno y su coseno?

29. Usando las fórmulas de adición y del ángulo doble expresa $\operatorname{sen}(3x)$ en función del seno de x.

30. Usando las fórmulas de adición y del ángulo doble expresa $\cos(3x)$ en función del coseno de x.

31. Obtén la expresión general de todos los ángulos cuya tangente es 1.

32. Dibuja las gráficas de $y = 3\operatorname{sen}(2x)$ y de $y = 2\cos(4x)$. ¿Cuál es el período de estas funciones? ¿Cuáles son sus valores extremos?

Autoevaluación

1. Sabiendo que $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ y que $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{2}{3}$,

a) Obtén las restantes razones trigonométricas del ángulo α .

b) Calcula

$\cos(180^\circ - \alpha)$, $\operatorname{sen}(180^\circ + \alpha)$ y $\tan(360^\circ - \alpha)$

c) Obtén su medida en grados, minutos y segundos.

2.

a) Demuestra la identidad:

$$\tan a + \cot a = \cot a \cdot \sec^2 a$$

b) Si α es un ángulo agudo con $\cot\alpha = t$, expresa en función de t las razones $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$.

3. Sea α un ángulo agudo con $\tan\alpha = \dfrac{4}{3}$. Deduce razonadamente el valor de

$$\cos(\pi - \alpha)\,,\ \operatorname{sen}(\pi + \alpha)\,,\ \tan(2\pi - \alpha)$$

4. Sea a un ángulo con $\dfrac{\pi}{2} < a < \pi$ tal que

$$\cos\frac{a}{2} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Calcula usando las fórmulas adecuadas:

a) $\operatorname{sen} a$ y $\cos a$

b) $\operatorname{sen} 2a$

c) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{3\pi}{2} - a\right)$

5. Demuestra la siguiente identidad:

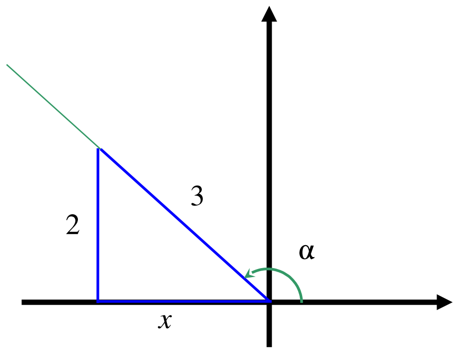
$$1 - \tan^2\left(\frac{a}{2}\right) = \cos a \cdot \sec^2\left(\frac{a}{2}\right)$$

6. Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica:

$$\cos 2x = 1 + 4\operatorname{sen} x$$

Autoevaluación

1. Dibujemos el ángulo α:



Por el Teorema de Pitágoras podemos hallar x:

$$x^2 + 2^2 = 5^2 \to x = -\sqrt{5}$$

De aquí:

$$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3} \text{ y } \tan\alpha = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Con la calculadora obtenemos:

$$\operatorname{arcsen}\frac{2}{3} \approx 41^\circ 48' 37''$$

Ésta es la medida del suplementario de α. Así:

$$\alpha = 180^\circ - \operatorname{arcsen}\left(\frac{2}{3}\right) \to \alpha \approx 138^\circ 11' 23''$$

2.

a) Vamos a desarrollar ambos miembros para comprobar la igualdad:

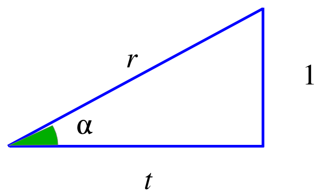
$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} + \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a}{\operatorname{sen} a \cdot \cos a} \\ &= \frac{1}{\operatorname{sen} a \cdot \cos a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{II} &= \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a} \cdot \frac{1}{\cos^2 a} = \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a \cdot \cos^2 a} \\ &= \frac{1}{\operatorname{sen} a \cdot \cos a} \end{aligned}$$

b) Se tiene

$$\cot\alpha = \frac{x}{y}$$

Así, el ángulo es el dibujado a continuación:



Calculamos por el teorema de Pitágoras:

$$r^2 = 1^2 + t^2 \to r = \sqrt{1+t^2}$$

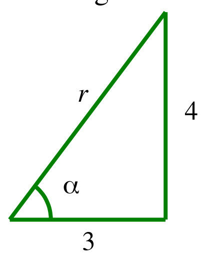
Así:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \ , \ \cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

3.

Dibujemos el ángulo:

Por Pitágoras:



$$r^2 = 9 + 16 \to r = 5$$

Luego tenemos:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{5} \ , \ \cos\alpha = \frac{3}{5}$$

Ahora a partir de las construcciones geométricas adecuadas se obtiene:

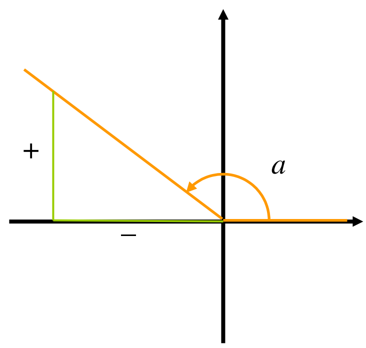
$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha \to \cos(180^\circ - \alpha) = -\frac{3}{5}$$

$$\operatorname{sen}(180^\circ + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha \to \operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) = -\frac{4}{5}$$

$$\tan(360^\circ - \alpha) = -\tan\alpha \to \tan(360^\circ - \alpha) = -\frac{4}{3}$$

4. El ángulo a es el dibujado a continuación:

Obtengamos el seno y el coseno de a :



$$\cos\frac{a}{2}=\frac{1}{\sqrt{10}}\rightarrow\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

Elevando al cuadrado y resolviendo:

$$\frac{1+\cos a}{2}=\frac{1}{10}\xrightarrow{despejo}\cos a=-\frac{4}{5}$$

Por la fórmula fundamental obtenemos que

$$\operatorname{sen} a=\frac{3}{5}$$

Ahora calculamos, por la fórmula del ángulo doble:

$$\operatorname{sen}(2a)=2\operatorname{sen} a\cos a=2\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{24}{25}$$

Aplicamos la fórmula de adición:

$$\operatorname{sen}\left(270^\circ-a\right)=\operatorname{sen}270^\circ\cos a-\cos 270^\circ\operatorname{sen} a=$$
$$=(-1)\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)-0\cdot\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{4}{5}$$

5. Veamos que los dos miembros son idénticos:

$$\mathrm{I}=1-\frac{1-\cos a}{1+\cos a}=\frac{2\cos a}{1+\cos a}$$

$$\mathrm{II}=\cos a\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{a}{2}}=\cos a\cdot\frac{2}{1+\cos a}=\frac{2\cos a}{1+\cos a}$$

6. Resolvamos

$$\cos(2x)=1+4\operatorname{sen} x$$

Por la fórmula del ángulo doble:

$$\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x=1+4\operatorname{sen} x$$

De la fórmula fundamental, despejando el coseno al cuadrado, dejaremos sólo el seno:

$$1-\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen}^2 x=1+4\operatorname{sen} x$$

Pasando a un miembro y simplificando:

$$\operatorname{sen}^2 x+2\operatorname{sen} x=0$$

Sacando factor común:

$$\operatorname{sen} x\cdot(\operatorname{sen} x+2)=0$$

Igualando a cero el primer factor:

$$\operatorname{sen} x=0\rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=0^\circ+n\cdot 360^\circ\\ x=180^\circ+n\cdot 360^\circ\end{array}\right.$$

Igualando a cero el segundo factor:

$$\operatorname{sen} x+2=0\rightarrow\operatorname{sen} x=-2\rightarrow\ \text{NO}$$