TEMA 1

ARITMÉTICA

<u>Contenidos</u>

1. Números racionales. Caracterización.
2. Números irracionales. Caracterización.
3. El número real.
4. Exponentes.
5. Logaritmos.
6. Notación científica.
7. Orden en la recta real.
8. Anexo I: cálculo con racionales.
9. Anexo II: Números radicales.
10. Anexo III: El número e.

<u>Tiempo estimado</u>

12 sesiones

<u>Criterios de Evaluación</u>

1. Distingue y clasifica los distintos tipos de números, comprendiendo especialmente la diferencia entre los racionales y los irracionales.
2. Representa los números racionales y los números radicales en la recta real.
3. Comprende qué es una potencia de exponente racional, y aplica con corrección sus propiedades.
4. Interpreta números en su notación científica.
5. Asimila el concepto de logaritmo, percibiendo que es la operación recíproca de la exponenciación.
6. Aproxima cualquier número real a través de expresiones decimales, sabiendo acotar el error.
7. Domina con soltura las desigualdades y las diferentes formas de expresión de un intervalo de la recta real.
8. Sabe estudiar el signo y resolver inecuaciones simples.

1.Números racionales.

Definición de $\mathbb{Q}$.

Recordemos que el conjunto de los números racionales, designado por $\mathbb{Q}$ es el formado por todas las fracciones $\dfrac{m}{n}$ de enteros con $n \neq 0$.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m\,, n \in \mathbb{Z} \wedge n \neq 0 \right\}$$

Es importante recordar que el denominador de una fracción nunca puede ser cero, ya que la división por cero no tiene sentido.

Debemos también observar que los enteros son números racionales, ya que pueden expresarse como fracciones: $-4 = -\dfrac{8}{2}\,,\ 3 = \dfrac{3}{1}\ \ldots$

Tenemos así que el conjunto de los números enteros forma parte del conjunto de los racionales:

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Dos fracciones representan un mismo número racional si son equivalentes. El criterio general de equivalencia es:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

Expresión decimal de un número racional.

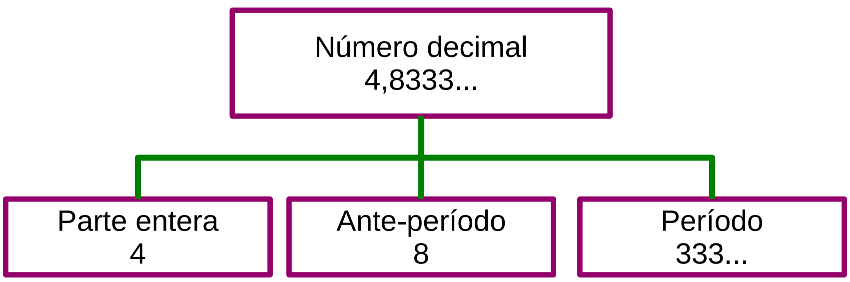
Todo número racional puede escribirse en forma decimal: basta con dividir el numerador entre el denominador. Dicha división puede:

- terminar tras varios pasos $\longrightarrow$ expresión decimal limitada.
- no terminar $\longrightarrow$ expresión decimal ilimitada.

En este último caso las cifras se repiten, a partir de una, en bloques. Ese bloque se denomina período y diremos que estamos ante un número decimal periódico. Veamos algunos ejemplos:

$\dfrac{273}{40} = 6.825$	$\dfrac{1}{3} = 0.333\ldots = 0.\widehat{3}$	$\dfrac{29}{6} = 4.833\ldots = 4.8\widehat{3}$
Decimal “exacto”	Decimal “periódico puro”	Decimal “periódico mixto”

Aquí la composición de la expresión decimal de un número racional:



Todo número decimal exacto puede interpretarse como un número decimal periódico de período cero:

6,825=6,825000...

Tenemos la siguiente propiedad de los números racionales:

$\boxed{\text{Todo racional puede expresarse como un número decimal periódico.}}$

Expresión fraccionaria de un número decimal.

Vamos ahora a tratar el problema recíproco: expresar un número decimal exacto o periódico en forma de fracción. Sólo hay una pequeña dificultad si es decimal ilimitado.

Hay un procedimiento razonado para conseguirlo: tratar de conseguir dos números periódicos puros, de igual período, para a continuación restarlos.

Veamos, por ejemplo, cómo expresar en forma de fracción el número periódico $r = 3.45\widehat{6}$:

$$\left.\begin{aligned} 100r &= \ \ 345.66\ldots \\ 1000r &= 3456.66\ldots \end{aligned}\right\} \xrightarrow{restando} 900r = 3111 \rightarrow r = \frac{311}{990}$$

Llegamos así a la siguiente conclusión:

> Todo número decimal periódico puede expresarse como una fracción de números enteros.

Un número decimal exacto es fácil representarlo en forma de fracción:

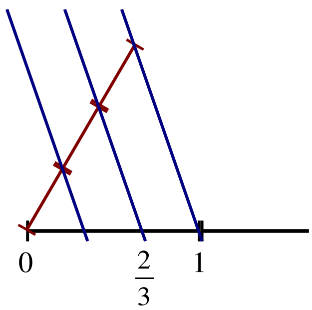
$0{,}7 = \frac{7}{10}$ 7 décimas.

$0{,}038 = \frac{38}{1000}$ 38 milésimas

Representación geométrica de un número racional.

Dado un número racional y fijado un segmento unidad, podemos construir siempre un segmento cuya longitud sea la correspondiente a la de ese número. Recuerda que para ello se usa el Teorema de Tales.

En el margen hemos representado en la recta real el número racional $\frac{2}{3}$.



2. Números irracionales.

Existencia de números no periódicos.

Es fácil escribir números decimales ilimitados que no son periódicos. Por ejemplo:

$$0.35\,3355\,333555\,33335555\ \ldots$$

Observemos que no es periódico pues va apareciendo un tres y un cinco más tal y como vamos recorriendo sus cifras.

Estos números decimales no pueden ser la expresión decimal de ningún número racional, ya que el cociente de dos números enteros es siempre un decimal periódico. Es por ello que los números decimales que no son periódicos son llamados números irracionales.

> Los números cuya expresión decimal es no periódica se denominan números irracionales.

Tenemos así el siguiente esquema:

$$\text{Decimales}\begin{cases}\text{Periódicos = Racionales}\\ \text{No periódicos = Irracionales}\end{cases}$$

Insuficiencia del número racional.

Los números raciones no son suficientes para resolver problemas sencillos como este: ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado cuya superficie es 2 cm?

Buscamos un número que multiplicado por sí mismo (esto es, elevado al cuadrado) dé como resultado 2. ¿Existe ese número? ¿Cómo podemos obtener su expresión decimal? ¿Qué tipo de expresión es ésta?

Observemos el denominado método de aproximaciones sucesivas por tanteo:

$$\left.\begin{array}{l} 1^2 = 1 \\ 2^2 = 4 \end{array}\right\} \rightarrow \sqrt{2} \text{ está entre } 1 \text{ y } 2 \quad \rightarrow \quad \sqrt{2} = 1.\ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} 1.4^2 = 1.96 \\ 1.5^2 = 2.25 \end{array}\right\} \rightarrow \sqrt{2} \text{ está entre } 1.4 \text{ y } 1.5 \quad \rightarrow \quad \sqrt{2} = 1.4\ldots$$

... ...

Actuando así, sucesivamente, podemos obtener tantos decimales como queramos de $\sqrt{2}$. Se demuestra que dicha expresión es ilimitada y que no es periódica. Tenemos, pues, que $\sqrt{2}$ es un número irracional.

Un número irracional muy conocido por todos es el número “pi”, que aparece allí donde haya una forma geométrica circular:

$$\pi = 3.1415926535\ldots$$

En general, cualquier raíz de un número entero que no sea otro entero es un número irracional.

Recordemos las fórmulas de la superficie del círculo y de la longitud de la circunferencia.

S = π r²

L = 2 π r

3. El número real. Aproximación y error.

Definición de $\mathbb{R}$.

Al conjunto formado por todos los números racionales e irracionales se le llama conjunto de los números reales, y se designa por $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R} = \{x : x \text{ es racional} \vee x \text{ es irracional}\}$$

Los números reales, pues, cubren todos los números decimales: todo número decimal es un número real. Así, por ejemplo, son números reales:

$$-2\,,\ \frac{7}{34}\,,\ 2.35\,,\ \sqrt[3]{5}\,,\ \pi$$

Completitud de la recta real.

Una propiedad muy importante de los números reales es la denominada “completitud”: dado un origen y un segmento unidad

a cada punto de la recta $\xrightarrow{\text{le corresponde}}$ un número real

a cada número real $\xrightarrow{\text{le corresponde}}$ un punto de la recta

Muchos números reales pueden dibujarse en la recta con regla y compás utilizando propiedades más o menos complicadas: son los llamados números constructibles. Pero no todos lo son: π no lo es, por ejemplo.

Son constructibles:

- los enteros, que pueden dibujarse con un simple compás y los racionales con escuadra y cartabón usando el Teorema de Tales.
- Todas las raíces cuadradas de los enteros, que pueden representarse usando un poco el ingenio y el Teorema de Pitágoras.

❑ Aproximación y error.

Todo número real puede aproximarse mediante números decimales exactos. Es claro que cuando sustituimos un número por una aproximación cometemos un error. Veamos con un caso concreto. Sabemos que es

$$\sqrt{2} = 1.41421356237\ldots$$

Si elegimos el número 1.41 como aproximación de él hemos cometido un error (es por defecto, pues el valor aproximado es menor que $\sqrt{2}$).

El error es la diferencia entre el número y la aproximación:

$$\varepsilon = \sqrt{2} - 1.41 = 0.00421356237\ldots$$

El error cometido no se conoce exactamente, pues ¿qué cifras que quedan? Pero sí podemos acotarlo: es menor que una centésima.

- Dado el número real x, si lo sustituimos por el número r se dice que hemos aproximado x por r, o que r es una aproximación de x .
- Si r es menor que x se dice que la aproximación es por defecto

  Si r es mayor que x se dice que la aproximación es por exceso.
- Se llama

  Error absoluto a $\varepsilon = |x - r|$

  Error relativo a $\varepsilon_r = \dfrac{|x - r|}{x}$

En cualquier tipo de cálculo los números racionales deben escribirse siempre en forma de fracción y los números irracionales con la notación que los designe.

Una vez hechas las operaciones y simplificaciones pertinentes, puede darse la aproximación decimal con las cifras que la situación demande.

Como ejemplo, veamos a continuación una tabla que nos muestra las sucesivas aproximaciones de $\sqrt{2}$:

Aproximaciones de $\sqrt{2}$			
Hasta las	**Por defecto**	**Por exceso**	**Error menor que**
Unidades	1	2	Una unidad
Décimas	1.4	1.5	Una décima
Centésimas	1.41	1.42	Una centésima
...	...	...	...

4. Exponentes.

❑ Exponente natural.

Recordemos que para expresar abreviadamente un producto, en el que todos los factores son iguales se emplea la potencia:

Dado el número real a y el número natural n, llamamos a elevado a n al producto de a por sí mismo n veces:

$$a^n = \overbrace{a \cdots a}^{n \text{ veces}}$$

Atención:

$a^0 = 1$

☞ Ejemplo: observa las similitudes y diferencias (¡cuidado con las confusiones!)

$$\begin{array}{ll} x+x+x=3x & x\cdot x\cdot x\cdot x=x^3 \\ x+2x+2x+x=6x & x\cdot x^2\cdot x^2\cdot x=x^6 \\ 2x+3x+7x=12x & x^2\cdot x^3\cdot x^7=x^{12} \end{array}$$

☞ Ejemplo: cuidado con los signos negativos. En un caso el signo menos forma parte de la potencia y en el otro no.

$$-2^4=-2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=-16$$
$$(-2)^4=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=+16$$

❑ Exponente entero.

Recuerda cuando el exponente es un entero negativo:

Si a es un número real no nulo y n es un número entero definimos:

$$a^{-n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n$$

☞ Ejemplo:

$$5^{-2}=\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{1}{25} \qquad \left(\frac{3}{5}\right)^{-2}=\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$$
$$3^{-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{1}{3} \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-4}=\left(\sqrt{2}\right)^4=4$$

Un error común es confundir a^{-n} con $(-a)^n$. Observa:

- $3^{-2}=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$
- $(-3)^2=(-3)\cdot(-3)=9$

❑ Exponente fraccionario.

¿Qué podemos entender por $5^{\frac{2}{3}}$? ¿Qué valor puede asignarse a esa "potencia? Llamémosle x:

$$x=5^{\frac{2}{3}} \xrightarrow{\text{al cubo}} x^3=\left(5^{\frac{2}{3}}\right)^3 \xrightarrow{3\cdot 2/3=2} x^3=5^2 \xrightarrow{\text{def radical}} x=\sqrt[3]{5^2}$$

Esto motiva la siguiente definición:

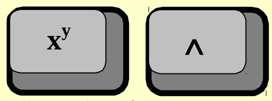
Sea $a>0$ un número real, m un número entero y n un número natural. Definimos:

$$a^{m/n}=\sqrt[n]{a^m}$$

☞ Ejemplo: expresemos $3^{\frac{2}{5}}$ como radical y $\sqrt[4]{27}$ como potencia :

$$3^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{3^2}=\sqrt[5]{9}$$
$$\sqrt[4]{27}=\sqrt[4]{3^3}=3^{\frac{3}{4}}$$

:En la calculadora tenemos, para las potencias, las teclas:



Calcula con la máquina:

$3^{\frac{2}{5}}$, $2^{1,25}$, $125^{0,6}$

Exponente irracional.

Si $a > 0$ y x un número real determinado por las aproximaciones sucesivas

$$x \equiv \begin{cases} r_0 \leq r_1 \leq r_2 \ldots \\ s_0 \geq s_1 \geq s_2 \ldots \end{cases}$$

Definimos a^x como el número determinado por:

$$y \equiv \begin{cases} a^{r_0} \leq a^{r_1} \leq a^{r_2} \ldots \\ a^{s_0} \geq a^{s_1} \geq a^{s_2} \ldots \end{cases}$$

Propiedades de las potencias.

Repasemos con un par de ejemplos.

☞ <u>Ejemplo</u>: calculemos y simplifiquemos

$$\frac{(-3)^3}{(-3)^5} = (-3)^{-2} = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$$

$$\left(2^{-3}\right)^{-2} = 2^6 = 64$$

$$\frac{\left(a^2 b^{-2}\right)^2 a^{-1} c^5}{a^{-2}\left(b^3 c\right)^3} = \frac{a^4 b^{-4} a^{-1} c^5}{a^{-2} b^9 c^3} = a^{4+(-1)-(-2)} b^{-4-9} c^{5-3} = a^5 b^{-13} c^2$$

☞ <u>Ejemplo</u>: simplifiquemos escribiendo los radicales como potencias:

$$\frac{\sqrt{8\sqrt[3]{32}}}{16} = \frac{\left(2^3 \cdot 2^{5/3}\right)^{1/2}}{2^4} = \frac{\left(2^{11/3}\right)^{1/2}}{2^4} = 2^{\frac{11}{6}-4} = 2^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{32}}$$

<u>Propiedades de las potencias</u>:

Sea a > 0 y sean x e y son números reales. Se verifica:

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $a^x : a^y = a^{x-y}$
- $\left(a^x\right)^y = a^{x \cdot y}$
- $\left(a \cdot b\right)^x = a^x \cdot b^x$
- $\left(a : b\right)^x = a^x : b^x$
- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

5. Logaritmos

Concepto de logaritmo

Observemos que toda operación lleva aparejada una inversa:

La logaritmación se introduce como la operación inversa de la exponenciación.

Suma vs Resta → $a - b$ es el nº que sumado a b da a.

Producto vs Cociente → $a : b$ es el nº que multiplicado por b da a

Potencia vs Raíz → $a^{1/n}$ es el número que elevado a n da a

Esto permite "despejar" en las igualdades:

$$x + y = z \Longrightarrow x = z - y$$

$$x \cdot y = z \Longrightarrow x = z : y$$

$$x^n = y \Longrightarrow x = \sqrt[n]{y}$$

¿Cómo se definirá la operación inversa de la exponenciación?

¿Cómo despejar un exponente?

$$a^x = y \Longrightarrow x = ?$$

Este es el punto de partida de los logaritmos:

Sea $a > 0$. Llamamos logaritmo en base a de y, y se escribe $\log_a y$, al exponente al que hay que elevar a para obtener y:

$$\log_a y = x \overset{def}{\Longleftrightarrow} a^x = y$$

Para que tenga sentido, también se suele exigir que la base no sea 1.

☞ Nota: Sólo los números positivos tienen logaritmos, pues:

$$\log_a y = x \to a^x = y \to y > 0$$

☞ Ejemplos:

$\log_2 16 = 4$ porque $2^4 = 16$

$\log_2 \frac{1}{4} = -2$ porque $2^{-2} = \frac{1}{4}$

$\log_5 \sqrt[3]{25} = \frac{2}{3}$ porque $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{25}$

☞ Ejemplos: expresemos con notación logarítmica

$2^3 = 8 \to \log_2 8 = 3$

$3^{-2} = \frac{1}{9} \to \log_3 \frac{1}{9} = -2$

$2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} \to \log_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$

☞ Ejemplos: obtengamos x:

$\log_2 x = 3 \to x = 2^3 \to x = 8$

$\log_2 16 = x \to 2^x = 16 \to 2^x = 2^4 \to x = 4$

$\log_x 5 = \frac{1}{2} \to \sqrt{x} = 5 \to x = 5^2 \to x = 25$

☞ Ejemplos: despejemos x de las *expresiones* siguientes

$y = 2^x \to x = \log_2 y$

$y = \log_3 (x+1) \to x + 1 = 3^y \to x = 3^y - 1$

Las teclas de la calculadora para el cálculo de logaritmos son:

log **ln**

- La primera calcula los logaritmos en base 10 o decimales.
- La segunda calcula los logaritmosen base "e" o neperianos. Se les llama así en honor al matemático Neper.

Los ejemplos ponen de manifiesto la reciprocidad de la exponenciacón y la logaritmación.

Para todo $x > 0$ se tiene:

$$\log_a a^x = x \quad \text{y} \quad a^{\log_a x} = x$$

☞ Ejemplo: ¿cuál es el logaritmo decimal de 15? Es un número irracional,

15 **log** ⇒ **1.17609125**

Una pequeña comprobación:

1.17609 **SHIFT** **log** ⇒ **14.9999565**

❑ Propiedades de los logaritmos:

El logaritmo de 1 es cero:	$\log_a 1 = 0$
El logaritmo de la base es 1:	$\log_a a = 1$
Logaritmo de un producto:	$\log_a (x \cdot y) = \log_a (x) + \log_a (y)$
Logaritmo de un cociente:	$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a (x) - \log_a (y)$
Logaritmo de una potencia:	$\log_a (x^y) = y \cdot \log_a (x)$
Cambio de base:	$\log_a (x) = \frac{\log_b (x)}{\log_b (a)}$

☞ Ejemplo: resolvamos la ecuación $\log_3 x + \log_3 5 = 1$.

$$\log_3 x + \log_3 5 = 1 \to \log_3 (5x) = 1 \to 5x = 3^1 \to x = \frac{3}{5}$$

☞ Ejemplo: hallemos el valor de x en $\log_3 x + 3 = \log_3 6$

$$\log_3 x + 3 = \log_3 6 \to \log_3 x - \log_3 6 = -3 \to \log_3 \frac{x}{6} = -3$$

Aplicando ahora la definición de logaritmo:

$$\frac{x}{6} = 3^{-3} \to \frac{x}{6} = \frac{1}{27} \to x = \frac{2}{9}$$

☞ Ejemplo: obtén la relación que hay entre A y B si $\log_2 A - 3\log_2 B = 1$.

$$\log_2 A - 3\log_2 B = 1 \to \log_2 A - \log_2 B^3 = 1 \to \log_2 \frac{A}{B^3} = 1$$

Aplicando ahora la definición de logaritmo:

$$\frac{A}{B^3} = 2^1 \to \frac{A}{B^3} = 2 \to A = 2B^3$$

☞ Ejemplo: Obtengamos x en $2^x = 5$, aproximándolo con cinco decimales.

Por definición de logaritmo: $2^x = 5 \to x = \log_2 5$

Cambiando de base: $x = \log_2 5 = \frac{\ln 5}{\ln 2} \approx 2.32193$

Resuelve
$\log_5 2 + 3\log_5 x = -1$

Con la calculadora comprobamos lo obtenido:
$2^{2,32193} = 5,000006\ldots$

6.Notación científica.

❑ Qué es la notación científica.

En el estudio del Universo nos encontramos con magnitudes que, desde nuestro punto de vista, son enormemente grandes o pequeñas. Por ejemplo, ¿cuál es la masa de la Tierra? ¿Y la masa de un electrón? Para expresar esas masas se usa la denominada notación científica:

$$M_T = 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg} = 5\underbrace{980000000000000000000000}_{24 \text{ cifras}} \text{ kg}$$

$$m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} = 0.\underbrace{0000000000000000000000000000009}_{31 \text{ cifras}}11 \text{ kg}$$

Si no se está acostumbrado a usarla puede parecer un tanto confusa. Pero, todo lo contrario: con ella vemos en el exponente de 10 las cifras del número, con lo que el orden de la magnitud del número es claro.

Es una manera compacta y simple de escribir números de esos órdenes usada en todas las Ciencias: Física, Química, Biología, Astronomía,…

Un número en notación científica consta de:

$$N = \underbrace{a}_{\text{parte entera}} \;.\; \underbrace{bcd\ldots}_{\text{parte decimal}} \cdot \underbrace{10^n}_{\text{orden}}$$

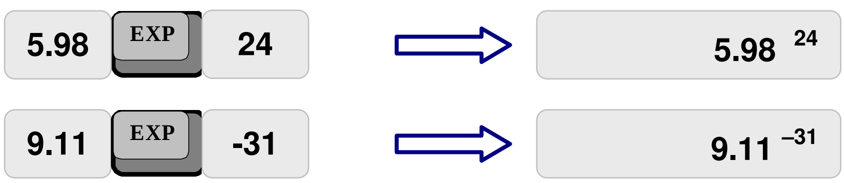
- Una parte entera formada por una sola cifra que no es cero.
- Una parte decimal (el resto de las cifras significativas).
- Una potencia de 10 (que da el orden de la magnitud del número).
- Si n es positivo, entonces N es “grande”, y si n es negativo N es “pequeño".
- El exponente n indica el orden de la magnitud.

Los prefijos más usados para designar órdenes de magnitud son:

- tera: 10^{12}
- giga: 10^{9}
- mega: 10^{6}
- kilo: 10^{3}
- hecto: 10^{2}
- deca: 10
- deci: 10^{-1}
- centi: 10^{-2}
- mili: 10^{-3}
- micro: 10^{-6}
- nano: 10^{-9}
- pico: 10^{-12}

❑ Operaciones con la notación científica.

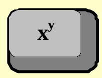
Para introducir en la calculadora las masas de la Tierra y del electrón:



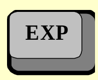
El producto y el cociente de dos números en notación científica es inmediato.

Sin embargo, para sumarlos o restarlos directamente, ambos deben ser del mismo orden. Todos estos cálculos pueden realizarse con gran rapidez y facilidad gracias con cualquier calculadora científica.

¡Cuidado! No debemos confundir la tecla de las potencias:



con la de la notación científica



7.Orden en la recta real

❑ La relación de orden en ℝ .

La relación de orden queda definida así:

Se dice que a es menor que b (o que b es mayor que a), y se escribe $a < b$, si $b - a$ es positivo:

$$a < b \overset{def}{\Longleftrightarrow} b - a \text{ es positivo}$$

Observemos que si x es un número real positivo ($x > 0$) entonces x está a la derecha de 0 en la recta real.

Consideremos ahora la siguiente cuestión: ¿para qué valores de x existe tiene sentido $\sqrt{x}$? Cuidado: la raíz cuadrada de cero existe (y es cero). Así, la expresión existe para x positivo ($x > 0$) o cero ($x = 0$): $x \geq 0$.

Dados dos números reales a y b definimos

$$a \leq b \overset{def}{\Longleftrightarrow} a < b \text{ o } a = b$$

❑ Intervalos.

Resumimos en una tabla todas las posibilidades:

Nombre	*Símbolo*	*Significado*	*Representación*
Intervalo abierto desde *a* hasta *b*	$(a\,,b)$	$\{a < x < b\}$	
Intervalo cerrado desde *a* hasta *b*	$[a\,,b]$	$\{a \leq x \leq b\}$	
Intervalo abierto – cerrado desde *a* hasta *b*	$(a\,,b]$	$\{a < x \leq b\}$	
Intervalo cerrado – abierto desde *a* hasta *b*.	$[a\,,b)$	$\{a \leq x < b\}$	
Intervalo abierto hasta *b*	$(-\infty\,,b)$	$\{-\infty < x < b\}$	
Intervalo cerrado hasta *b*	$(-\infty\,,b]$	$\{-\infty < x \leq b\}$	
Intervalo abierto desde *a*	$(a\,,+\infty)$	$\{a < x < +\infty\}$	
Intervalo cerrado desde *a*	$[a\,,+\infty)$	$\{a \leq x < +\infty\}$	

☞ Ejemplo: estudiemos para qué valores de x existe $\ln(2x-6)$.

El argumento debe ser positivo: $2x-6>0$

Despejemos: $2x>6 \rightarrow x>3$

Debe estar x en el intervalo $(3\,,+\infty)$

☞ Ejemplo: estudiemos para qué valores de x existe $\sqrt{8-2x}$.

El argumento debe ser 'no negativo':

$$8-2x \geq 0$$

Despejemos:

$$8-2x \geq 0 \rightarrow -2x \geq -8 \rightarrow x \leq \frac{-8}{-2} \rightarrow x \leq 4$$

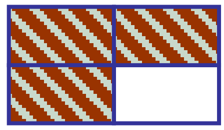
Recuerda: al pasar un número negativo multiplicando o dividiendo al otro miembro debe cambiarse el sentido de la desigualdad.

Debe estar x en el intervalo

$$(-\infty\,,4]$$

8. Anexo I: repaso del cálculo con racionales.

❑ Concepto de fracción.



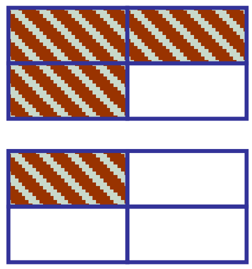
Consideremos una unidad que, por ejemplo, puede representarse como una tarta. Dividámosla en cuatro partes iguales. Cada una de las partes en que está dividida es una cuarta parte. Tómense tres de estas partes. De este modo se tienen las tres cuartas partes de una tarta.

Los números que representan estas cantidades se llaman fracciones, quebrados o números racionales., y se representan por medio de dos números enteros separados por una línea horizontal. El que está bajo la barra se llama denominador y el que está sobre la barra numerador.

En este caso se divide la tarta en 4 partes. Se toman 3 y se deja 1, así se han tomado $\frac{3}{4}$ de la tarta y se ha dejado $\frac{1}{4}$ de ella.

Observemos que el denominador de una fracción no puede ser cero: no tiene sentido dividir una unidad en cero partes.

❑ La fracción como cociente.

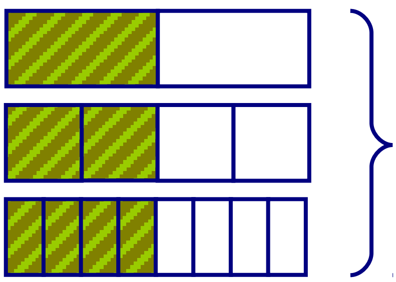


Las fracciones se emplean también para expresar el cociente de dos enteros. Por ejemplo, si disponemos de 5 tartas y las repartimos equitativamente entre 4 personas, cada una recibirá $\frac{5}{4}$ de tarta. Se divide cada unidad en 4 partes iguales y cada uno recibe 5 de esas porciones. Como el resultado de dividir 5 entre 4 es 1,25, se establece la equivalencia entre la forma decimal y la fraccionaria: $\frac{5}{4}=1{,}25$

❑ Igualdad o equivalencia de fracciones.

Dos fracciones se dice que son equivalentes cuando representan el mismo cociente de números enteros. Por ejemplo:

Para obtener fracciones equivalentes entre sí multiplicamos o dividimos sus dos términos por un mismo número.



$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}$$

Siempre que podamos debemos simplificar una fracción; esto es, sustituirla por otra equivalente con los términos más sencillos. Esto podrá hacerse cuando numerador y denominador sean divisibles por un mismo número.

No debemos olvidar el criterio general de equivalencia:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c$$

Reducción a común denominador.

En muchas ocasiones, dadas varias fracciones conviene convertirlas en otras equivalentes que tengan los mismos denominadores. Basta para ello tomar como denominador común el producto de todos los denominadores.

Ahora bien, si deseamos que los números sean lo menor posible tomaremos como denominador común el m.c.m. de todos los denominadores.

Por ejemplo, para reducir a común denominador a $\frac{7}{6}$ y $\frac{9}{10}$:

$$\mathrm{mcm}(6,10)=30 \rightarrow \left\{\begin{matrix} 30:6=5 \\ 30:10=3 \end{matrix}\right\} \rightarrow \frac{7}{6}=\frac{7\cdot 5}{6\cdot 5}=\frac{35}{30} \text{ y } \frac{9}{10}=\frac{9\cdot 3}{10\cdot 3}=\frac{27}{30}$$

Comparación.

Los números fraccionarios están ordenados de manera que de dos fracciones con igual denominador natural es mayor que de mayor numerador.

Para comparar fracciones las reducimos previamente a común denominador. También podemos intentar compararlas a través de su expresión decimal.

Comparemos, usando ambos métodos $\frac{5}{4}$ y $\frac{7}{6}$:

$$\frac{5}{4}=\frac{15}{12} \text{ y } \frac{7}{6}=\frac{14}{12} \Rightarrow \frac{7}{6}<\frac{5}{4} \qquad \frac{5}{4}=1{,}25 \text{ y } \frac{7}{6}=1{,}\hat{6} \Rightarrow \frac{7}{6}<\frac{5}{4}$$

Suma y resta.

La suma / resta de fracciones con igual denominador es otra fracción con igual denominador, cuyo numerador es la suma / resta de los numeradores. Si no tienen igual denominador, reducimos antes a común denominador.

$$2+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}=\frac{12}{6}+\frac{4}{6}-\frac{5}{6}=\frac{12+4-5}{6}=\frac{11}{6}$$

Algunas calculadoras científicas permiten realizar cálculos con números racionales en forma fraccionaria. La tecla que permite introducir quebrados es:

a b/c

Para introducir ¾ pulsaremos la combinación

3 **a b/c** **4**

Aparecerá en la pantalla de la siguiente forma:

3 _| 4

Observa que la fracción es simplificada automáticamente hasta su equivalente irreducible.

Es muy probable que necesites usar la tecla de la fracción en combinación con la tecla de 2ª función

INV

Para escribir un número mixto como 2½ en forma fraccionaria: 5/2.

Practica con la máquina para conocer las posibilidades que ofrece.

Producto.

El producto de fracciones es otra fracción cuyo numerador es el producto de sus numeradores, y cuyo denominador es el producto de sus denominadores.

Por ejemplo: $\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{4}=\frac{3\cdot 7}{5\cdot 4}=\frac{21}{20}$ y $3\cdot\frac{2}{9}=\frac{3\cdot 2}{9}=\frac{2}{3}$.

Cociente.

El cociente de dos fracciones es el producto de la primera por la inversa de la segunda. Veamos algunos cálculos como ejemplo:

$$\frac{3}{5}:\frac{4}{9}=\frac{3\cdot 9}{5\cdot 4}=\frac{27}{20} \text{ y } 3:\frac{5}{2}=\frac{3\cdot 2}{1\cdot 5}=\frac{6}{5}$$

Recetas de cálculo rápido:

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd}$$

$$a\cdot\frac{b}{c}=\frac{ab}{c}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{bc}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{a}{bc} \text{ y } \frac{a}{\frac{b}{c}}=\frac{ac}{b}$$

9. Anexo II: Números radicales.

❑ Definición y existencia

Llamamos raíz *n*–ésima del número a al número b, que elevado a n nos da *a*:

$$\sqrt[n]{a}=b \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} b^n=a$$

$\sqrt[n]{a}$ se denomina radical, a radicando y n índice.

No siempre existe la raíz de un número real:

- Si $a\geq 0 \rightarrow \sqrt[n]{a}$ existe para n cualquiera.
- Si $a<0 \rightarrow \sqrt[n]{a}$ existe sólo para n impar.

☞ Ejemplos:

- Hay dos números que elevados al cuadrado dan 25. Son:

$$\sqrt{25}=5 \text{ y } -\sqrt{25}=-5$$

- Sólo hay un número que elevado al cubo da –8. Es $\sqrt[3]{-8}=-2$

No debemos confundir:

$\sqrt{-25}$ que no existe.

$-\sqrt{25}$ que es igual a –5.

❑ Equivalencia.

Se verifica: $\sqrt[n]{a}=\sqrt[np]{a^p}$

La propiedad de la izquierda nos dice que si en un radical multiplicamos el índice y el exponente del radicando por un mismo número obtenemos un radical equivalente.

☞ Ejemplo: Simplifiquemos $\sqrt[4]{25}$:

$$\sqrt[4]{25}=\sqrt[4]{5^2}=\sqrt[2]{5^1}=\sqrt{5}$$

☞ Ejemplo: expresemos con igual índice $\sqrt[4]{3}$ y $\sqrt[6]{5}$.

$$\text{m.c.m.}(4,6)=12 \rightarrow \begin{Bmatrix} 12:4=3 \\ 12:6=2 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{3^1}=\sqrt[4\cdot 3]{3^{1\cdot 3}}=\sqrt[12]{27} \\ \sqrt[6]{5^1}=\sqrt[6\cdot 2]{5^{1\cdot 2}}=\sqrt[12]{25} \end{cases}$$

❑ Producto de radicales.

Se verifica: $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$

La propiedad de la izquierda nos dice que el producto de dos radicales de igual índice es otro radical del mismo índice cuyo radicando es el producto de los radicandos de los factores.

☞ Ejemplo: Reduzcamos a un único radical el producto $\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}$:

$$\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{5\cdot 2}=\sqrt{10}$$

☞ Ejemplo: Saquemos factores del radical $\sqrt{12}$:

$$\sqrt{12}=\sqrt{4\cdot 3}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}=2\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

❑ Cociente de radicales.

Se verifica: $$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

☞ Ejemplo: Reduzcamos a un radical $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$:

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{8}{2}}=\sqrt{4}=2$$

La propiedad de la izquierda nos dice que el cociente de dos radicales de igual índice es otro radical del mismo índice cuyo radicando es el cociente de los radicandos del dividendo y del divisor.

❑ Raíz de una raíz.

Se verifica: $$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$$

☞ Ejemplo: Reduzcamos a un radical $\sqrt{\sqrt[3]{5}}$:

$$\sqrt{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[2\cdot 3]{5}=\sqrt[6]{5}$$

La propiedad de la izquierda nos dice que la raíz de un radical es un radical con el radicando de éste y cuyo índice es el producto de los índices.

❑ Suma y resta de radicales.

¿Será también $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$? Es fácil comprobarlo:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{3}+\sqrt{2}=3{,}146264\ldots\\ \sqrt{5}=2{,}236067\ldots\end{array}\right\}\rightarrow\ \sqrt{2}+\sqrt{3}\neq\sqrt{5}$$

No olvidemos que, en general, la suma de raíces no es igual a la raíz de la suma de los radicandos.c

Sólo pueden sumarse (o restarse) los radicales que son iguales.

☞ Ejemplo: Efectuemos $\sqrt{8}+\sqrt{18}$:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{8}=\sqrt{4\cdot 2}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}=2\cdot\sqrt{2}\\ \sqrt{18}=\sqrt{9\cdot 2}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}=3\cdot\sqrt{2}\end{array}\right|\rightarrow\sqrt{8}+\sqrt{18}=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=5\sqrt{2}$$

❑ Racionalización de denominadores.

A veces es conveniente que en una expresión fraccionaria no aparezcan raíces en el denominador. Cuando ello es posible, se consigue multiplicando numerador y denominador por una misma expresión adecuada:

☞ Ejemplo: Quitemos la raíz del denominador en $\frac{3}{\sqrt{2}}$ y en $\frac{1}{5-\sqrt{2}}$:

$$\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{3\cdot\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{5-\sqrt{3}}=\frac{1}{5-\sqrt{3}}\cdot\frac{5+\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}=\frac{5+\sqrt{3}}{5^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{5+\sqrt{3}}{25-3}=\frac{5+\sqrt{3}}{22}$$

10.Anexo III: El número e.

Una ligerísima semblanza la tenemos en la Wikipedia:

"La constante matemática e es uno de los números irracionales más importantes. Es aproximadamente igual a 2,71828 y aparece en diversas ramas de las Matemáticas, al ser la base de los logaritmos naturales o neperianos y formar parte de las ecuaciones del interés compuesto y otros muchos problemas.

El número e, conocido en ocasiones como número de Euler o constante de Napier, fue reconocido y utilizado por primera vez por el matemático escocés John Napier o Neper, quien introdujo el concepto de logaritmo en el cálculo matemático.

Juega un papel importante en el cálculo y en el análisis matemático, en la definición de la función más importante de la matemática, la función exponencial, así como π lo es de la geometría y el número i o unidad imaginaria del análisis complejo y del álgebra. Sin el concurso de la unidad imaginaria las ecuaciones de 2 grado, con discriminante negativo, no tendrían solución.

El número e, al igual que el número π y el número áureo ϕ, es un número irracional, no expresable mediante una razón de dos números enteros; o bien, no puede ser representado por un numeral decimal exacto o un decimal periódico. Además, también como π, es un número trascendente, es decir, que no puede ser raíz de ninguna ecuación algebraica con coeficientes racionales."

El logaritmo en base e es usualmente denominado logaritmo neperiano o natural, y desde la caída en desuso de los decimales, simplemente logaritmo.

Así:

$$\ln \mathsf{x} := \log_{\mathsf{e}} \mathsf{x}$$

El valor de e, truncado a sus primeras cifras decimales es el siguiente:

$$\mathrm{e} \approx 2.71828182845904523536$$

Una definición común es la siguiente:

Definimos:

$$\mathrm{e} := 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

¿Una "suma infinita"? ¿Qué es eso? Pues se trata de un límite hacia el que se acercan las sumas finitas parciales cuando aumentamos el número de sumandos.

Ahí aparecen los números factoriales

$$\mathsf{n}! = 1 \cdot 2 \cdots \mathsf{n}$$

Por ejemplo:

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

Ejercicios de Fracciones

1. Calcula:

a) $2\cdot(-3)-4\cdot 4+(-7)\cdot 2$

b) $-3\cdot 4+(-6)\cdot 3+9$

c) $7-(-2)\cdot(-3)+4\cdot(-2)-9$

d) $7-3^2+(-3)^2$

2. Efectúa:

a) $3-\left(\frac{-2}{4}+\frac{1}{3}\right)$ b) $\frac{2}{3}\cdot 3+\frac{1}{6}$

c) $\frac{1}{9}:\frac{1}{18}-(-3)\cdot\frac{2}{9}$ d) $\frac{2}{\frac{3}{2}}-\frac{4}{9}\cdot 2$

3. Simplifica:

a) $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}:\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$ b) $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}:\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)$

c) $-\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\left(1-\frac{1}{2}\cdot 5\right)$ d) $\frac{1+\frac{1}{3}\cdot 2}{3}+7:\frac{3}{2}$

e) $\left(2-\frac{1}{1+3^{-1}}\right)\cdot 3-6^{-1}$ f) $\frac{7}{\frac{2}{3}}-\frac{\frac{7}{2}}{2}$

4. Opera hasta la fracción irreducible:

a) $\frac{1}{2+\frac{-1+2\cdot\frac{1}{4}}{3}}$ b) $\frac{2-\frac{2}{9}\cdot\frac{6}{8}-\left(\frac{-1}{3}\right)}{2+\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{20}+\left(-\frac{5}{12}\right)}$

c) $2+\frac{1}{2+3^{-1}}+\frac{4}{3}$ d) $\left(1-\frac{1}{1-\frac{4}{7}}\right)^{-1}$

5. Ordena, de menor a mayor:

$$\frac{-2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{-4}{3}, \frac{4}{9}, \frac{7}{6}, \frac{15}{4}$$

6. Dibuja en la recta real:

$$\frac{7}{3}, \frac{-5}{4}, \frac{6}{4}, 1{,}75$$

7. Escribe la expresión decimal de:

$$\frac{3}{5}, \frac{7}{9}, \frac{4}{15}, \frac{-7}{2}, \frac{8}{7}$$

8. Escribe en forma de fracción:

a) $0{,}625$ b) $-1{,}025$

c) $0{,}\hat{4}$ d) $3{,}4\overline{52}$

9. Calcula:

a) $(0{,}\hat{6}-1):8$

b) $0{,}\hat{6}+0{,}\hat{3}$

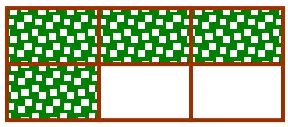
10. Expresa como

a) fracción y decimal el 40%.

b) fracción y porcentaje 0,28.

c) decimal y porcentaje 3/5.

d) fracción, porcentaje y decimal la proporción rayada respecto del total:



11. Calcula:

a) El 15% de 1 000

b) Las dos quintas partes de 35

c) La tercera parte de la mitad de 21

d) El doble de los 2/3 de 150

12. Juan va de compras a unos almacenes. En un CD se gasta la tercera parte del dinero que lleva. Luego, en un libro, las dos quintas partes del dinero inicial. Y, por último, gasta en un aperitivo los 4 € que le quedan.

¿Con cuánto dinero salió de compras?

13. Una tableta de calmante contiene el 20% de A.A.S., el 40% de vitamina C y el esto es excipiente. Si pesa 2 gr., ¿cuántos gramos hay de cada componente?

Ejercicios de Radicales

1. Efectúa las siguientes operaciones, simplificando todo lo posible:

a) $\sqrt{2}+\sqrt{8}$

b) $\sqrt{12}+3\sqrt{27}-\sqrt{75}$

c) $2\sqrt{2}-\sqrt{18}+\sqrt{50}$

2. Calcula las siguientes operaciones, dejando como resultado un único radical:

a) $\sqrt{x\,y}\cdot\sqrt{x^2y^3}$ b) $\dfrac{\sqrt{a^3b^5}}{\sqrt{a^2b^2}}$

3. Ídem.:

a) $\sqrt[3]{a\,b^{-4}}\cdot\sqrt[3]{a^{-2}b^3}$ b) $\dfrac{\sqrt[5]{x^3y^{-4}}\cdot\sqrt[5]{x\,y}}{\sqrt[5]{x^{-3}y^2}}$

4. Calcula:

a) $(2\sqrt{3})^2$

b) $3\cdot(\sqrt{2})^2$

c) $(5+\sqrt{2})(5-\sqrt{2})$

d) $(\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5})$

5. Racionaliza las siguientes expresiones (esto es, escribe una igual a ella sin radicales en el "denominador"):

a) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$

c) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

e) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-2}$ f) $\dfrac{\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$

6. Efectúa las siguientes operaciones, simplificando todo lo posible:

a) $\sqrt{2}+\sqrt{8}$

b) $\sqrt{12}+3\sqrt{27}-\sqrt{75}$

c) $2\sqrt{2}-\sqrt{18}+\sqrt{50}$

d) $\sqrt{48}+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{18}$

7. Efectúa las siguientes adiciones y restas:

a) $2a\sqrt{3}-\sqrt{27a^2}+a\sqrt{12}$

b) $\sqrt{4a-8b}-\sqrt{9a-18b}+2\sqrt{16a-32b}$

8. Calcula las siguientes operaciones, dejando como resultado un único radical:

a) $x\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}$

b) $\sqrt{a}:\sqrt[4]{a^3}$

c) $\dfrac{\sqrt{2x}\cdot\sqrt[3]{3x^2}}{\sqrt[6]{x^{-2}}}$

d) $\dfrac{a\cdot\sqrt{a\,b}}{\sqrt{\sqrt[3]{a^2\,b}}}$

9. Desarrolla utilizando las "identidades notables":

a) $\left(1+\sqrt{3}\right)^2$ b) $\left(1-\sqrt{2}\right)^2$

c) $\left(2+\sqrt{5}\right)^2$ d) $\left(2+\sqrt{5}\right)\cdot\left(2-\sqrt{5}\right)$

e) $\left(1+2\sqrt{3}\right)^2$ f) $\left(3+\sqrt{2}\right)\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)$

g) $\left(2-3\sqrt{2}\right)^2$ h) $\left(3+2\sqrt{5}\right)\cdot\left(3-2\sqrt{5}\right)$

10. Obtén el valor de x:

a) $x^3=5$ b) $2x^2-3=5$

c) $3x^3+4=12$ d) $3\sqrt{x}-1=5$

e) $\sqrt[3]{x^2}+2=5$ f) $3\sqrt[5]{x}+2=\dfrac{1}{2}$

11. Racionaliza las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{2a}{\sqrt[5]{b^2}}$ b) $\dfrac{x}{\sqrt{x}}$

c) $\dfrac{\sqrt{a}}{2-\sqrt{a}}$ d) $\dfrac{6}{2\sqrt{1+6x}}$

12. Si la superficie de un solar cuadrado es de 800 m2, ¿cuántos metros mide de lado?

13. Un cubo tiene de capacidad 1528 litros. ¿Cuántos centímetros mide su arista?

Ejercicios

1. Completa la siguiente tabla con SÍ o NO:

	$\frac{7}{3}$	$\sqrt{3}$	-3	$0{,}54$
Entero				
Racional				
Irracional				
Real				

2. Obtén la expresión decimal de estos números:

$$\frac{5}{4}\,,\ \frac{7}{15}\,,\ -\frac{5}{11}\,,\ \frac{8}{4}$$

3. Dados los números

$$r=0{,}3434\ \ ;\ \ s=0{,}3434\ldots\ \ ;\ \ t=0{,}3\hat{4}$$

Explica las características de cada uno, e indica si hay alguna coincidencia. Pásalos a forma fraccionaria y compruébalo.

4. Representa en la recta real $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{3}$

5. Hace unos años se usaban con asiduidad los "números mixtos". Por ejemplo: 3½ es un número que se compone de una parte entera (3) y una parte fraccionaria inferior a la unidad (½). Es:

$$3\frac{1}{2}=3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}\quad(=3{,}5)$$

a) Pasa a fracción: $5\frac{1}{4}$ y $4\frac{2}{3}$.

b) Pasa a nº mixto: $\frac{15}{2}\,,\ \frac{13}{4}$ y $\frac{7}{3}$.

6. En un rectángulo de perímetro 8 cm., la altura mide 1 cm.

¿Cuál es la longitud de la diagonal? ¿Cómo es ese número? Redondéala hasta las centésimas.

7. Usando el Teorema de Pitágoras, construye unos segmentos cuyas medidas sean $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ y $\sqrt{12}$.

8. Obtén las sucesivas aproximaciones por defecto y por exceso de $\sqrt[5]{2}$ hasta las milésimas.

9.

a) Expresa $\frac{4}{9}$ con dos decimales exactos. ¿Cuál es el error cometido? Acótalo.

b) La aproximación $\pi\simeq3{,}1416$, ¿es por defecto o por exceso? Halla y acota el error absoluto.

10. Calcula el área y el perímetro de un triángulo equilátero de lado 6 cm. ¿Cómo son esos números? Aproxima el área hasta las milésimas.

11. Al pesar 252 gr. de fruta se dio como aproximación 250 gr. , y al medir el peso de un automóvil de 1902 kg. se dio 1900 kg. Calcula:

a) El error absoluto de cada medida.

b) Los errores relativos cometidos.

c) ¿Cuál es la aproximación más precisa?

12. Calcula las siguientes potencias:

$$(-3)^5\,,\ \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\,,\ (-2)^4\,,\ -2^4\,,\ (\sqrt{3})^0\,,\ (\sqrt{5})^{-2}$$

13. Escribe en forma de potencia, con la menor base posible:

a) $8\,,\ \frac{1}{4}\,,\ 125\,,\ \frac{1}{5}$

b) $\sqrt[3]{7}\,,\ \sqrt[4]{27}\,,\ \frac{1}{\sqrt[3]{5}}\,,\ \frac{2}{\sqrt[3]{2}}$

14. Escribe en forma de radical las siguientes potencias:

$$5^{\frac{2}{3}}\,,\ 3^{\frac{-1}{4}}\,,\ 2^{\frac{1}{5}}\,,\ 7^{\frac{-2}{9}}$$

15. Escribe como un producto de dos potencias, cuyas bases sean números primos:

a) $(\sqrt[3]{4}\cdot5)^{-2}$ b) $\frac{10}{\sqrt[3]{20}}$

16. Simplifica, expresando en forma de potencia:

a) $\frac{\sqrt[3]{x\cdot\sqrt{x}}}{x^2}$ b) $16^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[5]{\frac{1}{4}}:\sqrt{2}$

17. Obtén con la calculadora la expresión decimal de

a) $3^{-\sqrt{2}}$ b) $(\sqrt[4]{5})^{\frac{1}{3}}$

18. Completando la siguiente tabla, representa la gráfica de la función exponencial $y = 2^x$.

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2^x$						

¿Cuál es la tendencia cuando x toma valores "infinitamente pequeños" $(x \to -\infty)$? ¿Y cuando x toma valores "infinitamente grandes" $(x \to +\infty)$?

La función, ¿es creciente o decreciente?

19. Ídem para $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

20. Expresa usando notación científica:

e) 12 gigavatios (en vatios)

f) 2 nanosegundos (en segundos).

g) 13 micras (en metros).

21. Halla con la calculadora estas operaciones en notación científica, señalando la combinación de teclas:

a) $\dfrac{3\cdot 10^{-5}-2\cdot 10^{-4}}{4\cdot 10^{6}+3\cdot 10^{5}}$ b) $\dfrac{2\cdot 10^{3}+3{,}5\cdot 10^{5}}{2{,}25\cdot 10^{-5}-4\cdot 10^{-6}}$

22. Expresa en notación científica:

a) La velocidad de la luz, en m/s (c es aproximadamente 340.000 km/s).

b) La milésima parte de 3 cm., en metros.

c) El volumen de una caja (en mm^3) que tenga de alto 3 m., de largo 2,5 m. y de ancho 5 m.

d) La masa, en kg., del Sol.

23. Expresa bien en forma logarítmica, bien en forma de potencia:

a) $5^2=25$ b) $3^{-2}=\frac{1}{9}$

c) $\log_5\sqrt{5}=\frac{1}{2}$ d) $\log_2\frac{1}{8}=-3$

24. Obtén, sin calculadora, estos logaritmos decimales:

$\log_{10}100$, $\log_{10}0{,}01$, $\log_{10}\frac{1}{1000}$, $\log_{10}1$

25. Obtén razonadamente los logaritmos siguientes:

a) $\log_2 64$, $\log_2\frac{1}{4}$, $\log_2 0$

b) $\log_3\frac{1}{3}$, $\log_3 1$, $\log_3 27$

26. Obtén el valor de A en las igualdades:

c) $\log_3 A=-1$, $\log_{25}5=A$, $\log_A 2=3$

d) $\log_5 A=\frac{1}{2}$, $\log_2\frac{1}{2}=A$, $\log_A 3=\frac{1}{5}$

27. Halla el valor de x y obtén sus cuatro primeras cifras decimales:

a) $2^x=7$ b) $3^x=-9$

c) $5^x=\frac{1}{2}$ d) $3^{x-1}=27$

e) $2^{x+1}=3$ f) $3^{2x}=10$

28. Averigua a qué exponente hay que elevar 7 para obtener como resultado 2, dando una aproximación hasta las milésimas.

29. Despeja x en las fórmulas siguientes:

a) $y=3^x$, $y=\log_3 x$

b) $y=2^x-1$, $y=\log_2(x+5)$

c) $y=5^{3x+1}$, $y=\log_5(2x)-1$

30. Si $\log_{10}2=a$ y $\log_{10}3=b$, expresa en función de a y/o b:

a) $\log_{10}4$, $\log_{10}\sqrt{8}$, $\log_{10}5$

b) $\log_{10}\frac{1}{4}$, $\log_{10}\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\log_{10}0{,}9$

c) $\log_{10}6$, $\log_{10}\frac{2}{9}$, $\log_{10}\frac{\sqrt[3]{6}}{3}$

31. Despeja x :

a) $2\ln x = 3\ln A - \ln B$

b) $\ln x - \frac{1}{2}\ln a = 3\ln b + 4\ln c$

c) $\log_2 x = 1 - \log_2 A + 3\log_2 B$

d) $\log_3 x = -2 + \log_3 A - \frac{1}{5}\log_3 B$

32. Obtén la expresión decimal de:

$$\log_2 5 \qquad \log_3 \sqrt{5} \qquad \log_{1/3} 9 \qquad \log_{1/2} 3$$

33. Completando la siguiente tabla, representa en unos ejes de coordenadas la gráfica de la función logaritmo en base 2:

x	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16
$y=\log_2 x$								

¿Cuál es la tendencia cuando x toma valores que se van aproximando a cero $x \to 0+$?

¿Y cuando x toma valores "infinitamente grandes" $x \to +\infty$?

La función, ¿es creciente o decreciente?

34. Idem para la función logarítmica $y=\log_5 x$.

35. Ordena los siguientes números reales:

$$-\frac{1}{3} \; ; \; 1{,}25 \; ; \; \sqrt{2} \; ; \; \frac{13}{5} \; ; \; \sqrt[3]{4}$$

36. Expresa los siguientes intervalos o semirrectas de todas las formas posibles:

a) $A=\{x \, : \, 1 \le x < 3\}$

b) $B=(1,+\infty)$

c) C es el intervalo cerrado desde -1 hasta 2.

d) D es la semirrecta de la figura:

3

37. Si A y B son dos conjuntos se define

Su unión como el conjunto:

$$A \cup B \overset{\text{def}}{=} \{x \, : \, x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Su intersección como:

$$A \cap B \overset{\text{def}}{=} \{x \, : \, x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Obtén la unión y la intersección de:

a) $A=\{x \, : \, x>3\}$ y $B=[0,4]$

b) $A=[2,5)$ y $B=\{x \, : \, 1<x<7\}$

c) $A=\{x \, : \, -1 \le x < 1\}$ y $B=[1,4]$

d) $A=(0,1)$ y $B=[1,+\infty)$

38. Consideremos la fracción

$$f=\frac{x-2}{x+4}$$

donde x es una variable. El signo de f depende del valor de x: unas veces es positiva, otras es negativa, otras es cero e incluso puede no existir.

a) Obtén los valores de x para los que el numerador y el denominador es cero.

b) Halla el signo de la fracción para valores de x que estén en los tres intervalos abiertos que determinan esos dos ceros en la recta real.

c) Haz un esquema que resuma el estudio de signo detallado de la fracción.

d) Comprueba que el conjunto solución para la desigualdad $f<0$ es:

$$S=(-4,2)$$

39. Dada la fracción

$$f=\frac{x+3}{x-1}$$

a) Haz un estudio de signo detallado de la fracción, procediendo como en el ejercicio anterior.

b) Obtén el conjunto solución para $f<0$.

c) ¿Es $x=1$ solución? ¿Y $x=3$? ¿Y $x=-4$?

40. Estudia el signo del polinomio $p=x^2-5x+4$ y señala la solución para $p>0$.

41. Ídem para $p=16-x^2$.

42. Estudia el signo de la fracción $f=\dfrac{x-2}{x+3}$ según los valores de x . ¿Cuál es el conjunto solución para $f \ge 0$?

43. Ídem para $f=\dfrac{2x+6}{2-x}$

44. Señala en qué intervalo o intervalos debe estar x para que exista la fórmula:

a) $y=\dfrac{1}{3^x-9}$

b) $y=\ln(2x-6)$

c) $y=\sqrt{5x-10}$

Cuestiones

1. Razona sobre la veracidad o falsedad de los siguientes asertos:

a) Todo número racional es real.

b) Todo número real es racional.

c) Algunos números reales son racionales.

d) Todo número entero es racional.

e) Algunos números racionales son enteros.

f) Todos los números decimales son racionales.

g) Los números racionales llenan la recta.

2. Dados los números

$x = 0{,}1343434343434...$

$y = 0{,}1343344333444...$

responde sobre la certeza o no de:

$$x \in \mathbb{R} \ , \ y \in \mathbb{R} \ , \ x \in \mathbb{Q} \ , \ y \in \mathbb{Q}$$

3. Responde razonadamente sobre la certeza de:

a) La suma de dos irracionales es un irracional.

b) La suma de un racional y de un irracional es un número irracional.

4. Calcula $(-1)^n$.

5. Si x es un nº negativo, ordena de mayor a menor:

$$x \ , \ 2x \ , \ \frac{x}{2} \ , \ 3x \ , \ -x \ , \ -3x \ , \ 0$$

6. Me he liado con las propiedades de las potencias y he escrito las siguientes igualdades, que son todas falsas. Compruébalo y sustitúyelas por ciertas:

a) $3^2+3^3=3^{2+3}$ b) $3^5-3^2=3^{5-2}$

c) $\left(3^2\right)^4=3^{\left(2^3\right)}$ d) $3^2\cdot 5^4=(3\cdot 5)^{2+4}$

e) $(3+5)^2=3^2+5^2$ f) $(5-2)^2=5^3-2^3$

g) $2^{-3}=(-2)^3$ h) $25^{\frac{1}{2}}=25^{-2}$

7. Halla el menor y el mayor número de cada intervalo:

$$I=[2,+\infty) \ , \ J=(-4,5] \ , \ K=[3,7]$$

8. Investiga si el cuadrado de un número es siempre mayor que dicho número.

9. Si el producto de dos números a y b es –3, ¿cuál es el valor del doble del producto de sus cuadrados?

10. Se define el valor absoluto de un número real por:

$$|x| \overset{\text{def}}{=} \text{máx}(-x, x)$$

a) Calcula el valor de absoluto de –2, 3 y 0.

b) ¿Para qué valores de x se tiene que es $|x|=3$?

c) Idem. $|x|<5$

11. Se define la distancia entre dos números mediante:

$$d(x,y) \overset{\text{def}}{=} |x-y|$$

Comprueba mediante algunos ejemplos, dibujándolos en la recta, que dicha fórmula da efectivamente la distancia entre los puntos que representan a dos números.

12. Como $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$, ¿son siempre fracciones las potencias cuyo exponente es un entero negativo?

13. Sea $a > 0$. Averigua si al tomar $x > y$ entonces tenemos que es $a^x > a^y$

14. Especifica la relación hay entre A y B si:

a) $\log_{10} A+\log_{10} B=0$

b) $\log_2 A-\log_2 B=-1$

15. ¿Verdadero o falso? Si la igualdad es verdadera indica la propiedad en que se basa, y si es falsa cámbiala por una que sea cierta:

a) $\log_{10} 2+\log_{10} 3=\log_{10} 5$

b) $\log_{10} 15-\log_{10} 5=\log_{10} 3$

c) $\dfrac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3}=\log_{10} 5-\log_{10} 3$

d) $\ln(2a)+\ln 1=\ln(2a+1)$

e) $2\log_{10} 5=\log_{10} 25$

16. Halla el valor de a sabiendo que es

$$\log_a(N)=2 \ \text{ y } \ \log_a(8N)=5$$

17. Demuestra que:

a) $\log_a(b)\cdot\log_b(a)=1$ b) $\log_{1/a}(x)-\log_a x$

18. ¿Qué números tienen logaritmo entero en base 5?

Autoevaluación

1. Considera el número $\sqrt{5}$.

a) ¿Cómo se define dicho número?

b) ¿Es igual a alguna fracción de números enteros?

c) Su expresión decimal, ¿cómo es?

d) Aproxímalo hasta las milésimas por exceso. Calcula el error cometido ϵ .

e) Represéntalo en la recta real.

2. Efectúa las siguientes operaciones con radicales, racionalizando cuando sea necesario:

a) $\dfrac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a\,b^3}}{\sqrt{b}}$

b) $\sqrt{32}-3\sqrt{8}$

c) $\dfrac{\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$

3.

a) ¿A qué exponente debemos elevar 3 para obtener 5?

b) Halla x en las siguientes expresiones:

$$\log_3 x=-2\ ,\ \log_x 3=2\ ,\ \log_5 25=x$$

4. Considera la función $y=\log_3 x$:

a) Dibuja la gráfica ayudándote de esta tabla:

x	1/9	1/3	1	3	9
$y=\log_3 x$					

b) ¿Cuál es su dominio?

c) ¿Cuál es la tendencia de y cuando x toma valores que se van aproximando a cero $x\to 0+$? ¿Y cuando los toma “infinitamente grandes” $x\to+\infty$?

d) La función, ¿es creciente o decreciente?

e) Estudia el signo de la función.

5. Despeja x:

a) $\log_x 3=\dfrac{2}{3}$

b) $y=3^{2x}+1$

6. Si $\ln 2=a$ y $\ln 3=b$, expresa el siguiente logaritmo en función de a y de b :

$$\ln\frac{\sqrt{24}}{9}$$

7. Considera

$$A=[-2,1)\ \text{ y }\ B=(-1,\infty)$$

a) Expresa de todas las formas posibles esos conjuntos.

b) ¿Cuántos números enteros hay en ellos? ¿Y cuántos racionales?

c) Obtén $A\cup B$ y $A\cap B$.

8. Consideremos el polinomio

$$p=x^2-5x+4$$

a) ¿Para qué valores de x es positivo? ¿Para qué valores es negativo?

b) Resuelve la inecuación $p>0$.

Soluciones autoevaluación

1.

a) Es un número real que al cuadrado da como resultado 5.

b) No, ya que es un número irracional.

c) Es una expresión decimal ilimitada no periódica.

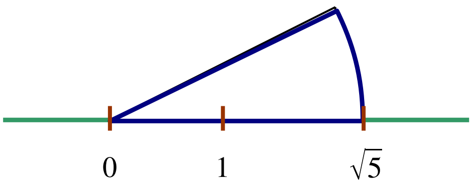
d) Aproximación:

$$\sqrt{5} \approx 2{,}237$$

Error cometido:

$$\varepsilon = \left|\sqrt{5} - 2{,}237\right| = 0{,}000932\ldots < 0{,}001$$

e) Utilizaremos el Teorema de Pitágoras:



2.

a) $$= \sqrt{\frac{a \cdot a b^3}{b}} = \sqrt{\frac{a^2 b^3}{b}} = \sqrt{a^2 b^2} = a b$$

b) $$= \sqrt{16 \cdot 2} - 3\sqrt{4 \cdot 2} = 4\sqrt{2} - 3 \cdot 2\sqrt{2} =$$
$$= 4\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$$

c) $$= \frac{\sqrt{5} \cdot (3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5}) \cdot (3+\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{5} \cdot 3 + \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{3^2 - (\sqrt{5})^2} =$$
$$= \frac{3\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2}{9-5} = \frac{3\sqrt{5}+5}{4}$$

3.

a) Sea x ese número:

$$3^x = 5 \ \rightarrow \ x = \frac{\log 5}{\log 3} = 1{,}46497\ldots$$

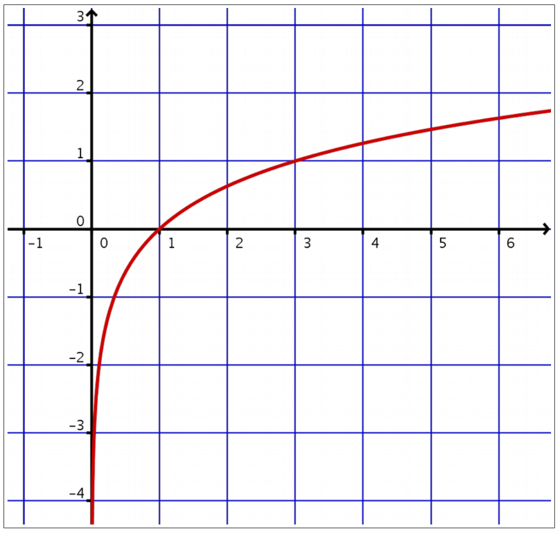
b) $$\log_3 x = -2 \ \rightarrow \ 3^{-2} = x \ \rightarrow \ x = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

c) $$\log_x 3 = 2 \ \rightarrow \ x^2 = 3 \ \rightarrow \ x = \sqrt{3}$$

d) $$\log_5 25 = x \ \rightarrow \ 5^x = 25 \ \rightarrow \ x = 2$$

4.

a) Aquí tenemos la gráfica:



b) Sólo existe cuando es $x > 0$, así que:

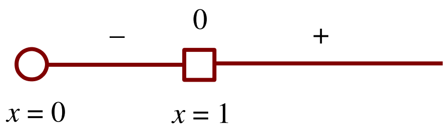
$$D = (0, +\infty)$$

c) Apreciamos en la gráfica y en la tabla que:

$$\text{si } \ x \to +\infty \ \text{ es } \ y \to +\infty$$
$$\text{si } \ x \to 0+ \ \text{ es } \ y \to -\infty$$

d) Vemos en la gráfica que es claramente creciente.

e) En la gráfica podemos observar que



5.

a) $$\log_x 3 = \frac{2}{3} \ \to \ x^{\frac{2}{3}} = 3 \ \to \ x = 3^{\frac{3}{2}} \ \to \ x = \sqrt{27}$$

b) $$y - 1 = 3^{2x} \to 2x = \log_3(y-1) \to x = \frac{1}{2}\log_3(y-1)$$

6. Es

$$\ln \frac{\sqrt{24}}{9} = \ln \frac{\sqrt{2^2 \cdot 3}}{3^2} = \ln\left(2 \cdot 3^{\frac{-3}{2}}\right) = \ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3$$

Luego:

$$\ln\frac{\sqrt{24}}{9}=a-\frac{3}{2}b$$

7.

a) A es el intervalo cerrado–abierto de -2 a 1.

$$A=\{x\ :\ -2\leq x<1\}$$

A es el conjunto de todos los números reales comprendidos entre -2 y 1, incluido -2.

A es el intervalo:

B es la semirrecta abierta desde -1.

$$B=\{x\ :\ x>-1\}$$

B es el conjunto de los números superiores a -1.

B es la semirrecta:

b) En A hay tres enteros: –2, –1 y 0.

En B hay infinitos enteros: 0, 1, 2, 3, 4, ...

En ambos hay infinidad de racionales, ya que entre dos reales cualesquiera hay infinitos números racionales e irracionales.

c) La unión e intersección son, respectivamente:

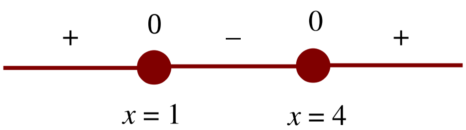
$$A\cup B=[-2,+\infty)$$

$$A\cap B=(-1,1)$$

8. Haremos un estudio de signo:

Ceros: $x^2-5x+4=0\ \rightarrow\ \left|\begin{array}{l}x=1\\x=4\end{array}\right.$

Intervalos de signo:



En el esquema de signos anterior podemos apreciar claramente en qué intervalos es p positivo y negativo.

La solución de $p>0$ es claramente

$$S=(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$$