Nombre:____	***Curso***:_____
Matemáticas I – Introducción a las derivadas – 21/06/2022	

EJERCICIO 1: [3]

Consideremos la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x^2+x+1 & \text{si} \quad 0 < x \leq 2 \\ 2x+1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

a) [0.75] Estudia la continuidad de la función.

b) [1] Analiza su derivabilidad, obteniendo la fórmula de su derivada.

c) [1.25] Halla la recta tangente a su gráfica paralela a la recta $y = 3x - 1$.

EJERCICIO 2: [2]

Obtén la derivada de las siguientes funciones, simplificando adecuadamente:

a) $y = 6x \cdot \operatorname{sen}(2x) + 3\cos(2x)$

b) $y = x - \ln(\mathrm{e}^x + 1)$

c) $y = 3\left(x^2+1\right)^5$

d) $y = \dfrac{2x+1}{3x-5}$

EJERCICIO 3: [2]

Halla a y b sabiendo que la curva $y = x^3 + ax^2 + b$ pasa por el punto $(3,\ 7)$ y tiene un extremo relativo para $x = 2$.

EJERCICIO 4: [2]

Consideremos la función definida por:

$$f(x) = |x^2 - 2x|$$

a) [1] Dibuja su gráfica.

b) [0.5] Analiza, en un esquema, la monotonía, los extremos y la suavidad de esa gráfica.

c) [0.5] Deduce del anterior otro esquema para la derivada que recoja los puntos en los que no existe, en los que se anula y su signo.

EJERCICIO 5: [1]

La curva de ecuación $y = f(x)$ tiene en el punto de abscisa $x = 1$ como recta tangente $2x - y + 4 = 0$. Averigua $f(1)$ y $f'(1)$.

EJERCICIO 1:

a) Como es polinómica a trozos, f sólo puede ser discontinua para $x = 0$ y $x = 2$ (separa-fórmulas). Veamos qué ocurre en ellos:

$x = 0$		$x = 2$	
Valor	$f(0) = 1$	Valor	$f(2) = 7$
Tendencias	$f(0-) = 1$	Tendencias	$f(2-) = 7$
	$f(0+) = 1$		$f(2+) = 5$
Continua		Discontinuidad de salto finito	

Concluimos que es continua en todo punto salvo en $x = 0$, donde presenta un salto finito.

b) Podemos derivar directamente usando las reglas de derivación para $x \neq 0,\ , 2$:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si} \quad 0 < x < 2 \\ 2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Para $x = 2$, como no es continua no puede ser derivable.

Para $x = 0$, como es continua, hallamos las derivadas laterales así: $\begin{cases} f'(0_-) = 2 \\ f'(0_+) = 2 \cdot 0 + 1 = 1 \end{cases}$

Al no coincidir, concluimos que no es derivable para este valor (se trata de un punto anguloso)

c) Ambas rectas deben ser paralelas y para ello han de tener la misma pendiente.

La recta dada es $y = 3x - 1$ así que su pendiente es $m = 3$.

La pendiente de la tangente es la derivada, así que igualando:

$$f'(x) = m \to 2x + 1 = 3 \to x = 1$$

Ha de ser la tangente para $x = 1$:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

Sustituyendo, obtenemos $f(1) = 3$ y $f'(1) = 3$. Así que la fórmula nos queda:

$$y - 3 = 3(x - 1) \ \to\ y = 3x$$

EJERCICIO 2:

a) Derivada de un producto y de una resta (con la regla de la cadena):

$$y' = \cancel{6 \cdot \operatorname{sen}(2x)} + 6x \cdot \cos(2x) \cdot 2 - \cancel{3 \operatorname{sen}(2x) \cdot 2} = 12x \cos(2x)$$

b) Derivada de una resta (con regla de la cadena):

$$y' = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1}$$

c) Derivada de una potencia con regla de la cadena:

$$y' = 15\left(x^2 + 1\right)^4 \cdot 2x = 30x\left(x^2 + 1\right)^4$$

d) Derivada de un cociente:

$$y' = \frac{2(3x - 5) - 3(2x + 1)}{(3x - 5)^2} = \frac{-13}{(3x - 5)^2}$$

EJERCICIO 3:

$$y = x^3 + a\,x^2 + b \;\rightarrow\; y' = 3x^2 + 2a\,x$$

Si tiene un extremo relativo para $x = 2$, entonces para $x = 2$ es $y' = 0$:

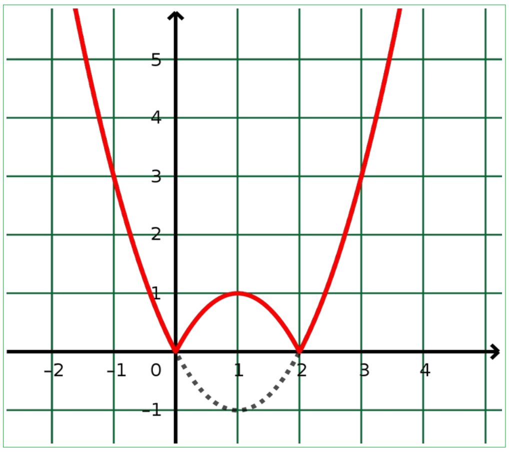
$$3 \cdot 2^2 + 2a \cdot 2 = 0 \;\rightarrow\; 12 + 4a = 0 \;\rightarrow\; a = -3$$

Si pasa por el punto $(3,\ 7)$, entonces para $x = 3$ es $y = 7$:

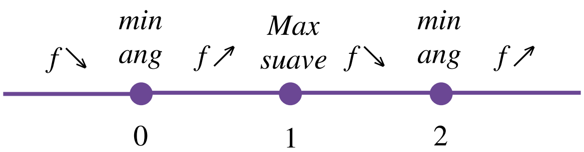
$$27 - 3 \cdot 3^2 + b = 7 \rightarrow b = 7$$

EJERCICIO 4:

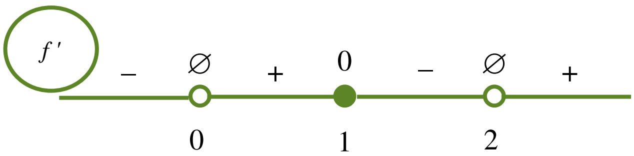
a) Con una tabla de valores alrededor del vértice ($x = 1$) dibujamos la parábola $y = x^2 - 2x$. Partiendo de ella obtenemos:



b) El esquema para f es:



c) El esquema para la derivada es:



EJERCICIO 5:

<u>Razonamiento 1</u>:

La pendiente de la tangente es la derivada (en el punto de tangencia):

$$f'(1) = m \;\rightarrow\; f'(1) = 2$$

La recta tangente $y = 2x + 4$ coincide con la función para $x = 1$:

$$f(1) = y(1) = 2 \cdot 1 + 4 \;\rightarrow\; f(1) = 6$$

<u>Razonamiento 2</u>: Aplicamos la fórmula de la recta tangente.

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \rightarrow y = f'(1)\,x - f'(1) + f(1)$$

Comparando con la recta dada, que es $y = 2x + 4$:

$$f'(1) = 2$$

$$-f'(1) + f(1) = 4 \rightarrow -2 + f(1) = 4 \rightarrow f(1) = 6$$