TEMA 2

ÁLGEBRA

Ejercicios y Problemas

de

Álgebra

Ecuaciones de primer grado.

EJERCICIO 1:

Resolvamos las siguientes ecuaciones de primer grado.

a) $\dfrac{13-2x}{6}+\dfrac{5x-2}{4}=1-\dfrac{x+1}{12} \rightarrow \left\{x=-\dfrac{3}{4}\right\}$

b) $\dfrac{7x^2-9}{7}-2\left(\dfrac{x-3}{2}\right)^2=\dfrac{(x+2)^2}{2}-x \rightarrow \left\{x=\dfrac{109}{28}\right\}$

EJERCICIO 2:

Resolvamos las siguientes ecuaciones de primer grado con coeficientes literales.

a) $3a\,(x-2b)=b\,(x-3a) \xrightarrow{b\neq 3a} \left\{x=\dfrac{3ab}{3a-b}\right\}$

b) $\dfrac{2ax}{b}-\dfrac{4bx}{a}=5-b \xrightarrow{a^2\neq 2b^2} \left\{x=\dfrac{5ab-ab^2}{2a^2-2b^2}\right\}$

Ecuaciones de primer grado fraccionarias

EJERCICIO 2:

Resolvamos las siguientes ecuaciones de primer grado fraccionarias.

a) $\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{4}{x-1}=\dfrac{2\,(x-3)}{x^2-1} \rightarrow \left\{x=-\dfrac{1}{3}\right\}$

b) $\dfrac{2\,(3x+4)}{x^2-4}-\dfrac{x+3}{x-2}=\dfrac{4-x}{x+2} \rightarrow x=\cancel{2} \rightarrow \{\}$

EJERCICIO 3:

Resolvamos las siguientes ecuaciones fraccionarias de primer grado con coeficientes literales:

a) $\dfrac{3}{ax-1}+\dfrac{2a}{ax+1}=\dfrac{4a^2x}{a^2x^2-1} \rightarrow x=\cancel{\dfrac{1}{a}} \rightarrow \{\}$

b) $\dfrac{3x}{3x-a}-\dfrac{9x^2}{9ax^2-a^3}=1-\dfrac{1}{a} \rightarrow \left\{x=\dfrac{1-a}{3}\right\}$

Ecuaciones de segundo grado

EJERCICIO 4:

Resolvamos las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $3x^2-2x-1=0 \rightarrow \left\{x=-\dfrac{1}{3}\,,x=1\right\}$

b) $x\,(ax-1)+1=ax \quad (a\neq 0) \rightarrow \left\{x=\dfrac{1}{a}\,,x=1\right\}$

EJERCICIO 5:

Resolvamos las siguientes ecuaciones reducibles a segundo grado por cambio de variable.

a) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0 \xrightarrow{y=x^2} y^2 - 5y - 36 = 0 \to y = 9 \xrightarrow{x^2=y} \{x = -3\,, x = 3\}$

b) $8x^6 - 63x^3 - 8 = 0 \xrightarrow{y=x^3} 8y^2 - 63y - 8 = 0 \to y = -\dfrac{1}{8}\,, y = 8 \xrightarrow{x^2=y} \left\{x = -\dfrac{1}{2}\,, x = 2\right\}$

EJERCICIO 6:

Resolvamos las siguientes ecuaciones bicuadradas:

a) $x^4 - 9x^2 + 9 = 0 \to x = \pm 1\,, \pm 3.$

b) $x^4 - 2x^2 - 3 = 0 \to x = \pm\sqrt{3}.$

c) $x^4 - 5x^2 = 0 \to x = 0\ (\text{doble})\,, \pm\sqrt{5}.$

EJERCICIO 7:

Resolvamos las siguientes ecuaciones bicuadradas:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \xrightarrow{t=x^2} t = 1\,, t = 4 \xrightarrow{x^2=t} \{x = \pm 1\,, x = \pm 2\}$

b) $x^4 - 9x^2 + 20 = 0 \xrightarrow{t=x^2} t = 4\,, t = 5 \xrightarrow{x^2=t} \left\{x = \pm 2\,, x = \pm\sqrt{5}\right\}$

EJERCICIO 8:

Comprobemos resolviendo que:

a) $2x^2 + x - 3 = 0 \to \left\{x = 1\,, x = -\dfrac{3}{2}\right\}$

b) $4x^2 - 25 = 0 \to \left\{x = \pm\dfrac{5}{2}\right\}$

c) $x^4 + 5x^2 - 36 = 0 \xrightarrow{y=x^2} y = 4\,, y = \cancel{-9} \xrightarrow{x^2=y} \{x = -2\,, x = 2\}$

d) $x^6 - 28x^3 + 27 = 0 \xrightarrow{y=x^3} y = 1\,, y = 27 \xrightarrow{x^3=y} \{x = 1\,, x = 3\}$

Ecuaciones con valor absoluto

EJERCICIO 9:

Observemos cómo se resuelven:

a) $|x^2 - 3x| = 4 \begin{array}{l} \nearrow\ x^2 - 3x = 4 \to \{x = -1\,, x = 4\} \\ \searrow\ x^2 - 3x = -4 \to \{\} \end{array}$

b) $|2x - 3| = |x + 4| \begin{array}{l} \nearrow\ 2x - 3 = x + 4 \to \{x = 7\} \\ \searrow\ 2x - 3 = -x - 4 \to \left\{x = -\dfrac{1}{3}\right\} \end{array}$

Ecuaciones radicales

EJERCICIO 10:

Resolvamos y veamos que es:

a) $18-\sqrt{x+10}=2 \ \rightarrow \ \{x=246\}$

b) $\sqrt{x+9}+\sqrt{x-3}=6 \ \rightarrow \ \{x=7\}$

c) $\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x-2}=1 \ \rightarrow \ \{x=2\,,x=6\}$

EJERCICIO 11:

Resolvamos y veamos que es:

a) $\sqrt{2x-3}+1=x \ \rightarrow \ x=2.$

b) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{x+7}=4 \ \rightarrow \ \{x=2\,,x=\cancel{114}\}.$

c) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}=3 \rightarrow \{x=3\}$

EJERCICIO 12:

Resolvamos y veamos que es:

a) $5+\sqrt{3x+7}=x+6 \ \rightarrow \ x=\cancel{-2}\,,x=3 \rightarrow \{x=3\}$

b) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}=1 \rightarrow \{x=3\}$

EJERCICIO 13:

Resolvamos y veamos que es:

c) $\sqrt{x+2}+2=x-2 \ \rightarrow \ x=7\,,x=\cancel{2} \rightarrow \{x=7\}$

d) $\sqrt{2-x}=x \ \rightarrow \ x=1\,,x=\cancel{-2} \rightarrow \{x=1\}$

e) $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}=1 \ \rightarrow \ \{x=5\}$

Factorización, ecuaciones polinómicas

EJERCICIO 14:

Factoricemos los polinomios:

a) $3x^2+5x-2=(x+2)\,(3x-1)$

b) $x^3-x^2-8x+12=(x+3)\,(x-2)^2$

EJERCICIO 15:

Comprobemos que

a) $x^6+2x^5-7x^4-8x^3+12x^2=x^2\,(x-1)\,(x-2)\,(x+2)\,(x+3).$

b) $p\,(x)=3x^2-7x+2 \rightarrow p\,(x)=3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)(x-2)$

c) $q\,(x)=x^4-3x^3+x^2-3x \rightarrow q\,(x)=x\,(x-3)\left(x^2+1\right)$

EJERCICIO 16:

Comprobemos que

a) $x^3+6x^2-9x=x\,(x+3)^2$

b) $x^4-25x^2=x^2\,(x+5)\,(x-5)$

EJERCICIO 17:

Comprobemos que

a) $p\,(x)=9x^6+3x^5-23x^4+13x^3-2x^2\to p\,(x)=9x^2\,(x-1)\,(x+2)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2$

b) $q\,(x)=x^4-3x^2+4x-12\to q\,(x)=(x-3)\left(x^2+4\right)$

Ecuaciones polinómicas

EJERCICIO 18:

Completemos los pasos en la resolución de ecuaciones siguientes:

a) $x^3+1000=0\ \to\ \{x=-10\}$

b) $x^4+3x^3-x^2-3x=0\ \to\ x\,(x+3)\,(x+1)\,(x-1)=0\ \to\ \{x=-3\,,x=-1\,,x=0\,,x=1\}$

EJERCICIO 19:

Completemos los pasos en la resolución de ecuaciones siguientes:

a) $x^6+2x^5-7x^4-8x^3+12x^2=0\ \to\ \{x=-3\,;x=-2\,;x=0\,;x=1\,;x=2).$

b) $x^4+3x^3+5x^2+6x=0\ \to\ x\,(x+2)\left(x^2+x+3\right)=0\ \to\ \{x=-2\,,x=0\}$

c) $5x^4+10x^3-45x^2-90x=0\ \to\ x\,(x+3)\,(x-3)\,(x+2)=0\ \to\ \{x=-3\,,x=-2\,,x=0\,,x=3\}$

d) $3x^3+4x^2+4x+3=0\ \to\ (x+1)\left(3x^2+x+3\right)=0\ \to\ \{x=-1\}$

EJERCICIO 20:

Resolvamos sabiendo que $x=-\dfrac{1}{5}$ es solución:

$.5x^3+11x^2-23x-5=0\ \to\ \left(x+\dfrac{1}{5}\right)\left(5x^2+10x-25\right)=0\ \to\ x=\dfrac{1}{5}\,,-1\pm\sqrt{6}$

EJERCICIO 21:

Factoricemos $p\,(x)=x^4-2x^3-7x^2+20x-12$ y resolvamos $p\,(x)=0$.

$$p\,(x)=(x+3)\,(x-1)\,(x-2)^2\to\{x=-3\,,x=1\,,x=2\ (\text{doble})\}$$

EJERCICIO 22:

Completemos los pasos en la resolución de ecuaciones siguientes:

a) $x^5+x^4-17x^3+15x^2=0\ \to\ x^2\,(x-1)\left(x^2+2x-15\right)=0\ \to\ \{x=-5\,,x=0\ (\text{doble})\,,x=1\,,x=3\}$

b) $3x\left(x^2-1\right)(x+2)=0\to\{x=-2\,,x=-1\,,x=0\,,x=1\}$

c) $x^5-6x^4-7x^3+36x^2+36x=0\ \to\ x\,(x+1)\,(x+2)\left(x^2-9x+18\right)=0\ \to\ \{x=-2\,,x=-1\,,x=0\,,x=3\,,x=6\}$

d) $x^4-5x^3+7x^2-3x=0\ \to\ x\,(x-1)\left(x^2-4x+3\right)=0\ \to\ \{x=0\,,x=1\ (\text{doble})\,,x=3\}$

Ecuaciones fraccionarias

EJERCICIO 23:

Resolvamos las ecuaciones fraccionarias que dan lugar a ecuaciones de segundo grado:

a) $\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{x}{x-1}=2 \to \{\}$

b) $\dfrac{8}{3}+\dfrac{x}{3b-x}=\dfrac{x}{3b+x} \quad (b\neq 0) \to \{x=-6b\,,x=6b\}$

EJERCICIO 24:

Resolvamos

a) $\dfrac{6}{x}+\dfrac{x+1}{x-2}=6 \to x=\dfrac{4}{5}\,,3$

b) $\dfrac{2x-3}{x^2-5x}+\dfrac{x+4}{x}=\dfrac{3}{4} \to x=-2\,,3\,,4$

EJERCICIO 25:

Comprobemos que

a) $\dfrac{x-1}{x-4}-1=\dfrac{x+1}{x-3} \to \{x=1\,,x=5\}$

b) $\dfrac{x}{x-2}=\dfrac{x+4}{x-1} \to \left\{x=\dfrac{8}{3}\right\}$

c) $\dfrac{-3x^3+x^2+73x-3}{x^2-25}=-3x \to \{x=-1\,,x=3\}$

Exponenciales y logarítmicas

EJERCICIO 26:

Resolvamos las siguientes ecuaciones exponenciales

a) $3^{1-x^2}=\dfrac{1}{27} \to x=\pm 2$

b) $2^{3x-1}=4^{x+3} \to \{x=7\}$

c) $5^{x^2-5x+6}=1 \to x=2\,,3$

d) $5^{x+2}=40 \to x+2=\log_5 40 \to \{x=\log_5 40-2\approx 0.292\}$

e) $3^{1-x^2}=2 \to 1-x^2=\log_3 2 \to \left\{x=\pm\sqrt{\log_3 2-1}\right\}$

f) $3^x+\dfrac{1}{3^{x+1}}=\dfrac{28}{9} \xrightarrow{3^x=y} y^2-28y+3=0 \begin{array}{l} \nearrow \quad y=3 \to \{x=1\} \\ \searrow \quad y=\frac{1}{9} \to \{x=-2\} \end{array}$

EJERCICIO 27:

Resolvamos las siguientes ecuaciones exponenciales

a) $3^{x+2}+3^{x}=90 \rightarrow \{x=2\}$

b) $4^{x}-7\cdot 2^{x}-8=0 \xrightarrow{y=2^{x}} y=8\,, y=\cancel{-1} \xrightarrow{2^{x}=y} \{x=3\}$

c) $7^{x-1}-2^{x}=0 \rightarrow \left\{x=\dfrac{\ln 7}{\ln 7-\ln 2}\approx 1.55\right\}$ (Sugerencia: igualar potencias y tomar logaritmos en ambos miembros).

d) $9^{x}-10\cdot 3^{x}+9=0 \xrightarrow{y=3^{x}} y=1\,, y=9 \xrightarrow{2^{x}=y} \{x=0\,, x=2\}$

EJERCICIO 28:

Comprobemos las siguientes ecuaciones exponenciales

a) $2^{2x-3}=128 \rightarrow \{x=5\}$

b) $3^{2x-1}=2^{x} \rightarrow (2x-1)\ln 3=x\ln 2 \rightarrow \left\{x=\dfrac{\ln 3}{2\ln 3-\ln 2}\approx 0.7304\right\}$

c) $3^{x^2}-5^{x}=0 \rightarrow x^2\ln 3=x\ln 5 \rightarrow \left\{x=0\,, x=\dfrac{\ln 5}{\ln 3}\approx 1.465\right\}$

EJERCICIO 29:

Resolvamos las siguientes ecuaciones logarítmicas

a) $\log_{10}x+\log_{10}50=3 \rightarrow x=20$

b) $5\ln(x+3)=\ln 32 \rightarrow x=-1$

c) $2\ln(x)=\ln(10-3x) \rightarrow x=2$

d) $\ln\left(\dfrac{x}{2}+1\right)=-1 \rightarrow \dfrac{x}{2}+1=\mathrm{e}^{-1} \rightarrow \left\{x=\dfrac{2}{\mathrm{e}}-1\right\}$

e) $\dfrac{1}{2}\ln(2x+3)=x \rightarrow \{x=\cancel{-1}; x=3\}$

f) $\ln(x-1)+\ln(x+6)=\ln(3x+2) \rightarrow x^2+2x-8=0 \rightarrow \{x=\cancel{-2}; x=3\}$

EJERCICIO 30:

Resolvamos las siguientes ecuaciones logarítmicas

a) $\log_{10} 2x+3)-\log_{10}x=1 \rightarrow \left\{x=\dfrac{3}{8}\right\}$

b) $\log_{10}(x+2)-\log_{10}(x-1)=1 \rightarrow x=-4\,, x=3 \rightarrow \{x=3\}$

EJERCICIO 31:

Comprobemos las siguientes ecuaciones logarítmicas

a) $\ln(x-1)+\ln(2x-1)=\ln\left(x^2+5\right) \rightarrow x=\cancel{-1}; x=4 \rightarrow \{x=4\}$

b) $\log_x 20+\log_x 45=2 \rightarrow x^2=900 \rightarrow x=\cancel{-30}; x=30 \rightarrow \{x=30\}$

Sistemas de ecuaciones

EJERCICIO 32:

Resolvamos los sistemas lineales

a) $\left\{\begin{array}{r} 3x-2y=-1 \\ 4x+y=\quad 6 \end{array}\right\rangle \rightarrow \{x=1\,,y=2\}$

b) $\left\{\begin{array}{l} 5x-2y=4 \\ 3x+y=96 \end{array}\right\rangle \rightarrow \{x=2\,,y=3\}$

c) $\left\{\begin{array}{r} \dfrac{3x+4y}{2}=x-2 \\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{y}-\dfrac{3}{2} \end{array}\right| \rightarrow \left\{\begin{array}{r} x+4y=-4 \\ 2x+3y=\quad 2 \end{array}\right\rangle \rightarrow \{x=4\,,y=-2\}$

d) $\left\{\begin{array}{l} 2x-3y=5 \\ 3x+4y=7 \end{array}\right\rangle \rightarrow \left\{x=\dfrac{41}{17}\,,y=-\dfrac{1}{17}\right\}$

e) $\left\{\begin{array}{l} x+5y+3z=5 \\ 3x-4y-2z=2 \\ 2x+y-z=11 \end{array}\right\rangle \rightarrow \{x=2\,,y=3\,,z=-4\}$

EJERCICIO 33:

Resolvamos los siguientes sistemas no lineales

a) $\left\{\begin{array}{r} 3x+y=5 \\ x^2-y^2=3 \end{array}\right\rangle \rightarrow \left\{(2\,,-1)\;;\left(\dfrac{7}{4}\,,-\dfrac{1}{4}\right)\right\}$

b) $\left\{\begin{array}{r} xy=16 \\ 2x^2+y^2=17 \end{array}\right\rangle \rightarrow \left\{\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}\,,-2\sqrt{2}\right)\;;\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}\,,2\sqrt{2}\right)\;;(-2\,,-3)\;;(2\,,3)\right\}$

c) $\left\{\begin{array}{r} 2x^2-3y^2-4x+6y=6 \\ x^2+y^2+3x-2y=18 \end{array}\right\rangle \xrightarrow{e_1-3e_2} 5x^2+5x=60$

$$\left\{\left(-4\,,1-\sqrt{15}\right)\;;\left(-4\,,1+\sqrt{15}\right)\;;(3\,,0)\;;(3\,,2)\right\}$$

EJERCICIO 34:

Resolvamos los siguientes sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas:

a) $\left\{\begin{array}{r} 2x-y=9 \\ \sqrt{x+y}+y=x \end{array}\right| \rightarrow (x\,,y)=(6\,,3)\,,(15\,,21)$

b) $\left\{\begin{array}{l} y=x+2 \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{y}=0 \end{array}\right| \rightarrow (x\,,y)=(-1\,,1)\,,(2\,,4)$

c) $\left\{\begin{array}{r} x^2-xy+y^2=\dfrac{91}{9} \\ xy+1=0 \end{array}\right| \rightarrow (x\,,y)=(-3\,,1/3)\,,(3\,,-1/3)\,,(-1/3\,,3)\,,(1/3\,,-3)$

EJERCICIO 35:

Resolvamos los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{cases} x+y-2z=-5 \\ 3x+2y-z=3 \\ 2x+y+3z=16 \end{cases}\right\rangle \to \{x=1\,,y=2\,,z=4\}$

b) $\left.\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}\right\rangle \to \{x=-3\,,y=-4\,;x=4\,,y=3\}$

EJERCICIO 36:

Resolvamos, clasifiquemos e interpretemos los siguientes sistemas

a) $\left.\begin{cases} x-y=1 \\ x-y=2 \end{cases}\right\rangle \to \{\} \to \text{Sistema incompatible} = \text{rectas paralelas}$

b) $\left.\begin{cases} x-y=1 \\ 3x-3y=3 \end{cases}\right\rangle \to \{x=x\,,y=x-1\} \to \text{Sistema compatible indeterminado} = \text{coincidentes}$

c) $\left.\begin{cases} x-y=1 \\ 2x-y=3 \end{cases}\right\rangle \to \{x=2\,,y=1\} \to \text{Sistema incompatible determinado} = \text{secantes}$

EJERCICIO 37:

Resolvamos e interpretemos gráficamente el siguiente sistema:

$$\left.\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-3y=2 \end{cases}\right\rangle \to \{x=1\,,y=0\} \to \text{Dos rectas secantes en el punto } (x\,,y)=(1\,,0)$$

EJERCICIO 38:

Resolvamos en función del parámetro a:

$$\left.\begin{array}{r} -2x+ay=12 \\ x+2y=1 \end{array}\right\} \xrightarrow{e_1+2e_2} (a+4)\,y=14 \begin{array}{l} \nearrow \ (a=-4) \to \{\} \\ \searrow \ (a\neq-4) \to \left\{y=\dfrac{14}{a+4}\,,x=\dfrac{a-24}{a+4}\right\} \end{array}$$

EJERCICIO 39:

Resolvamos

a) $\left.\begin{cases} x+2y-z=-1 \\ 2x-y+3z=2 \\ 5x+y+2z=4 \end{cases}\right\rangle \to \{x=1\,,y=-1\,,z=0\}$

b) $\left.\begin{cases} 2x+y-2z=7 \\ x+y+z=0 \\ 3x+2y+2z=1 \end{cases}\right\rangle \to \{x=1\,,y=1\,,z=-2\}$

c) $\left.\begin{cases} 2x-3y+z=2 \\ 3x-2y+z=-4 \\ -x-y=1 \end{cases}\right\rangle \to \{\}$

EJERCICIO 40:

Resolvamos estos sistemas compatibles indeterminados:

a) $\left\{\begin{array}{r} x+2y-3z=3 \\ 2x+3y+z=1 \\ x+y++4z=-2 \end{array}\right\rangle \rightarrow \{x=-7-11t\,,y=5+7t\,,z=t\}$

b) $\left\{\begin{array}{r} x-2y-3z=1 \\ 3x-6y+9z=3 \\ -x+2y-3z=-1 \end{array}\right\rangle \rightarrow \{x=1+2s-3t\,,y=s\,,z=t\}$

EJERCICIO 41:

Resolvamos

a) $\left\{\begin{array}{r} x-3y=12 \\ x^2-y^2=80 \end{array}\right\rangle \rightarrow \{x=9\,,y=-1\,;x=-12\,,y=-8\}$

b) $\left\{\begin{array}{r} \dfrac{3}{x}+\dfrac{y+2}{y}=1 \\ xy+1=-5 \end{array}\right\rangle \rightarrow \{x=-3\,,y=2\,;x=3\,,y=-2\}$

c) $\left\{\begin{array}{r} \dfrac{3x}{x+y}-\dfrac{6}{y}=-2 \\ x-y=-1 \end{array}\right\rangle \rightarrow \left\{x=1\,,y=2\,;x=-\dfrac{4}{7}\,,y=\dfrac{3}{7}\right\}$

d) $\left\{\begin{array}{r} 1=\sqrt{3x-y}-x \\ \sqrt{5x+y}=\sqrt{3x+1} \end{array}\right\rangle \rightarrow \{x=1\,,y=-1\,;x=2\,,y=-3\}$

EJERCICIO 42:

Resolvamos los siguientes sistemas exponenciales / logarítmicos

a) $\left\{\begin{array}{r} 2\log_{10}x-\log_{10}y=5 \\ \log_{10}x\cdot y=4 \end{array}\right| \rightarrow (x\,,y)=(1000\,,100)$

b) $\left\{\begin{array}{l} 2\ln(x+y)-\ln(x-y)=\ln 5 \\ 2^x=4\cdot 2^y \end{array}\right| \rightarrow (x\,,y)=(6\,,4)$

c) $\left\{\begin{array}{r} \log_x(4-y)=1/2 \\ y^2=4+x \end{array}\right| \rightarrow (x\,,y)=(-5/2\,,9/4)$

EJERCICIO 43:

Resolvamos los siguientes sistemas exponenciales / logarítmicos

a) $\left\{\begin{array}{l} 3^x+5^y=14 \\ 4\cdot 3^x-7\cdot 5^y=1 \end{array}\right\rangle \xrightarrow{a=2^x,b=5^y} a=9\,,b=5 \rightarrow (x\,,y)=(2\,,1)$

b) $\left\{\begin{array}{r} \log x+2\log y=\log 2+\log 9 \\ \log x-\log y=\log 2-\log 3 \end{array}\right\rangle \rightarrow \{x=2\,,y=3\}$

Problemas

EJERCICIO 44:

Resolvamos los siguientes problemas, siguiendo las sugerencias dadas si es preciso:

a) Halla el número cuyo quíntuplo, disminuido en las tres cuartas partes del mismo, es igual al triple de la suma de dicho número con cinco.

$$x = \text{ número} \rightarrow 5x - \frac{3}{4}x = 3\,(x+5) \rightarrow \{x = 12\}$$

El número buscado es el 12.

b) El área de un rectángulo aumenta en 185 cm² cuando la base y la altura vienen aumentadas en 5 cm cada una. Halla sus dimensiones sabiendo que la primera es el triple de la segunda.

$$x = \text{ altura} \rightarrow 3x^2 + 185 = (3x+5)\,(x+5) \rightarrow \{x = 8\}$$

La altura mide 8 cm y la base 24 cm.

c) Un obrero ha empleado 25 días en la realización de un trabajo. Si hubiese dedicado al mismo 2 horas más por día, hubiera terminado en 20 días. ¿Durante cuántas horas trabajó diariamente?

$$x = \text{ n}^{\text{o}} \text{ horas diarias} \rightarrow 25x = 20\,(x+2) \rightarrow \{x = 8\}$$

Trabajó durante 8 horas cada día.

d) Halla dos números impares consecutivos tales que la mitad más la cuarta parte del mayor suman lo mismo que la mitad y la séptima parte del mayor.

$$\text{Sean } x\,, x+2 \rightarrow \frac{x}{2} + \frac{x}{4} = \frac{x+2}{2} + \frac{x+2}{7} \rightarrow \{x = 12\}$$

No hay solución.

e) Un padre tiene 38 años, su hijo tiene 10 y su hija mayor 14. ¿Cuántos años han de pasar para que la edad del padre sea el triple de la del hijo? ¿Y cuándo es la edad del padre 3 veces la de la hija?

$$x = \text{ años para hijo} \rightarrow 38 + x = 3\,(10 + x) \rightarrow \{x = 4\}$$
$$y = \text{ años para hija} \rightarrow 38 + y = 3\,(14 + y) \rightarrow \{y = -2\}$$

Dentro de cuatro años la edad del padre triplicará la del hijo. Y hace dos años que el padre tenía una edad igual al triple de la que tenía su hija.

EJERCICIO 45:

Resolvamos los siguientes problemas, siguiendo las sugerencias dadas si es preciso:

a) Las dos cifras de un número suman 12. Halla dicho número sabiendo que si se invierte el orden de sus cifras el número disminuye en 36.

$$x\,y = \text{ ese número} \rightarrow \{x + y = 12\,, 10x + y - 36 = 10y + x\} \rightarrow \{x = 8\,, y = 4\}$$

El número buscado es el 84.

b) Si aumento la longitud de un campo rectangular en 5 metros y la anchura en 7 metros, la superficie aumenta en 830 m². Pro si se disminuye la longitud en 8 m y la anchura en 4m, la superficie disminuye en 700 m². Calculemos las dimensiones del referido campo.

$$x = \text{ largo}\,, y = \text{ ancho} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} (x+5)\,(y+7) = xy + 830 \\ (x-8)\,(y-4) = xy - 700 \end{array} \right\rangle \rightarrow \{x = 75\,, y = 54\}$$

El campo tiene 75 m de largo y 54 m de ancho.

c) Dos trenes salen al mismo tiempo desde dos puntos distantes 576 km. Cuando van al encuentro, lo hacen en 4 horas. Cuando ambos van en la misma dirección, el más veloz alcanza al más lento después de 16 horas. Halla las velocidades de los dos trenes

$$x = \text{ vel. del rápido}\,,\, y = \text{ vel. del lento} \rightarrow \left\{\begin{array}{r} 4x+4y=576 \\ 16x=16y+576 \end{array}\right\rangle \rightarrow \{x=90\,,\, y=54\}$$

La velocidad del más rápido es de 90 km/h y la del más lento 54 km/h.

EJERCICIO 46:

Resolvamos los siguientes problemas, siguiendo las sugerencias dadas si es preciso:

a) Hallemos las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo sabiendo que son tres enteros pares consecutivos.

$$\text{Sean } x\,,\, x+2\,,\, x+4 \xrightarrow{\text{Pitágoras}} (x)^2+(x+2)^2=(x+4)^2\; x=\cancel{-2}\,,\, x=6 \rightarrow \{x=6\}$$

Las longitudes son 6, 8 y 10 respectivamente.

b) Halla el precio de un abrigo y de unos zapatos, sabiendo que son proporcionales a 3 y 2; y además si el abrigo lo rebajan un 20% y los zapatos un 30% se pagan 76€.

$$x = \text{ precio abrigo}\,,\, y = \text{ precio zapatos} \rightarrow \left\{\begin{array}{r} \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{2} \\ 0.8x+0.7y=76 \end{array}\right\rangle \rightarrow \{x=60\,,\, y=40\}$$

El abrigo cuesta 60€ y un par de zapatos 40€.

c) Una zona turística está junto a un humedal. La población de mosquitos aumenta un 10.5% cada semana y se fumiga cuando se duplica la población de mosquitos. ¿Cada cuántas semanas hay que fumigar?

$$t = \text{ n}^{\text{o}} \text{ de semanas}\,,\, n = \text{ n}^{\text{o}} \text{ mosquitos} \rightarrow n\cdot 1.105^t = 2n \rightarrow \left\{t=\frac{\ln 2}{\ln 1.105}\approx 6.94\right\}$$

Se debe fumigar cada 7 semanas.

d) Halla una función polinómica de segundo grado que pase por los puntos $A=(1\,,2)$, $B=(-1\,,6)$, $C=(2\,,9)$.

$$f(x)=ax^2+bx+c \rightarrow \left|\begin{array}{l} f(1)=2\rightarrow a+b+c=2 \\ f(-1)=2\rightarrow a-b+c=6 \\ f(2)=9\rightarrow 4a+2b+c=9 \end{array}\right\} \rightarrow \{a=3\,,\, b=-2\,,\, c=1\}$$

Es $f(x)=3x^2-2x+1$.

EJERCICIO 47:

Resolvamos los siguientes problemas, siguiendo las sugerencias dadas si es preciso:

a) La altura sobre el lado desigual en un triángulo isósceles mide 15 cm, y su perímetro, 50 cm. Calculemos la longitud de sus lados

$$x = \text{ lados iguales}\,,\, y = \text{ lado desigual} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x+y=50 \\ x^2=15^2+\left(\dfrac{y}{2}\right)^2 \end{array}\right\rangle \rightarrow \{x=17\,,\, y=16\}$$

Los lados iguales miden 17 cm y el lado desigual mide 16 cm.

b) La suma de dos números es 9 y la de sus inversos es \frac{1}{2}. Calculémoslos.

$$\text{Sean } x\,,y \to \left\{ \begin{array}{l} x+y=9 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2} \end{array} \right\rangle \to \{x=6\,,y=3\}$$

Los números son 3 y 6

c) Una parcela rectangular está cercada con 330 m de alambrera. Si mide el doble de largo que de ancho, ¿cuáles son sus dimensiones?

$$x = \text{ largo}\,, y = \text{ ancho} \to \left\{ \begin{array}{r} 2x+2y=330 \\ y=2x \end{array} \right\rangle \to \{x=100\,,y=55\}$$

Mide 110 m de largo y 55 m de ancho.

d) Un cajero automático contiene sólo billetes de 10, 20 y 50€. En total hay 130 billetes por un valor de 3000€. Suponiendo que el número de billetes de 10 es el doble que de 50, calculemos cuántos billetes hay de cada tipo.

$x\,,y\,,z = $ respectivos n° de billetes de 10,20,50

$$\left. \begin{array}{r} x+y+z=130 \\ 10x+20y+30z=3000 \\ x=2z \end{array} \right\} \to \{x=80\,,y=10\,,z=40\}$$

Hay 80 billetes de 10€, 10 billetes de 20€ y 40 billetes de 50€,.

Inecuaciones con una incógnita

EJERCICIO 48:

Comprobemos las soluciones en las siguientes inecuaciones y sistemas de primer grado

a) $3\,(x+2) > 5+5x \to \left\{x < \dfrac{1}{2}\right\}$

b) $\dfrac{3-\dfrac{x}{3}}{3+\dfrac{1}{2}} - x \geq \dfrac{3x-\dfrac{5}{2}}{1-\dfrac{2}{3}} \to S = \left(-\infty\,, \dfrac{351}{424}\right]$

c) $\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{2x-2}{5}+\dfrac{5-2x}{3} < 1 \\ \dfrac{x+2}{3}-\dfrac{2x-3}{4} > \dfrac{3}{4} \end{array} \right| \to \{1 < x < 4\}$

d) $\left\{ \begin{array}{r} (x-2)^2 > (x+3)^2 \\ (x-3)\,(x+3) \leq (x+5)\,(x+6) \end{array} \right| \to S = \left(-\infty\,,-\dfrac{1}{2}\right) \cap [21\,,+\infty) = \emptyset \to \{\}$

EJERCICIO 49:

Comprobemos las soluciones en las siguientes inecuaciones

a) $6x^2+5x+1 > 0 \to S = \left(-\infty\,,-\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{3}\,,+\infty\right)$

b) $\dfrac{3\,(x^2-1)}{4} > 3x^2+\dfrac{5}{2} \to 9x^2+13 < 0 \to S = \emptyset$

EJERCICIO 50:

Comprobemos las soluciones en las siguientes inecuaciones

a) $\dfrac{(3+2x)(x-1)}{3} \leq \dfrac{(x-1)^2-1}{4} + 1 - \dfrac{1+x}{2} \to 5x^2+16x-18 \leq 0 \to S = \left[-4\,,\dfrac{4}{5}\right]$

b) $x^3-x^2-6x<0 \to x(x-3)(x+2)<0 \to S=(-\infty\,,-2)\cup(0\,,3)$

c) $-x^3+4x^2-10x+12 \geq 0 \to (x-2)\left(-x^2+2x-6\right) \geq 0 \to S=\{x\leq 2\}$

d) $\dfrac{3x-2}{x-1} - 1 \geq \dfrac{2x-1}{x+1} \to \dfrac{4x-2}{x^2-1} \geq 0 \to S = \left(-1\,,\dfrac{1}{2}\right] \cup (1\,,+\infty)$

EJERCICIO 51:

Hallemos los valores de k para que la ecuación $x^2-2x+k=0$ tenga soluciones reales.

$$\Delta = 4-12k \geq 0 \to \left\{k \leq \frac{1}{3}\right\}$$

EJERCICIO 52:

¿Cuál es el dominio o campo de existencia de la función definida mediante $y=\sqrt{x^2-16}$?

$$x^2-16\geq 0 \to \mathbb{D} = (-\infty\,,-4]\cup[4\,,+\infty)$$

EJERCICIO 53:

Comprobemos las soluciones en las siguientes inecuaciones

a) $x+1-3(x-1)<1-x \to S=(3\,,\infty)$

b) $\left\{\begin{array}{l} 3x-9<0 \\ 2x+4\geq 4 \end{array}\right| \to [-2\,,3)$

c) $x^2-x\geq 6 \to S=(-\infty\,,-2]\cup[3\,,+\infty)$

d) $x^2-5x+4\leq 0 \to [1\,,4]$

EJERCICIO 54:

Comprobemos las soluciones en las siguientes inecuaciones

a) $2x - \dfrac{5x}{6} > \dfrac{x}{4} + \dfrac{11}{4} \to \{x>3\}$

b) $x^2+x-2\geq 0 \to S=(-\infty\,,-2]\cup[1\,,+\infty)$

c) $\dfrac{(x+2)(x-3)^2}{5(x-1)} > 0 \to S=(-\infty\,,-2)\cup(1\,,3)\cup(3\,,+\infty)$

EJERCICIO 55:

Comprobemos las soluciones en las siguientes inecuaciones

a) $\dfrac{1}{2}x-4\geq 3x+1 \to \{x\leq 2\}$

b) $2x^2-7x+40\geq x^2+5x+5 \to S=(-\infty\,,5]\cup[7\,,+\infty)$

c) $\dfrac{x^2-3x+2}{x+1} < x \to \dfrac{-4x+2}{x+1} < 0 \to S=(-\infty\,,1)\cup\left(\dfrac{1}{2}\,,+\infty\right)$

EJERCICIO 56:

¿Para qué valores de k la ecuación $x^2+kx+9=0$ no tiene solución?

$$\Delta = k^2-36<0 \to \{-6<k<6\}$$