# TEMA 2

## ÁLGEBRA

### Contenidos

1. Identidades y ecuaciones.
2. Gráficas y Ecuaciones.
3. Ecuaciones de 2º grado.
4. Ecuaciones polinómicas.
5. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas.
6. Ecuaciones de varias incógnitas.
7. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas.
8. Sistemas de ecuaciones.
9. Inecuaciones.
10. Anexo: factorización de polinomios.

### Tiempo estimado

16 sesiones

### Criterios de Evaluación

1. Comprende qué es una ecuación y diferenciarla de una identidad.
2. Resuelve ecuaciones y sistemas de ecuaciones estudiados aplicando los métodos adecuados.
3. Comprende qué es una inecuación y sabe resolverla realizando estudios de signo.
4. Es capaz de interpretar geométricamente la solución de una ecuación o de una inecuación.
5. Ha adquirido soltura en resolver problemas que sean reducibles a ecuaciones o sistemas de ecuaciones.

# 1.Identidades y ecuaciones.

## Ecuaciones.

Una ecuación es una igualdad entre dos entre dos expresiones algebraicas, de forma que sólo para ciertos valores numéricos que tomen las letras las expresiones coinciden. Dichas letras se denominan incógnitas.

Obtener todos esos valores numéricos de las incógnitas se llama resolver la ecuación. A esos valores se les llama soluciones de la ecuación.

☞ Ejemplo: es claro que la igualdad

$$3x + 1 = x + 3$$

es una ecuación, y es muy fácil resolverla:

$$3x + 1 = x + 3 \to 3x - x = 3 - 1 \to 2x = 2 \to x = 1$$

Tenemos que la solución es $x = 1$. Sólo si sustituimos $x$ por dicho valor la ecuación se transforma en una igualdad numérica cierta.

Comprueba que en la ecuación

$$\sqrt{x} + 2 = x$$

- $x = 4$ es solución,
- $x = 1$ no es solución.

## Ecuaciones equivalentes.

Cuando vamos a resolver una ecuación, intentamos reducir su resolución al de otra más sencilla que tenga las mismas soluciones:

Dos ecuaciones se dice que son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones.

Las reglas para obtener ecuaciones equivalentes a una dada son:

Si a los dos miembros de una ecuación sumamos o restamos una misma expresión algebraica, se obtiene una ecuación equivalente.

Si multiplicamos o dividimos los dos miembros de una ecuación por una expresión algebraica que nunca se anula obtenemos una ecuación equivalente.

Si tomamos la ecuación

$$x = 1$$

y elevamos los dos miembros al cuadrado:

$$x^2 = 1$$

obtenemos una ecuación que no es equivalente a la primera. ¡Compruébalo!

☞ Ejemplo: resolvamos la ecuación de primer grado

$$4(x+5) - 7 = 3(x+2) - x + 1$$

1) quitamos paréntesis y simplificamos: $4x + 13 = 2x + 7$

2) trasponemos términos: $4x - 2x = 7 - 13$

3) reducimos: $2x = -6$

4) despejamos la incógnita: $x = -\dfrac{6}{2}$

5) simplificando obtenemos la solución: $x = -3$

Tenemos que la ecuación tiene una única solución, que es el número $-3$.

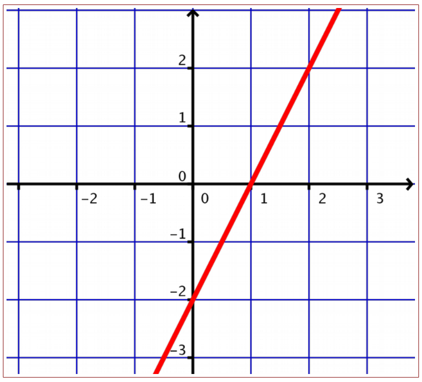
# 2.Ecuaciones y Gráficas.

## Recta y ecuación de primer grado.

Vamos a representar la gráfica cuya fórmula es $y = 2x - 2$.

Debemos saber que obtendremos una recta con pendiente positiva. Sólo tenemos que formar una tabla de valores y representar en unos ejes de coordenadas las parejas obtenidas:

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| – 2 | – 6 |
| – 1 | – 4 |
| 0 | – 2 |
| 1 | 0 |
| 2 | 2 |
| 3 | 4 |



Como vemos, la gráfica corta al eje **X** para $x = 1$.

Pensemos ahora en la ecuación $2x - 2 = 0$. ¿Cuál es su solución? Podemos verlo en la tabla de valores y en la gráfica: es precisamente $x = 1$.

Al representar la gráfica de

$y = m\,x + n$

obtenemos una recta.

El coeficiente m se denomina pendiente de la recta.

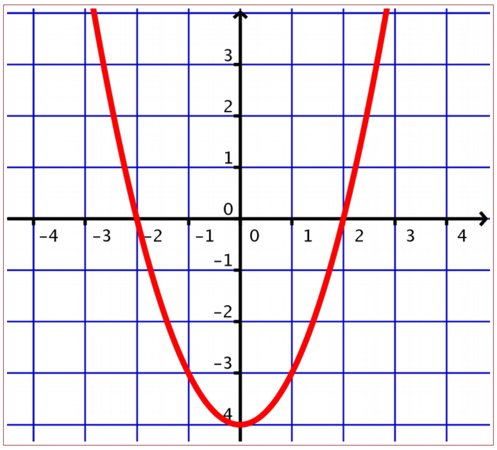
- Si m > 0, la recta es creciente.
- Si m < 0, la recta es decreciente.

## Parábola y ecuación de segundo grado.

Representemos la función $y = x^2 - 4$.

Sabemos que obtendremos una parábola. Formemos una tabla de valores y representemos a partir de ella la curva:

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| – 3 | 5 |
| – 2 | 0 |
| – 1 | – 3 |
| 0 | – 4 |
| 1 | – 3 |
| 2 | 0 |
| 3 | 5 |



Como vemos, corta al eje **X** para $x = -2\,, x = 2$.

Pensemos ahora en la ecuación $x^2 - 4 = 0$. Tiene dos soluciones, tal y como vemos en la tabla y en la gráfica: precisamente $x = -2\,, x = 2$.

Recordemos que al representar la gráfica de la función

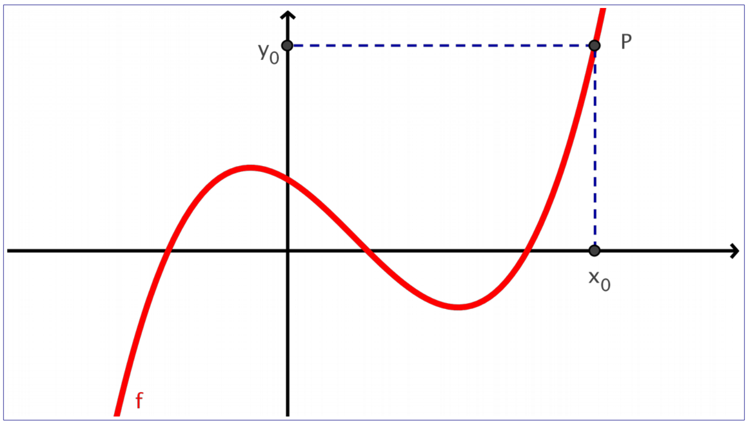
$y = a\,x^2 + b\,x + c$

obtenemos una parábola de eje vertical, cuyo vértice se encuentra para

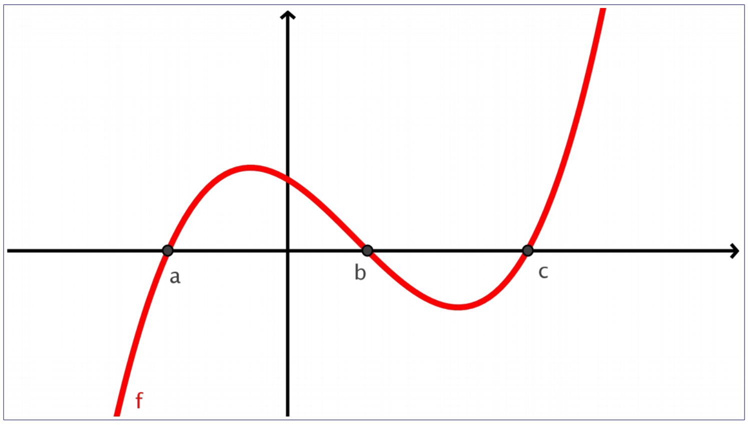
$$x_V = \frac{-b}{2a}$$

## ❑ Gráfica de una función y ecuación asociada.

En general, la gráfica de la ecuación $y = f(x)$ está formada por todos los puntos $(x_0\,, y_0)$ en los que $y_0$ es el valor obtenido al sustituir $x = x_0$ en la fórmula:




Observemos que esa gráfica corta al eje de abscisas o eje $\mathbf{X}$ en tres puntos distintos. Si los puntos de corte tienen abscisas $a\,, b\,, c$ , respectivamente, la gráfica quedaría representada así:




La ordenada de esos puntos es cero, así : $f(a) = f(b) = f(c) = 0$.

Deducimos así:

Las abscisas de los puntos de corte de la gráfica de la función

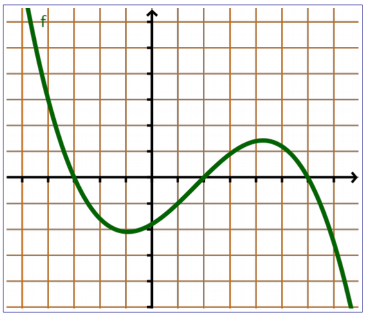
$$y = f(x)$$

con el eje $\boldsymbol{X}$ son las soluciones de la ecuación

$$f(x) = 0$$

☞ Ejemplo: Resolvamos la ecuación $f(x) = 0$ sabiendo que la gráfica dibujada en el margen es $y = f(x)$.

Basta observar los cortes de la gráfica con el eje $\mathbf{X}$. Las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$ son $x = -3\,, x = 2\,, x = 6$.



# 3. Ecuación de segundo grado.

## ❑ La ecuación de 2º grado.

Una ecuación de 2º grado es la que puede reducirse, tras aplicarle las reglas que la transforman en otra equivalente, a una de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde $a$, $b$ y $c$ son números reales con $a \neq 0$. Recordemos:

En la ecuación de 2º grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

la solución, si existe, viene dada por la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

concretamente hay:

- $b^2 - 4ac < 0 \;\rightarrow\;$ 0 soluciones reales
- $b^2 - 4ac = 0 \;\rightarrow\;$ 1 solución
- $b^2 - 4ac > 0 \;\rightarrow\;$ 2 soluciones

Las ecuaciones de segundo grado las hemos estudiado en cursos anteriores y sabemos que pueden tener dos soluciones, una única solución o no tener ninguna.

También conocemos la fórmula que permite su resolución y hemos estudiado casos particulares en los que dicha fórmula no es necesaria.

☞ Ejemplo: resolvamos la ecuación $x^2 + 2x + 5 = 0$.

$$x^2 + 2x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} \rightarrow \text{NO}$$

La ecuación $x^2+2x+5=0$ no tiene solución.

☞ Ejemplo: resolvamos la ecuación $x^2 - 2x + 1 = 0$.

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} \rightarrow \left| \begin{array}{l} x = 1 \\ x = 1 \end{array} \right.$$

La ecuación $x^2-2x+1=0$ no tiene una solución *doble*.

☞ Ejemplo: resolvamos la ecuación $6x - \dfrac{1}{x} = 1$.

$$6x - \frac{1}{x} = 1 \rightarrow 6x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm 5}{12} \rightarrow \left| \begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{3} \\ x = +\dfrac{1}{2} \end{array} \right.$$

La ecuación $6x^2-x-1=0$ tiene dos soluciones distintas .

☞ Ejemplo: resolvamos la ecuación $2x^2 - 5 = 3$.

$$2x^2 - 5 = 3 \rightarrow 2x^2 = 8 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

☞ Ejemplo: resolvamos la ecuación $(x+2)(x-3) = 0$.

$$(x+2)(x-3) = 0 \rightarrow \left| \begin{array}{l} x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \\ x - 3 = 0 \rightarrow x = +3 \end{array} \right.$$

Es muy fácil resolver una ecuación de 2º grado factorizada. Por ejemplo, en la ecuación

$$(x - a) \cdot (x + b) = 0$$

es evidente que las soluciones son

$$x = a \;,\; x = -b$$

☞ Ejemplo: resolvamos la ecuación $2x^2 - 3x = 0$.

$$2x^2 - 3x = 0 \rightarrow x(2x - 3) = 0 \rightarrow \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{3}{2} \end{array} \right.$$

## Ecuaciones bicuadradas.

Recordemos como resolver una ecuación bicuadrada ($x^4 - 4x^2 + 3 = 0$) mediante un cambio de variable adecuado:

$$x^4 - 4x^2 + 3 = 0 \xrightarrow{x^2 = t} t^2 - 4t + 3 = 0 \rightarrow \left| \begin{array}{l} t = 1 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1 \\ t = 3 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} \end{array} \right.$$

Observemos que la ecuación tiene cuatro soluciones.

Las ecuaciones de la forma

$a\,x^{2m} + b\,x^m + c = 0$

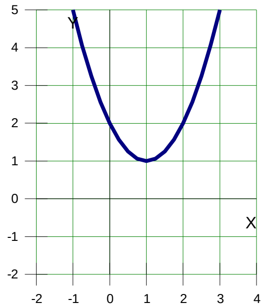
se resuelven fácilmente a través de la de 2º grado, pues es:

$$x^m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

## Resolución gráfica.

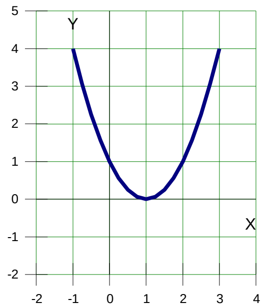
Como ya vimos, las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ vienen dados por los puntos de corte de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ con el eje X.

$y = x^2 - 2x + 2$



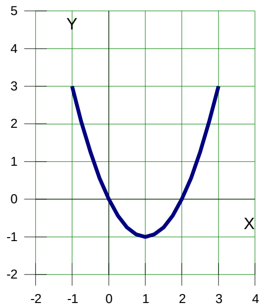
$x^2 - 2x + 2 = 0$
No tiene solución

$y = x^2 - 2x + 1$



$x^2 - 2x + 1 = 0$
Tiene 1 solución:
$x = 1$

$y = x^2 - 2x$



$x^2 - 2x = 0$
Tiene 2 soluciones:
$x = 0$ , $x = 2$

Aquí vemos algunos ejemplos que ilustran de modo gráfico por qué una ecuación de segundo grado puede tener 0, 1 ó 2 soluciones.

## Ecuaciones radicales.

Resolvamos algebraicamente este problema: "Si al triple de un número le restamos la raíz de su doble obtenemos 4. ¿Cuál es dicho número?"

Sea $x$ ese número. Así, su triple será $3x$ y la raíz de su doble $\sqrt{2x}$:

Ecuación: $\underbrace{3x - \sqrt{2x}}_{\text{su triple menos la raíz de su doble}} \underbrace{=}_{\text{es}} \underbrace{4}_{\text{cuatro}}$

Aislamos la raíz: $3x - 4 = \sqrt{2x}$

Al cuadrado: $(3x-4)^2 = \left(\sqrt{2x}\right)^2 \rightarrow 9x^2 + 16 - 24x = 2x$

Resolvemos: $9x^2 - 26x + 16 = 0 \rightarrow \left| \begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{8}{9} \end{array} \right.$

Comprobamos:

$x = 2 \rightarrow 6 - \sqrt{4} = 4 \rightarrow 6 - 2 = 4 \rightarrow \text{SI}$

$x = \dfrac{8}{9} \rightarrow 3 \cdot \dfrac{8}{9} - \sqrt{2 \cdot \dfrac{8}{9}} = 4 \rightarrow \dfrac{8}{3} - \dfrac{4}{3} = 4 \rightarrow \text{NO}$

El número buscado es el 2.

# 4. Ecuaciones polinómicas.

Si $p$ es un polinomio, se dice que la ecuación $p(x) = 0$ es polinómica. No existe una “fórmula” que permita resolver todas las ecuaciones polinómicas. Una forma de intentar resolver las ecuaciones de grado superior a dos es factorizar, al menos parcialmente, el polinomio. Recordemos que el problema de la factorización de un polinomio está íntimamente relacionado con el de hallar sus ceros o raíces. Veamos algunos ejemplos:

Las ecuaciones de primer grado, las de 2º grado o las bicuadradas también son polinómicas.

☞ Ejemplo: resolvamos la ecuación de quinto grado

$$(x-2)^3 \cdot \left(x-\sqrt{5}\right)^2 = 0$$

El producto es cero cuando lo es alguno de sus cinco factores:

$$(x-2)^3 \cdot \left(x-\sqrt{5}\right)^2 = 0 \rightarrow \left| \begin{array}{l} x = 2 \text{ (triple)} \\ x = \sqrt{5} \text{ (doble)} \end{array} \right.$$

☞ Ejemplo: veamos cómo resolver la ecuación de cuarto grado factorizada:

$$(x-1)^2 \cdot (x+1) \cdot (x-3) = 0 \rightarrow \left| \begin{array}{l} x = 1 \text{ (doble)} \\ x = -1 \\ x = 3 \end{array} \right.$$

☞ Ejemplo: resolvamos la ecuación cúbica

$$x^3 - 4x = 0$$

En este caso es muy fácil factorizar el polinomio:

$$x^3 - 4x \overset{[a]}{=} x \cdot \left(x^2 - 4\right) \overset{[b]}{=} x \cdot (x+2) \cdot (x-2)$$

(a) Extraemos factor común x

(b) La diferencia de cuadrados es suma por diferencia: $x^2 - 2^2 = (x+2)(x-2)$

Así:

$$x^3 - 4x = 0 \rightarrow x \cdot (x+2) \cdot (x-2) = 0 \rightarrow \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{array} \right.$$

☞ Ejemplo: resolvamos la ecuación cúbica

$$6x^3 - 5x^2 - 3x + 2 = 0$$

Es fácil comprobar que $x = 1$ es solución, así que $(x-1)$ es un factor o divisor. Dividiendo entre $(x-1)$ podemos factorizar parcialmente:

$$6x^3 - 5x^2 - 3x + 2 = (x-1)\left(6x^2 + x - 2\right)$$

¿No recuerdas cómo factorizar un polinomio? En el apéndice que encuentras al final puedes repasarlo

Así:

$$(x-1)\left(6x^2+x-2\right) = 0 \rightarrow \left| \begin{array}{l} x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \\ 6x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow \left| \begin{array}{l} x = +\dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{2}{3} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Observemos que el polinomio factorizado sería

$$6x^3 - 5x^2 - 3x + 2 = 6(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right)$$

# 5.Ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

## Ecuaciones exponenciales.

Son aquellas en las que la incógnita aparece en un exponente.

Para resolverlas se pretenderá simplificar esa ecuación, si es preciso mediante cambio de variable, hasta que podamos obtener la incógnita directamente o despejando el exponente mediante logaritmos.

☞ Ejemplo: resolvamos la ecuación exponencial siguiente

$$2^x + 2^{1-x} = 3$$

Cociente de potencias: $2^x + \frac{2}{2^x} = 3$

Cambiamos la variable ($2^x = t$): $t + \frac{2}{t} = 3$

Quitamos denominadores: $t^2 + 2 = 3\,t$

Trasponemos: $t^2 - 3\,t + 2 = 0$

Hallamos el valor de $t$: $t = \frac{3 \pm 1}{2} \rightarrow \left| \begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array} \right.$

Deshacemos el cambio: $\left| \begin{array}{l} 2^x = 1 \rightarrow x = 0 \\ 2^x = 2 \rightarrow x = 1 \end{array} \right.$

## Ecuaciones logarítmicas.

Las ecuaciones en las que la incógnita aparece ligada a logaritmos se intentan resolver normalmente siguiendo este camino:

- agrupar los logaritmos en uno o en ambos miembros aplicando las propiedades algebraicas.
- igualar argumentos o aplicar la definición de logaritmo para llegar a una ecuación algebraica más o menos sencilla.

☞ Ejemplo: resolvamos la ecuación $\log_{10}(x+3) + \log_{10} x = 1$

Log. de un producto: $\log_{10}[x\,(x+3)] = 1$

Operamos $\log_{10}\left(x^2 + 3x\right) = 1$

Definición de logaritmo: $x^2 + 3x = 10^1$

Trasponemos: $x^2 + 3x - 10 = 0$

Hallamos el valor de $x$: $x = \frac{3 \pm 7}{2} \rightarrow \left| \begin{array}{l} x = -5 \\ x = +2 \end{array} \right.$

Comprobamos: $\left| \begin{array}{l} x = -5 \rightarrow \log_2(-2) + \log_2(-2) = 1 \rightarrow \text{ no} \\ x = +2 \rightarrow \log_2 5 + \log_2 2 = 1 \rightarrow \text{ si} \end{array} \right.$

Comprobaremos siempre las aparentes soluciones, pues podemos encontrarnos que no todas sean verdaderas soluciones de la ecuación original.

Sólo hay una solución, que es $x = 2$ .

# 6.Ecuaciones con varias incógnitas.

## Ecuaciones con varias incógnitas.

Consideremos el siguiente problema: “obtengamos dos números reales sabiendo que suman 5”. Dar una solución es sencillo: la pareja de números $(4\,,1)$ cumple la condición, por ejemplo.

Importante: una solución no es un número, sino una pareja de números. Hay infinitas soluciones:

(1, 4) , (-2 , 7) , (1.5 , 3.5) , ...

Para intentar encontrar la solución general, llamemos $x$ e $y$ a esos números. Tenemos así:

$$x+y=5\rightarrow y=5-x$$

Ahora si damos valores a la incógnita $x$ vamos obteniendo y:

$$\begin{array}{lll}
\text{Si } x=1 \;\rightarrow\; y=4 & \big|\ \text{Una solución es } \big\rangle & (x\,,y)=(1\,,4) \\
\text{Si } x=5 \;\rightarrow\; y=0 & \big|\ \text{Una solución es } \big\rangle & (x\,,y)=(5\,,0) \\
\quad\dots & \quad\dots & \quad\dots \\
\text{Si } x=t \;\rightarrow\; y=5-t & \big|\ \text{Una solución es } \big\rangle & (x\,,y)=(t\,,5-t)
\end{array}$$

La solución general es, pues:

$S=\{(t,5-t)\ :\ t\in\mathbb{R}\}$

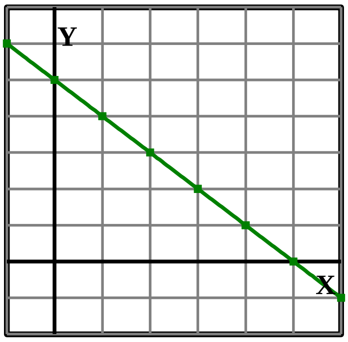
Intentemos ahora expresar algebraicamente esta condición: “la suma de un número con el cuadrado del otro es igual a cuatro.”

Si llamamos $x$ e $y$ a esos números obtenemos:

$$y+x^2=4\;\rightarrow\;y=4-x^2$$

## Interpretación geométrica.

Hemos visto que la ecuación $x+y=5$ tiene infinitas soluciones, y que cada una de las soluciones es un par $(x\,,y)$ de números que cumple $y=5-x$ .



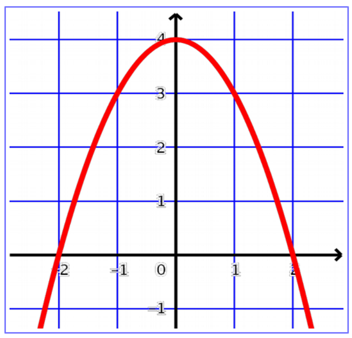

Podemos representar cada pareja solución en unos ejes de coordenadas:

| $x$ | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=5-x$ | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | –1 |

Obtenemos una recta, en la que las coordenadas de cada punto son una solución de la ecuación $x+y=5$.

> Una ecuación lineal de dos incógnitas puede interpretarse en el plano como una recta, donde los puntos de la recta son las soluciones de dicha ecuación.

Sin embargo, la ecuación con dos incógnitas $y=-x^2+4$ no es lineal. Si representamos en un plano cartesiano sus infinitas soluciones no obtenemos una línea recta. ¿Qué gráfica obtenemos?




> Una ecuación cuadrática $y=ax^2+bx+c$ puede interpretarse en el plano como una curva denominada parábola

En general:

> Una ecuación con dos incógnitas $F(x\,,y)=0$ puede interpretarse en el plano como una línea en la que cada punto es una solución de la ecuación.

# 7.Sistemas de ecuaciones.

## Sistemas de ecuaciones lineales.

Consideremos ahora el siguiente problema: "Obtén dos números reales, sabiendo que su suma es 5 y que su diferencia es 1".

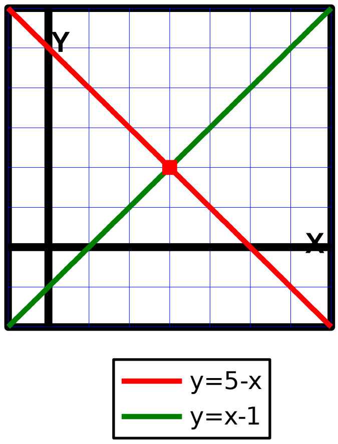
Si llamamos $x$ al primer número e $y$ al segundo, tienen que verificarse, a la vez, las dos condiciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{lcl}\text{Su suma es } 5 & \rightarrow & x+y=5 \\ \text{Su diferencia es } 1 & \rightarrow & x-y=1\end{array}\right\}$$

Repasa en tus apuntes de cursos anteriores los métodos elementales de resolución de sistemas de ecuaciones: sustitución, igualación y reducción.

Ahí tenemos un sistema de ecuaciones: es la consideración simultánea de las dos igualdades.

La solución del sistema es un par de números que debe cumplir las dos ecuaciones. Por ejemplo, el par $(x\,,y)=(5\,,0)$ no es solución del sistema, siendo sólo solución de la primera ecuación. Es fácil observar que la única solución es $(x\,,y)=(3\,,2)$.




## Interpretación geométrica de un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Consideremos el sistema anterior.

Sabemos que cada ecuación se representa como una recta. Así:

cada punto $(x\,,y)$ de la recta $y=5-x$ verifica la 1ª ecuación.

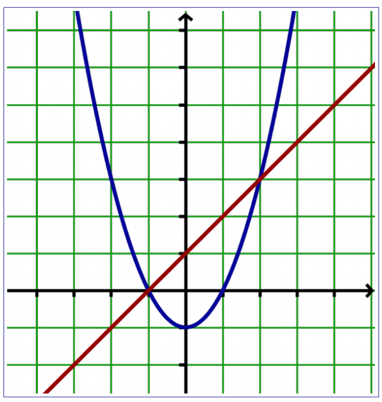
cada punto $(x\,,y)$ de la recta $y=x-1$ verifica la 2ª ecuación.

¿Cuál será la solución del sistema? Ha de ser un punto de las dos rectas para que sea solución de las dos ecuaciones: es el punto de intersección.

## Un sistema no lineal.

Consideremos ahora el sistema

$$\left\{\begin{array}{r} x-y+1=0 \\ x^2-y=0\end{array}\right.$$



¿Qué interpretación geométrica tendrá? Observamos que la primera de sus ecuaciones se representará como una recta, y la segunda de ellas como una parábola. Así, las soluciones vendrán dadas como los puntos en que se cortan la recta y la parábola.

En el margen vemos representadas ambas y, como vemos en la gráfica, el sistema tendrá dos soluciones:

$$(x\,,y)=(-1\,,0) \quad , \quad (x\,,y)=(2\,,3)$$

Algebraicamente, podemos obtenerlas por igualación, despejando la incógnita y en ambas y resolviendo la ecuación que resulta.

# 8.Inecuaciones.

## Inecuaciones con una incógnita.

Una inecuación con una incógnita es una desigualdad de la forma

$$f(x) < 0\,,\, f(x) > 0\,,\, f(x) \leq 0\,,\, f(x) \geq 0$$

donde $f(x)$ es una expresión algebraica en la que la única variable es $x$ .

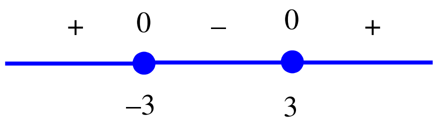
Resolver la inecuación es obtener todos los valores reales tales que al sustituir $x$ por dichos números se verifique la desigualdad.

En general, la resolución de cualquier inecuación se reduce al estudio del signo que tenga $f(x)$, según los valores de $x$.

☞ Ejemplo: resolvamos la inecuación $x^2 - 9 \leq 0$.

Ceros: $x^2 - 9 = 0 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$

Esquema del signos de $x^2 - 9$:



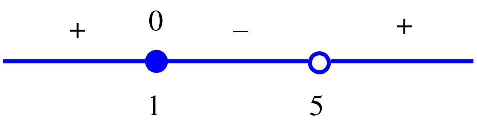

El polinomio es negativo o cero para $x$ entre $-3$ y $3$ , ambos incluidos:

$$S = [-3\,,3]$$

☞ Ejemplo: resolvamos la inecuación $\dfrac{x-1}{x-5} \geq 0$.

- Veamos cuándo es cero el numerador: $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$
- Veamos cuándo lo es el denominador: $x - 5 = 0 \rightarrow x = 5$

Esquema de signos:




La fracción es positiva o cero para $x$ menor o igual que 1 o mayor que 5:

$$S = (-\infty\,,1] \cup (5\,,+\infty]$$

☞ Ejemplo: resolvamos la inecuación $2x - 6 > 4$.

En este caso tan elemental podemos prescindir del estudio de signo y despejar directamente:

$$2x - 6 > 4 \;\rightarrow\; 2x > 10 \;\rightarrow\; x > 5$$

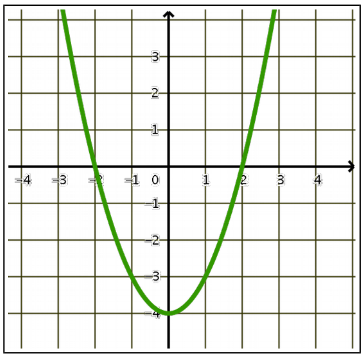
Así que $x$ debe estar en el intervalo

$$S = (5\,,+\infty)$$

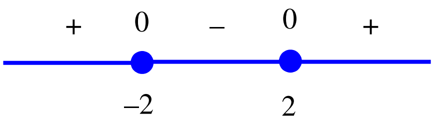
## ❑ Interpretación gráfica de una inecuación.

Dada la gráfica de una función, es fácil realizar su estudio de signo. Y a partir de éste podremos dar respuesta a inecuaciones referentes a dicha función. Veremos a continuación un par de gráficas de funciones y los correspondientes estudios de signo.

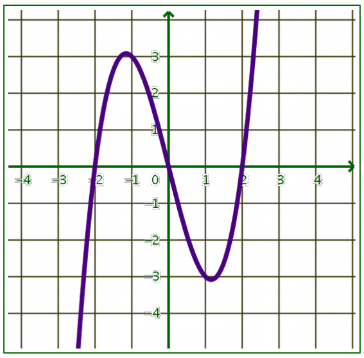
A1. Aquí la función de segundo grado $y = x^2 - 4$:



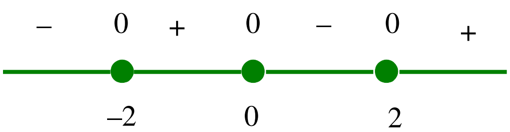
A2. El signo de $x^2 - 4$ viene dado en el esquema siguiente:




B.1 Aquí una función de tercer grado $y = x^3 - 4x$:



B.2 El signo de $x^3 - 4x$ viene dado en el esquema siguiente:




Como vemos, conociendo la gráfica de $y = f(x)$ es fácil hacer el estudio del signo de $f(x)$: basta identificar en qué intervalos del eje **X** la curva está por encima del eje ($y > 0$), y en qué intervalos del eje **X** la curva está por debajo del eje ($y < 0$).

# 9. Anexo: factorización de polinomios.

## ❑ Divisores y ceros.

Hay una estrecha relación entre los divisores (o factores) de un polinomio de primer grado y sus ceros (o raíces). Así, por ejemplo, consideremos el polinomio

$$x^2 - 25 = (x+5)\cdot(x-5)$$

Es claro que sus divisores son $(x+5)$ y $(x-5)$, y que si igualamos a cero obtenemos $x=-5$ y $x=5$.

En general, tenemos:

> Dado cualquier polinomio $p(x)$, equivalen:
>
> a) El número $x=a$ es un cero del polinomio $p(x)$.
>
> b) El polinomio $(x-a)$ es un divisor de $p(x)$.

> Observemos que dado un polinomio p(x) :
> - los ceros son las soluciones de la ecuación p(x) = 0 .
> - si no tiene ceros no puede tener divisores de la forma x – a .

☞ Ejemplo: averigüemos, sin efectuar ninguna división, si $p(x) = x^5 + x^2 + 2$ es divisible entre $x+2$.

Calculamos

$$p(-2) = (-2)^5 + (-2)^2 + 2 = -14 \neq 0$$

Como $x=-2$ no es un cero tenemos que $(x+2)$ no es un divisor.

## ❑ Factorización de un polinomio.

Al igual que ocurre con los números, factorizar un polinomio es expresarlo como producto de otros de menor grado que él. Por ejemplo, aquí tenemos factorizado $x^2-3x$:

$$x^2 - 3x = x\cdot(x-3)$$

Y al igual que sucede con los números, hay algunos polinomios que no pueden expresarse como producto de otros de menor grado: son los llamados polinomios irreducibles o primos.

☞ Ejemplo: Observemos que el polinomio $x-2$ es un polinomio primo pues no puede descomponerse como producto de otros dos con menor grado.

☞ Ejemplo: factoricemos el polinomio $x^2+4$.

Es fácil observar que este polinomio no tiene ceros: $x^2+4=0$ no tiene solución. Por tanto el polinomio no tiene ningún divisor de primer grado.

Concluimos que el polinomio es primo.

> Observemos que todo polinomio p(x) de 2º grado en el que la ecuación
>
> p(x) = 0
>
> no tenga solución es un polinomio primo, ya que no puede tener ningún divisor de primer grado.

En general:

> Los únicos polinomios primos son los de primer grado y los de segundo grado sin ceros reales.

☞ Ejemplo: factoricemos el polinomio $2x^2+5x-3$ .

Busquemos sus ceros:

$$2x^2+5x-3=0 \to x=\frac{-5\pm\sqrt{49}}{4} \to \left| \begin{array}{l} x=-3 \\ x=+\dfrac{1}{2} \end{array} \right.$$

Así tenemos que $x+3$ y $x-\frac{1}{2}$ son sus divisores primos. Luego:

$$2x^2+5x-3=2\,(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

☞ Ejemplo: factoricemos el polinomio $p\,(x)=x^3-1$.

Si p(x) es un polinomio entero, sus ceros enteros son divisores del término independiente (si existen, claro).

Busquemos un cero del polinomio. Es fácil observar que $x=1$ es un cero del polinomio:

$$p\,(1)=1^3-1=0$$

Así, el polinomio $x-1$ es un divisor.

Efectuando la división $\left(x^3-1\right):(x-1)$ obtenemos $x^2+x+1$ de cociente. Así:

$$\begin{array}{r|l} x^3-1 & (x-1) \\ x^2+x+1 & \\ & \end{array}$$

Para proseguir hemos de intentar factorizar $x^2+x+1$. Buscamos sus ceros a través de la ecuación:

$$x^2+x+1=0 \to x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} \to \text{ No hay solución real}$$

Éste es un polinomio primo.

Concluimos que $p\,(x)=x^3-1$ totalmente factorizado es:

$$\begin{array}{c|c} x^3-1 & (x-1) \\ x^2+x+1 & \left(x^2+x+1\right) \\ 1 & \end{array} \implies x^3-1=(x-1)\left(x^2+x+1\right)$$

Recordemos lo básico:

- Factorizar un polinomio es expresarlo como producto de polinomios primos.
- El número $x=a$ es un cero o raíz sólo si $x-a$ es un divisor o factor.
- Un polinomio primo o irreducible es aquél que no es producto de otros polinomios de menor grado que él.
- Los únicos polinomios primos son los de primer grado y los de segundo grado sin raíces reales.

## Ejercicios

**1.** De las siguientes igualdades, indica la que es identidad y la que es ecuación. En el primer caso demostrarla, y en el segundo caso resolverla y comprobar las soluciones:

a) $(x+2)^2=x^2+4x+4$

b) $2x+1=x+3$

c) $(x+2)(x-2)=x^2-4$

d) $x^2+4x=5$

**2.** Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x}{3}-\frac{2x+1}{4}=\frac{x-1}{6}$

b) $\frac{x-3}{2}-\frac{x-8}{12}=\frac{5-x}{4}-\frac{x}{3}$

c) $\frac{3-x}{x}+\frac{x-1}{2}=\frac{2x+1}{4}$

d) $\frac{x-3}{x-1}+\frac{2x-1}{x-3}=3$

**3.** Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $4x^2=32x$

b) $12x^2-18=0$

c) $x^2+6x=7$

d) $(4x^2-25)(2x^2+5x)=0$

e) $x^4-29x^2+100=0$

**4.** Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{4}{x}+\frac{x}{2}=\frac{12}{x}$

b) $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=\frac{13}{6}$

c) $2+\frac{12}{x-3}=x+3$

**5.** Resuelve la siguiente ecuación fraccionaria:

$$\frac{3x-4}{5x-16}=\frac{4x+1}{6x-11}$$

**6.** Resuelve las siguientes ecuaciones "radicales":

a) $\sqrt{7-3x}-x=7$

b) $\sqrt{x+5}-5=x$

c) $x=\sqrt{4x+13}-2$

d) $1+\sqrt{2x+1}=x$

**7.** Resuelve las siguientes ecuaciones con valores abolutos:

a) $|2x-4|=8$

b) $|2x-3|=x+1$

c) $|x^2-3x|=4$

**8.** Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} x-y = 2 \\ xy = 35 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y = 0 \\ \frac{y}{x^2} = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+y = 3 \\ y^2-xy = 0 \end{cases}$

**9.** Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x-y=0 \\ x+2y=5 \end{cases}$$

a) Resuélvelo por los métodos de sustitución, de igualación y de reducción.

b) Dibuja las rectas asociadas al sistema y señala el punto solución.

**10.** Resuelve gráficamente el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x-y=1 \\ y=x^2-4x+3 \end{cases}$$

Comprueba algebraicamente lo que has obtenido.

**11.** Estudia algebraicamente si se interceptan gráficas definidas por

$$y=2x-3 \text{ e } y=x^2-2x$$

Compruébalo después representando las gráficas.

**12.** Dado $a>0$, averigua en qué puntos se interceptan las parábolas $y=x^2-a^2$ e $y=-x^2+a^2$.

**13.** Dado $a > 0$, averigua en qué puntos la recta $y = ax$ corta a la curva $y = x^3$.

**14.** Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $2^x \cdot 2^{2x+1} = \sqrt{8}$

b) $5^{x-1} = 10$

c) $9^x - 2 \cdot 3^{x+2} + 81 = 0$

d) $3^x + 3^{2-x} = 10$

**15.** Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log_3 (x+5) = 2$

b) $\log_{10} (x+3) - \log_{10} (x-6) = 1$

c) $2\log_{10} (x) - \log_{10} (x-16) = 2$

d) $2\ln \left(x^2\right) + \ln (x+1) = \ln 12$

e) $\log_2 (x+8) = 3 + \log_2 (x)$

f) $1 - \ln (x+1) = 0$

**16.** Resuelva los siguientes sistemas:

a) $\left\{ \begin{array}{rcl} 3^x + 5^{2y} & = & 14 \\ 3^{x+1} - 5^{2y-1} & = & 26 \end{array} \right.$

b) $\left\{ \begin{array}{rcl} 1 + \log_3 x & = & \log_3 y \\ \log_3 (x+6) - 2\log_3 y & = & -2 \end{array} \right.$

c) $\left\{ \begin{array}{rcl} 4^x \cdot 2^y & = & 15 \\ \log_2 (x-2) & = & \log_2 y - 1 \end{array} \right.$

**17.** Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $3x + 12 \leq 0$

b) $\dfrac{4}{x+3} \geq 1$

c) $x(x+3) \geq 4$

**18.** Obtén el dominio de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{2}{x^2 - 5x + 4}$ b) $y = \sqrt{2x-4}$

c) $y = \dfrac{2}{\sqrt{3x-6}}$ d) $y = \ln \left(1 - \dfrac{x+1}{x}\right)$

e) $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-3}$ f) $y = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-x}$

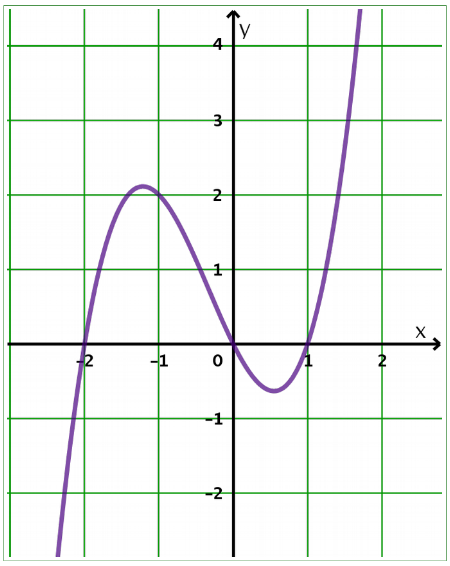
**19.** Dibuja la gráfica de $y = x^2 + 4x$ y deduce la solución de la inecuación $x^2 + 4x > 0$.

**20.** Dibuja la gráfica de la función $f(x) = 2^{x+1} - 4$ y estudia su signo.

**21.** Ídem $f(x) = \log_2 (x) - 1$.

**22.** Estudia el signo de $y = (x-3)\,\mathrm{e}^x$ sin ver su gráfica.

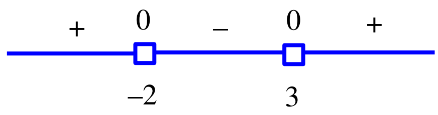
**23.** Sabiendo que la gráfica de $y = x^3 + x^2 - 2x$ es:



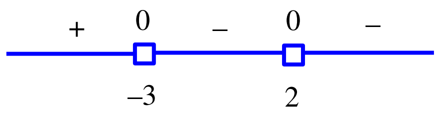

resuelve la inecuación $x^3 + x^2 - 2x > 0$.

**24.** Dibuja una gráfica cuyo signo sea:

a)




b)




**25.** Halla un número sabiendo:

a) El doble de su cuadrado, menos ocho, es cero.

b) La suma de su cuadrado y de su triple es cuatro.

**26.** Obtén el número (o números) que verifica:

a) El número más su quinta parte es 12.

b) El doble del número, más su triple, es quince.

c) Si incrementamos en 4 el cuadrado de un número, obtenemos su doble.

d) La raíz cuadrada coincide con su tercera parte.

**27.** Encuentra un número cuyo cuadrado coincide con su cuarta parte.

**28.** Halla dos enteros consecutivos cuyo producto sea 182.

**29.** Halla dos números tales que su suma es $90$, y su cociente es $9$.

**30.** Descompón el número $23$ en dos sumandos, de modo que al dividir el mayor entre el menor obtengamos de cociente $6$ y de resto $2$.

**31.** El producto de dos números es $4$, y la suma de sus cuadrados $17$. Halla esos números.

**32.** Halla una fracción equivalente a $\frac{5}{7}$, de modo que la suma de la suma de los cuadrados de sus términos sea $1.184$.

**33.** Si de un depósito saco la mitad de su contenido y luego la tercera parte de lo que resta, he de agregar 8 litros para rellenarlo.

¿Cuál es la capacidad del depósito?

**34.** Si Pedro da 30€ a José, ambos tendrán el mismo dinero. Pero si es José el que da a Pedro los 30€ entonces éste tendría el doble de dinero que el otro.

¿Cuánto tiene cada uno?

**35.** Unos amigos van a comprar un regalo que cuesta 6€. A la hora de pagar, como dos no llevan dinero, los demás deben abonar 80 céntimos más. ¿Cuántos amigos son?

**36.** Dispongo de dos barriles con ciertas cantidades de vino.

Si saco del mayor la tercera parte de su contenido, ambos tendrán la misma cantidad. Pero si de éste paso $1$ litro al menor, ambos tendrían la misma cantidad de vino.

Di los litros de vino que hay en dada barril.

**37.** Dos kilos de peras y uno de manzanas cuestan 4,05€ Y un kilo y medio de peras y dos de manzanas cuestan $4{,}35$€

Hoy he mandado a mi hijo por un kilo de peras y uno de manzanas, cobrándole el vendedor $3$€.

¿Lo han engañado cobrándole más de la cuenta?

**38.** Un libro de Matemáticas cuesta 5€ menos que veinte tebeos de Mortadelo y Filemón, pero 5€ más que quince tebeos.

¿Qué te comprarías: el libro o los tebeos? Bueno, bueno,... averigua el precio del libro y de cada tebeo.

**39.** Un padre tiene 39 años y su hijo 15. ¿Cuántos años hace que la edad del padre fue el triple de la que tenía su hijo?

**40.** La edad de una madre triplica a la de su hijo, aunque dentro de seis años sólo la doblará.

Halla sus edades actuales.

**41.** La suma de las edades de una madre y sus dos hijos es 73 años.

Dentro de 10 años la edad de la madre doblará de su hijo menor.

Y hace doce años la edad de éste era la mitad de la que tenía su hermano mayor.

Plantea un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas y averigua las edades de cada cual.

**42.** En un número de dos cifras, las decenas son el triple de las unidades. Si se invierte el orden de las cifras, se obtiene un número 54 unidades menor. Calcula el número inicial.

**43.** Dos grifos llenan un depósito de 1500 litros en una hora y doce minutos. Manando por separado, el primero tardaría una hora más que el segundo.

¿Cuánto tardaría en llenar el depósito cada litro por separado?

(Sugerencia: elige como incógnitas los litros que echa cada grifo por hora)

**44.** Una ganadera da a su ganado una mezcla de dos tipos de piensos $A$ y $B$. Un kilo de pienso $A$ proporciona a una res el $6\%$ de sus necesidades diarias de proteínas y el $14\%$ de sus necesidades de carbohidratos.

Un kilo de B contiene el 35% del requerimiento diario de proteínas y el 15% de carbohidratos.

Si la ganadera desea que su ganado tenga cubiertas, pero sin excedentes, sus necesidades diarias de proteínas y carbohidratos, ¿cuántos Kg. de cada tipo de pienso deberá proporcionar a cada res?

**45.** Disponemos de dos tipos de café: el arábiga a 6€ el kilo y el robusta a 4,5€ el kilo. Deseamos realizar una mezcla de ambos para obtener 60 kilos a un precio de 5€ el kilo.

¿Cuántos kilos de cada tipo debemos tomar?

**46.** Dos trenes salen al mismo tiempo desde dos ciudades que distan 576 km. Cuando van al encuentro, se cruzan a las 4 horas. Pero cuando van en la misma dirección, el más veloz alcanza al otro tras 16 horas. Halla sus velocidades.

**47.** Dos autobuses de línea salen simultáneamente, y en direcciones opuestas, de dos ciudades que distan entre sí 600 km. Si uno lleva una velocidad de 56 km./h y el otro 64 km./h, ¿tras cuánto tiempo y a qué distancia de las ciudades se encontrarán?

**48.** Un automóvil sale de una ciudad a 68 km./h. A la hora y cuarto sale otro en la misma dirección alcanzándolo 5 h. más tarde. ¿Cuál es la velocidad de éste vehículo?

**49.** El número de bacterias ($N$) que hay en un cultivo viene dado por la fórmula

$$N = 1500 \cdot 2^{t/5}$$

donde *t* el tiempo en horas. ¿Cuántas bacterias hay al inicio? ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que el número de bacterias supere las 25000?

**50.** La cantidad de un medicamento en la sangre de cierto paciente viene dada por la fórmula

$$C = 40 \cdot 0.75^{t}$$

donde $C$ se mide en miligramos y $t$ en horas. Debemos vigilar que la cantidad del compuesto no baje de los 20 mg. ¿Cada cuánto tiempo (en horas y minutos) debemos administrar una nueva dosis?

**51.** Calcula los ángulos de un triángulo sabiendo que uno es la mitad del otro, y que el tercero es la cuarta parte de la suma de los dos anteriores.

**52.** Obtengamos las dimensiones y el área de un rectángulo de perímetro 20 mm en el que la base mide 2 mm. más que la altura.

**53.** Un rectángulo es el triple de ancho que de alto, y tiene de perímetro 20 cm.

Calcula sus dimensiones, su área y su diagonal.

**54.** La diagonal de un rectángulo mide 26 cm., y su perímetro 68 cm. Obtén sus dimensiones y su área.

**55.** Determina el largo y el ancho de una habitación rectangular con superficie 12 $m^2$ y con una diagonal de 5m.

**56.** Calcula la medida de los lados de un rectángulo tal que si se aumenta la base en 5 cm. y se disminuye la altura en otros 5 cm., la superficie no varía.

Pero si se aumenta la base en 5 cm. y se disminuye la altura en 4 cm., la superficie aumenta en 4 $cm^2$.

**57.** Para solar una habitación, un albañil dispone de dos tipos de baldosas: unas de tipo A con medidas 30 cm x 40 cm y otras B con medidas 20 cm x 50 cm.

Si eligiéramos las del tipo A se necesitarían 40 baldosas menos que si se eligiesen las de tipo B.

¿Cuál es la superficie de la habitación?

**58.** El cateto menor de un triángulo rectángulo mide 11 cm. y la hipotenusa mide 1 cm. más que el otro cateto. Obtén su área y su perímetro.

**59.** El perímetro de un triángulo isósceles es 16 cm., y la altura (trazada sobre el lado desigual) mide 4 cm. Halla los lados del triángulo.

**60.** Un rectángulo de 12 $cm^2$ de superficie está inscrito en una circunferencia de 5 cm de diámetro. Obtén sus dimensiones.

**61.** La diferencia de las diagonales de un rombo es de 2 dm. Si a ambas las aumentamos en 2 dm., el área aumenta en 16 $dm^2$. Obtén las diagonales, el perímetro y el área de dicho rombo.

**62.** Un rombo, cuyo perímetro mide 100 cm., está circunscrito a una circunferencia de radio 12 cm. Halla las diagonales del rombo y su área.

( $S = 2lr$ con *S* la superficie del rombo, *l* la longitud del lado y *r* el radio de la circunferencia inscrita)

**63.** La altura de un trapecio isósceles mide 4cm y sus lados oblicuos miden 5 cm.

Halla las bases, sabiendo que suman 14 cm.

**64.** Un depósito de agua tiene forma de ortoedro de base cuadrada con altura 10 m y con una capacidad de 4.000 $m^3$.

Obtén la longitud del lado de dicha base.

**65.** Una pieza rectangular de cinc es 4 cm. más larga que ancha. Con ella se construye una caja de 840 cm$^3$ cortando un cuadrado de 6 cm. de lado en cada esquina y doblando los bordes.

Halla las dimensiones de la caja.

**66.** Cuando dividimos $6x^3 + mx^2 - 9x + 2$ entre $x + 2$ obtenemos resto $-4$. ¿Cuál es el valor de $m$?

**67.** Halla $a$ y $b$ en el polinomio $x^3 + ax + b$ sabiendo que es divisible por $x - 1$ y por $x + 1$.

**68.** Obtén la ecuación de una recta sabiendo que:

a) Pasa por los puntos $A\,(1\,,3)$ y $B\,(3\,,7)$.

b) Su pendiente es $m = -2$ y pasa $P\,(0\,,5)$.

**69.** Obtén la ecuación de una parábola que pasa $P\,(0\,,4)$ y corta al eje X en los puntos de abscisas –2 y 1.

**70.** ¿Para qué valor de $k$ el polinomio $3x^2 - kx + 3$ es primo?

## Cuestiones

**1.** ¿Es lo mismo ecuación que identidad? Pon un ejemplo de cada clase.

**2.** Escribe una ecuación que tenga:

a) Ninguna solución.

b) Dos soluciones.

c) Cuatro soluciones distintas..

**3.** Cuando en la ecuación $3x = 4$ multiplicamos ambos miembros por $x$ obtenemos otra ecuación: $3x^2 = 4x$. ¿Son ecuaciones equivalentes?

**4.** ¿Puede una ecuación tener infinitas soluciones?

**5.** Escribe una ecuación de tercer grado cuyas soluciones sean $x = -1$ , $x = 3$ y $x = 5$.

**6.** Escribe una ecuación de cuarto grado cuyos ceros sean los números $a$ , $b$ , $c$ y $d$.

**7.** ¿Puede tener una ecuación de tercer grado sólo dos soluciones distintas?

**8.** Escribe una ecuación con una incógnita que no tenga solución.

**9.** Razona, sin efectuar ningún cálculo, si puede ser $x = 3$ una solución de la ecuación

$$x^5 + 4x^3 - 56x^2 - 3x + 2 = 0$$

**10.** El polinomio $x^4 + 4$ puede factorizarse así

$$x^4 + 4 = \left(x^2 + 2x + 2\right)\left(x^2 - 2x + 2\right)$$

Razona por qué esto no contradice que no tenga ceros reales.

**11.** ¿Cuántos ceros distintos puede tener una ecuación polinómica de grado tres como máximo? ¿Y una de grado $n$?

**12.** En la ecuación de segundo grado

$$x^2 + bx + c = 0$$

demuestra que la suma de sus soluciones es $-b$ y que el producto de sus soluciones es $c$.

**13.** En la ecuación $x^2 + ax - 3 = 0$ se sabe que una solución es $x = 2$. Obtén el valor de $a$ y la otra solución.

**14.** Escribe un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que no tenga solución. ¿Cómo es su interpretación gráfica?

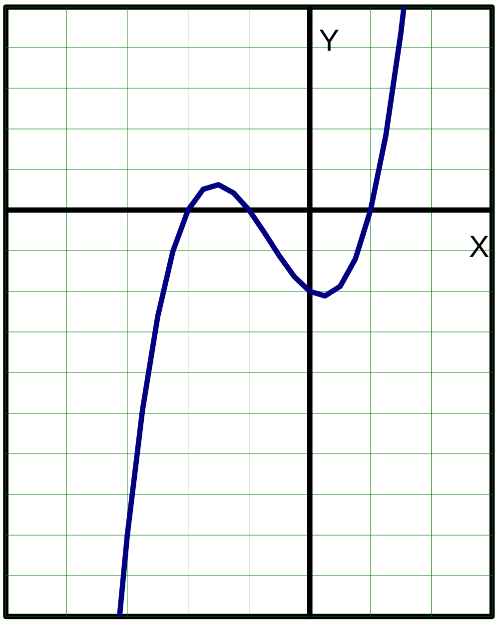
**15.** Escribe un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas que tenga sólo una solución. ¿Cómo es su interpretación gráfica?

**16.** Escribe un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que tenga infinitas soluciones.

¿Cómo es su interpretación gráfica?

## Autoevaluación

**1.** La gráfica de $y = x^3 + 2x^2 - x - 2$ es la mostrada:




a) Resuelve la ecuación:

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$$

b) Resuelve la inecuación:

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 < 0$$

c) Resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = x^3 + 2x^2 - x - 2 \\ 2x - y - 2 = 0 \end{cases}$$

**2.** Consideremos el polinomio

$$p(x) = 6x^3 - 13x^2 + 4$$

a) Factoriza totalmente el polinomio.

b) Resuelve la ecuación $p(x) = 0$ .

**3.** La suma de un número entero con la raíz del siguiente es $5$ . ¿Cuál es ese número?

**4.** Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \log_y x - \log_y 2 &= 2 \\ 2^{3x} : 2^y &= 2 \end{cases}$$

**5.** Considera las líneas dadas por las ecuaciones:

$$y = x^2 - 2x \quad , \quad x - y = 0$$

a) Obtén algebraicamente los puntos en que se interceptan.

b) Represéntalas en unos ejes de coordenadas y corrobóralo.

**6.** El cateto menor de una triángulo rectángulo mide $11 \text{ cm}$ y la hipotenusa mide $1 \text{ cm}$ más que el otro cateto. Obtén su área y su perímetro.

**7.** Una caja (con tapa) de altura $5 \text{ cm}$ tiene de área total $94 \text{ cm}^2$ , y de volumen $60 \text{ cm}^3$ .

Obtén las dimensiones de la base.

**8.** Obtén el dominio de las funciones

a) $y = \ln\left(x^2 - 4\right)$

b) $y = \dfrac{x+1}{4^x - 8}$

## Autoevaluación

**1.** De la gráfica deducimos:

a) Las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$ son las abscisas de los puntos en que la gráfica corta al eje **X**. Son $x = -2\,, -1\,, 1$ .

b) Debemos averiguar para qué valores de $x$ es

$$y = f(x) > 0$$

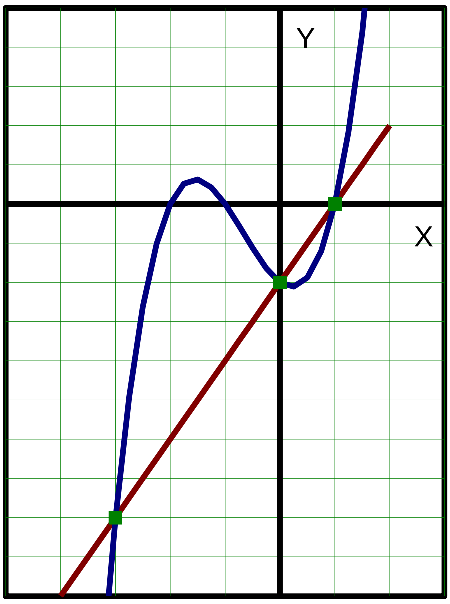
Esto ocurre en aquellos intervalos en los que la curva está sobre el eje **X**:

$$S = (-\infty\,, -2) \cup (-1\,, 1)$$

c) Las soluciones del sistema son los puntos en que se cortan

- la recta $y = 2x + 2$
- la curva $y = x^3 + 2x^2 - x - 2$

Al dibujar ambas gráficas en unos mismos ejes de coordenadas:




Apreciamos que hay tres soluciones que son:

$$(x\,, y) = (-3\,, 8)\ ,\ (0\,, -2)\ ,\ (1\,, 0)$$

**2.** El polinomio es

$$p(x) = 6x^3 - 13x^2 + 4$$

a) Probando con los divisores de $4$ encontramos que $2$ es un cero:

$$p(2) = 6 \cdot 2^3 - 13 \cdot 2^2 + 4 = 0$$

Luego $(x - 2)$ es un divisor. Realizando la división:

$$p(x) = (x - 2) \cdot \left(6x^2 - x - 2\right)$$

Ahora buscamos los ceros del factor de segundo grado mediante la fórmula:

$$6x^2 - x - 2 = 0 \to x = -\frac{1}{2}\ ,\ x = \frac{2}{3}$$

Concluimos que entonces:

$$p(x) = 6(x - 2)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)$$

Las soluciones de la ecuación $p(x) = 0$ son sus ceros: $x = 2\ ,\ -\frac{1}{2}\ ,\ \frac{2}{3}$ .

**3.** Sea $x$ ese número entero:

$$\text{Número } = x \longrightarrow \text{Siguiente } = x + 1$$

La ecuación que nos permitirá obtener $x$ será:

$$\underbrace{x + \sqrt{x + 1}}_{\text{el número más la raíz del siguiente}} \quad \underbrace{=}_{\text{es}} \quad \underbrace{5}_{\text{cinco}}$$

Para resolver, primero aislamos la raíz:

$$\sqrt{x + 1} = 5 - x$$

Elevamos al cuadrado y desarrollamos:

$$\left(\sqrt{x + 1}\right)^2 = (5 - x)^2 \to x + 1 = 25 + x^2 - 10x$$

Agrupamos y resolvemos:

$$x^2 - 11x + 24 = 0 \to \left|\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 8 \end{array}\right.$$

Al elevar al cuadrado ambos miembros obtenemos una ecuación que puede tener más soluciones que la propuesta (no tienen por qué ser equivalentes). Es preciso comprobarlas:

$$x = 3 \to 3 + \sqrt{4} = 6 \to 3 + 2 = 5 \to \text{SI}$$

$$x = 8 \to 8 + \sqrt{9} = 5 \to 8 + 3 = 5 \to \text{NO}$$

El número buscado es el $3$ .

**4.** Aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$\log_y x - \log_y 2 = 2 \to \log_y \frac{x}{2} = 2 \to \frac{x}{2} = y^2$$

Aplicando las propiedades de los exponentes:

$$2^{3x} : 2^y = 2 \to 2^{3x-y} = 2^1 \to 3x - y = 1$$

Ahora resolvemos el sistema resultante

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{x}{2} & = & y^2 \xrightarrow[x]{despejando} x = 2y^2 \\ 3x - y & = & 1 \xrightarrow[x]{sustituyendo} 6y^2 - y = 1 \end{array} \right.$$

Ahora resolvemos la ecuación de segundo grado y obtenemos la otra incógnita:

$$6y^2 - y - 1 = 0 \to \left| \begin{array}{l} y = \frac{1}{2} \quad \to \quad x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{3} \quad \to \quad x = \frac{2}{9} \end{array} \right.$$

Pero como $y$ no puede ser negativo (es la base del logaritmo), la única solución es:

$$\left\{ x = \frac{1}{2}\, , y = \frac{1}{2} \right\}$$

**5.**

a) Los puntos en que se cortan son las soluciones del sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & x \\ y & = & x^2 - 2x \end{array} \right.$$

Igualando:

$$x^2 - 2x = x \ \to \ x^2 - 3x = 0$$

Sacando factor común resolvemos:

$$x \cdot (x - 3) = 0 \ \to \ \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 3 \end{array} \right.$$

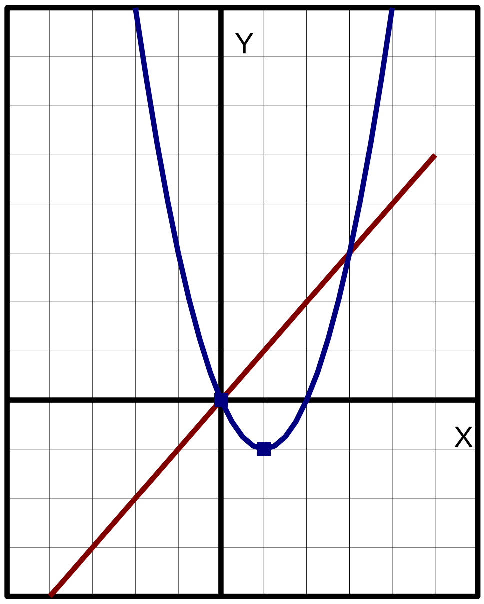
Ahora sustituimos para calcular la pareja correspondiente de cada valor, obteniendo así los dos puntos donde se cortan

$$(x\, , y) = (0\, , 0) \ , \ (3\, , 3)$$

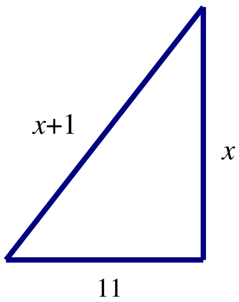
b) Observamos que la primera ecuación se representará como una recta y la segunda como una parábola.

Los puntos de corte de ambas líneas serán las soluciones del sistema formado por ambas.

Vemos que los puntos de corte son, efectivamente, las soluciones antes obtenidas.




**6.** Si $x$ es la longitud del cateto desconocido, el triángulo será:




Por el Teorema de Pitágoras, tenemos:

$$(x + 1)^2 = x^2 + 11^2$$

Desarrollemos y resolvamos:

$$x^2 + 1 + 2x = x^2 + 121 \to 2x = 120 \to x = 60$$

Resulta, pues, que los lados miden $11\, , 60\, , 61$ cm , respectivamente.

Deducimos de ahí:

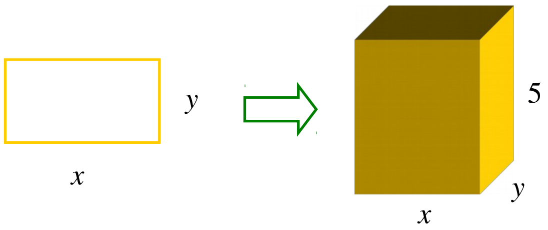
$$\text{Perímetro} = 11 + 60 + 61 = 132 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{11 \cdot 60}{2} = 330 \text{ cm}^2$$

**7.** Sea

$x =$ el largo de la base

$y =$ el ancho de la base




El área será la suma de las áreas de las seis caras:

$$A = 94 \to 2 \cdot x \cdot y + 2 \cdot 5 \cdot x + 2 \cdot 5 \cdot y = 94$$

El volumen:

$$V = 60 \to 5 \cdot x \cdot y = 60$$

Simplificando:

$$\begin{cases} xy + 5x + 5y &= 47 \\ xy &= 12 \end{cases}$$

Observemos la primera ecuación:

$$e_1 \xrightarrow{xy=12} 12 - 5x + 5y = 47 \to y = 7 + x$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$e_2 \xrightarrow{y=7+x} x \cdot (7 + x) = 12 \to x^2 + 7x - 12 = 0$$

Resolviendo ahora la ecuación de segundo grado obtenemos

$$x = \frac{7 \pm 1}{2} \to \left| \begin{array}{l} x = 3 \xrightarrow{y=7-x} y = 4 \\ x = 4 \xrightarrow{y=7-x} y = 3 \end{array} \right.$$

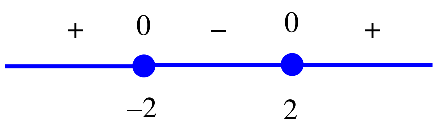
Concluimos que las dimensiones de la base son $4 \text{ m}$ largo y $3 \text{ m}$ de ancho.

**8.**

a) Debe ser

$$x^2 - 4 > 0$$

Estudiando el signo:




Luego el dominio es

$$\mathbb{D}_f = (-\infty\,, -2) \cup (2\,, +\infty)$$

b) El cociente existe salvo para los valores que hacen cero el denominador:

$$4^x - 8 = 0 \to \left(2^2\right)^2 = 8 \to 2^{2x} = 2^3$$

Igualando los exponentes:

$$2x = 3 \to x = \frac{3}{2}$$

Luego el dominio es

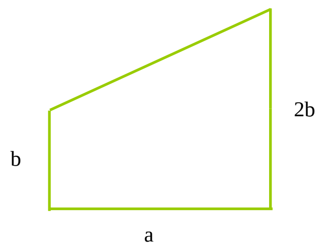
$$\mathbb{D}_f = \left(-\infty\,, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}\, +\infty\right)$$

O si se prefiere

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

## Ejercicios de repaso

**1.** Halla el área de la siguiente figura:




**2.** Dados los polinomios:

$$P=x-2\ ,\ Q=x^2+x-1\ ,\ R=x^3+x^2-3x+2$$

obtén

$$P\cdot Q-R \ \text{ y } \ P^2-Q$$

**3.** Idem para:

$$P=x+1\ ,\ Q=x^2-x+1\ ,\ R=x^3$$

**4.** Simplifica las expresiones algebraicas siguientes:

a) $(a-b)^2+a^2-b^2$

b) $(a+b)^2+(a-b)^2-(a+b)\cdot(a-b)$

c) $\dfrac{a+b}{a^2-b^2}$

d) $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2-2ab}$

**5.** Efectúa la división $(x^3-1):(x-1)$ .

Usando el resultado anterior expresa el dividendo como producto de dos polinomios de menor grado.

**6.** Divide $(x^3+1)$ entre $(x+1)$ .

Aprovecha lo anterior para simplificar

$$\frac{x+1}{x^3+1}$$

**7.** ¿Es divisible $a^4+a^2-a-1$ entre $a+1$ ? ¿Y entre $a-1$ ?

**8.** Efectúa las siguientes divisiones:

a) $(x^4+x^2-3):(x+1)$

b) $(x^2+2x-1):(x-2)$

c) $(x^2+2x-1):(x-3)$

**9.** Efectúa la división $(x^2+2x-1):(x+2)$ .

Comprueba que el resto obtenido coincide con el valor numérico de $x^2+2x-1$ para $x=-2$.

**10.** Obtén de dos formas distintas el resto de

$$(x^3-3x^2+2):\left(x+\frac{2}{3}\right)$$

**11.** Halla el valor de *m*, sabiendo que el polinomio

$$p(x)=x^3+2x+m$$

es divisible entre $x-5$.

**12.** Dado el polinomio $p(x)=x^3-9x^2+23x-15$ .

a) Factoriza totalmente *p*(*x*).

b) ¿Cuáles son sus divisores primos?

c) Resuelve la ecuación $p(x)=0$.

**13.** Idem para:

a) $p(x)=x^3-2x^2-x+2$

b) $p(x)=x^7-4x^5-12x^4-9x^3$

c) $p(x)=6x^3-5x^2-2x+1$

**14.** Resuelve, factorizando previamente, las ecuaciones:

a) $x^4+3x^3+5x^2+6x=0$

b) $3x^3+4x^2+4x+3=0$

**15.** Factoriza los siguientes polinomios:

a) $x^2-3x+2$ b) $x^2+9$

c) $x^2-9$ d) $4x^2-12x+9$

e) $x^4-5x^2+4$ f) $x^2-3x+2$

**16.** Escribe un polinomio de cuarto grado cuyos ceros sean 1, –1, 2 y –2. ¿Cuántas soluciones hay?

**17.** Simplifica las siguientes expresiones

a) $\dfrac{x^3-4x^2+4x}{x^3-2x^2}$

b) $\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$

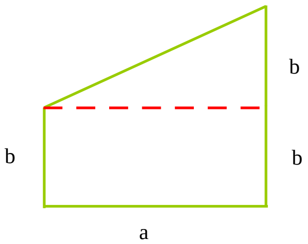
c) $\dfrac{x^3-4x}{x^3-2x^2}$



*José Álvarez Fajardo*

## Soluciones repaso

**1.** Descomponiendo la figura en dos:




$$A=A_1+A_2=\frac{a\cdot b}{2}+a\cdot b=\frac{ab}{2}+\frac{2ab}{2}=\frac{3ab}{2}$$

**2.**

$$P\cdot Q-R=(x-2)\cdot(x^2+x-1)-(x^3+x^2-3x+2)=$$
$$=-2x^2-4\,.$$
$$P^2-Q=(x-2)^2-(x^2+x-1)=-5x+5$$

**3.**

$$P\cdot Q-R=(x+1)\cdot(x^2-x-1)-x^3=-2x^2-4$$
$$P^2-Q=(x+1)^2-(x^2-x-1)=3x$$

**4.**

a) $=a^2+b^2-2ab+a^2-b^2=2a^2-2ab$

b) $=a^2+b^2+2ab+a^2+b^2-2ab-a^2+b^2=$
$=a^2+3b^2$

c) $=\dfrac{(a+b)\cdot 1}{(a+b)\cdot(a-b)}=\dfrac{1}{a-b}$

d) $=\dfrac{(a+b)\cdot(a-b)}{(a-b)^2}=\dfrac{a+b}{a-b}$

**5.**

cociente $\rightarrow$ $c(x)=x^2+x+1$
resto $\rightarrow$ r $=0$
Es Dividendo $=$ divisor $\times$ cociente
Luego: $x^3-1=(x-1)\cdot(x^2+x+1)$

**6.** Al dividir obtenemos:

cociente $\rightarrow c(x)=x^2-x+1$
resto $\rightarrow r=0$

Así:

$$\frac{x+1}{x^3+1}=\frac{1}{x^2-x+1}$$

**7.**

a) No es divisible entre $a+1$ porque el resto es:
$$R=p(-1)=(-1)^4+(-1)^2-(-1)-1=-2$$

b) Sí es divisible entre $a-1$ porque el resto es:
$$R=p(1)=1^4+1^2-1-1=0$$

**8.**

a) $c(x)=x^3-x^2+x-1\ ,\ r=-2$

b) $c(x)=x\ ,\ r=-1$

c) $c(x)=x+5\ ,\ r=-1$

**9.**

$\rightarrow$ Al dividir obtenemos
$c(x)=x$ y $r=-1$

$\rightarrow$ Por el Teorema del Resto:
$$r=p(-2)=(-2)^2+2(-2)-1=-1$$

**10.**

$\rightarrow$ Dividiendo: $R=\dfrac{10}{27}$

$\rightarrow$ Por el Teorema del Resto:
$$R=p\left(\frac{-2}{3}\right)=\left(\frac{-2}{3}\right)^3-3\cdot\left(\frac{-2}{3}\right)+2=\frac{10}{27}$$

**11.** Por el teorema del resto:
$$R=p(5)=5^3+3\cdot 5+m=140+m$$
El resto debe ser cero, de donde es claro que
$$m=-140$$

**12.**

a) Factorizando:

| | |
|---|---|
| $(x^3-9x^2+23x-15)$ | $(x-1)$ |
| $(x^2-8x+15)$ | $(x-2)$ |
| $(x-5)$ | $(x-5)$ |
| 1 | |

Es $p(x)=(x-1)\cdot(x-3)\cdot(x-5)$
Sus divisores primos son $(x-1)$ , $(x-3)$ y $(x-5)$
$(x-1)\cdot(x-3)\cdot(x-5)=0$ $\rightarrow$
$|x=1$
¿$|x=3$
$|x=5$

**13.**

a) Dividiendo:

| | |
|---|---|
| $x^3-2x^2-x+2$ | $(x-1)$ |
| $x^2-x-2$ | $(x+1)$ |
| $x-2$ | $(x-2)$ |
| $1$ | |

$p(x)=(x+1)(x-1)(x-2)$

Sus divisores primos son:

$(x+1)$ , $(x-1)$ , $(x-2)$

$$(x+1)(x-1)(x-2)=0\rightarrow \left|\begin{array}{l} x=-2\\ x=1\\ x=2\end{array}\right.$$

b) Dividiendo:

| | |
|---|---|
| $(x^7-4x^5-12x^4-9x^3)$ | $x^3$ |
| $(x^4-4x^2-12x-9)$ | $(x+1)$ |
| $(x^3-x^2-3x-9)$ | $(x-3)$ |
| $(x^2+2x+3)$ | $(x^2+2x+3)$ |
| $1$ | |

Div. Primos: $x, (x+1), (x-3), \left(x^2+2x+3\right)$

$p(x)=x^3(x+1)(x-3)\left(x^2+2x+3\right)$

$$p(x)=0\rightarrow \left|\begin{array}{l} x=\ \ 0 \text{ (triple)}\\ x=-1\\ x=\ \ 3\end{array}\right.$$

c) Dividiendo:

| | |
|---|---|
| $(6x^3-5x^2-2x+1)$ | $(x-1)$ |
| $(6x^2-x-1)$ | $(x+1/2)$ |
| $(6x-2)$ | $(x-1/3)$ |
| $6$ | $6$ |
| $1$ | |

Es $p(x)=6\cdot(x-1)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)$

Sus divisores primos son $(x-1)$ , $\left(x+\frac{1}{2}\right)$ y $\left(x-\frac{1}{3}\right)$

$$p(x)=0\rightarrow \left|\begin{array}{l} x=\ \ 1\\ x=-1/2\\ x=\ \ 1/3\end{array}\right.$$

**14.**

a) $p(x)=x(x+2)\left(x^2+x+3\right)$

$$p(x)=0\rightarrow \left|\begin{array}{l} x=0\\ x+2=0\rightarrow x=-2\\ x^2+x+3=0\rightarrow x=\{\}\end{array}\right.$$

b) $q(x)=(x+1)\left(3x^2+x+3\right)$

$$q(x)=0\rightarrow \left|\begin{array}{l} x+1=0\rightarrow x=-1\\ 3x^2+x+3=0\rightarrow x=\{\}\end{array}\right.$$

**15.**

$a)$ $x^2-3x+2=(x-1)\cdot(x-2)$

$b)$ Es polinomio primo .

$c)$ $x^2-9=(x-3)\cdot(x+3)$

$d)$ $4x^2-12x+9=4\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$

$e)$ $x^4-5x^2+4=(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+2)$

**16.** Un polinomio es:

$$p(x)=(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+2)=$$
$$=x^4-5x^2+4$$

Hay infinitas soluciones. Basta multiplicar p(x) por cualquier constante numérica:

$$kx^4-5kx^2+4k$$

**17.**

$a)$ $\dfrac{x\cdot(x-2)^2}{x^2(x-2)}=\dfrac{x-2}{x}$

$b)$ $\dfrac{x-2}{(x-1)\cdot(x-2)}=\dfrac{1}{x-1}$

$c)$ $\dfrac{x\cdot(x+2)\cdot(x-2)}{x^2(x-2)}=\dfrac{x+2}{x}$