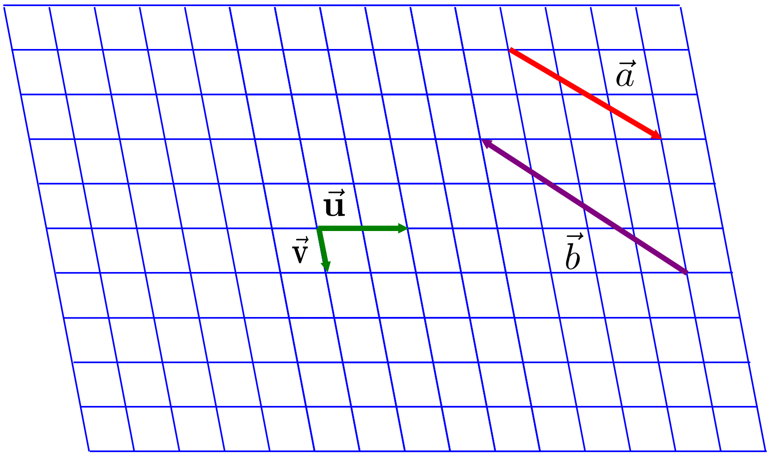
| *Nombre*:_______________________________________________ *Curso*:_____ | |
|---|---|
| *Matemáticas I – Vectores en el plano – 18/02/2022* | |

EJERCICIO 1: [2] Responde a las siguientes cuestiones, observando los vectores de la figura:




a) ¿Qué significa "equipolencia"?

b) Dibuja dos vectores $\vec{c}$ y $\vec{d}$ linealmente dependientes.

c) ¿Qué es la regla del paralelogramo?

d) Dibuja el vector $2\vec{u} + 5\vec{v}$.

e) Obtén las coordenadas de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ en la base formada por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

EJERCICIO 2: Dados los vectores $\vec{u} = (-1\,,-3)$ , $\vec{v} = (2\,,0)$:

a) [0,75] Demuestra algebraicamente que $\mathscr{B} = \{\vec{u}\,,\,\vec{v}\}$ es una base del plano.

b) [0,75] ¿Qué coordenadas tiene en esa base $\vec{x} = (-2\,,3)$?

c) [0,5] ¿Qué componentes tiene el vector $\vec{y}$ cuyas coordenadas en $\mathscr{B}$ son $(-2\,,3)$?

EJERCICIO 3: Sean $\vec{a} = (6\,,y)$ , $\vec{b} = (2x\,,-1)$ , $\vec{c} = (4\,,-3)$.

a) [0,5] Halla $y$ sabiendo que $\vec{a} \perp \vec{c}$.

b) [0,5] Halla $x$ sabiendo que $|\vec{b}| = 5$.

c) [1] Obtén el vector unitario que tiene igual dirección pero sentido contrario a $\vec{c}$.

EJERCICIO 4: Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ verificando $|\vec{a}| = 3$ , $|\vec{b}| = 2$ , $\left(\widehat{\vec{a}\,,\vec{b}}\right) = 120°$

a) [0,5] ¿Calcula el producto escalar de dichos vectores?

b) [0,75] Calcula la proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$.

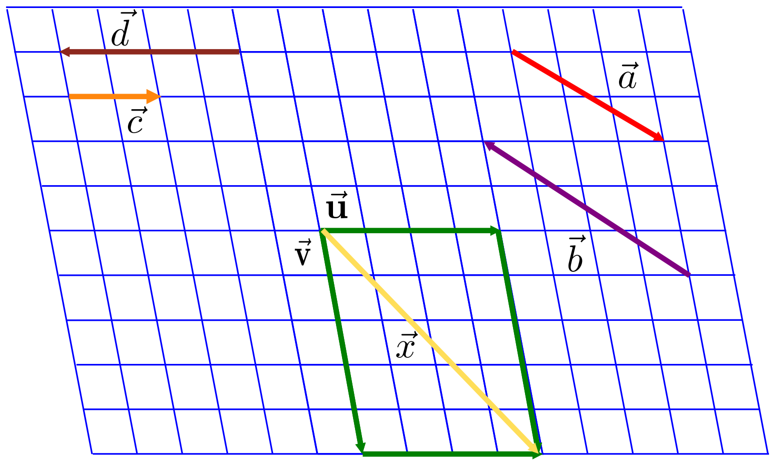
c) [0,75] Halla el módulo o longitud del vector $\vec{a} - \vec{b}$.

EJERCICIO 5: Considera los puntos $A = (-1\,,1)$ , $B = (5\,,2)$ , $C = (2\,,-3)$.

a) [1] Obtén las coordenadas del punto $D$ tal que $ABCD$ es un paralelogramo.

b) [1] Obtén las coordenadas de un par de puntos *P* y *Q* de modo que *ABPQ* sea un cuadrado.

EJERCICIO 1:




a) Equipolencia es la propiedad común que tienen las representaciones gráficas de un vector: todas tienen igual dirección, sentido y módulo.

b) Son $\vec{c}$ y $\vec{d}$ dependientes pues tienen igual dirección. Observemos que:

$\vec{d} = -2\vec{c}$

c) La regla del paralelogramo es un procedimiento para sumar dos vectores gráficamente, como en el apartado (d).

d) Véase en la malla, es $\vec{x}$.

e) Las coordenadas de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ en la base formada por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\vec{a} = 1{,}5\vec{u} + 2\vec{v} \xrightarrow{coordenadas} (1{,}5\,,2)$$

$$\vec{b} = -2\vec{u} - 3\vec{v} \xrightarrow{coordenadas} (-2\,,-3)$$

EJERCICIO 2:

a) Basta comprobar que son dos vectores independientes:

$$\frac{2}{-1} \neq -\frac{2}{0} \rightarrow \{\vec{u}\,,\vec{v}\} \text{ son independientes}$$

b) Pongamos $\vec{x} = s\vec{u} + t\vec{v}$:

$$(-2\,,3) = s\cdot(-1\,,-3) + t\cdot(2\,,0) \rightarrow \left\{ \begin{array}{rl} -s + 2t = & -2 \\ -3s + 0t = & 3 \end{array} \right. \rightarrow s = -1\,, t = -\frac{3}{2}$$

Luego las coordenadas pedidas son $\left(-1\,,-\frac{3}{2}\right)$

c) Es

$$\vec{y} = -2\vec{u} + 3\vec{v} = (2\,,6) + (6\,,0) = (8\,,6)$$

EJERCICIO 3:

$$\vec{a} = (x\,,10)\ ,\ \vec{b} = (-1\,,2y)\ ,\ \vec{c} = (5\,,12)$$

a) Tenemos:

$$\vec{a} \perp \vec{c} \rightarrow \vec{a}\cdot\vec{c} = 0 \rightarrow 6\cdot 4 + y\cdot(-3) = 0 \rightarrow 3y = 24 \rightarrow y = 8$$

b) Resulta:

$$|\vec{b}| = 5 \rightarrow \sqrt{(2x)^2 + 1} = 5 \rightarrow 4x^2 + 1 = 25 \rightarrow x^2 = 6 \rightarrow x = \pm\sqrt{6}$$

c) Calculemos primero el módulo de $\vec{c}$:

$$|\vec{c}| = \sqrt{16 + 9} = 5$$

Dividiendo el vector entre $-5$ será unitario (módulo 1) y lleva igual dirección (son dependientes) pero sentido contrario (número negativo). Luego el vector buscado es:

$$\vec{u} = -\frac{1}{5}\,(4, -3) = \left(\frac{-4}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

EJERCICIO 4:

a) Despejando de la fórmula del ángulo:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(120^\circ) = 3\cdot 2\cdot\frac{-1}{2} = -3$$

b) Podemos usar la fórmula:

$$p = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{-3}{2}$$

c) Es

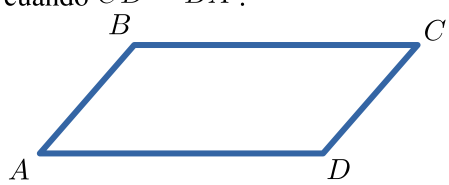
$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = \left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right) = |\vec{a}|^2 - \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 9+3+3+4 = 19$$

Por ello:

$$|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{19}$$

EJERCICIO 5:

a) $ABCD$ es un paralelogramo sólo cuando $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ :



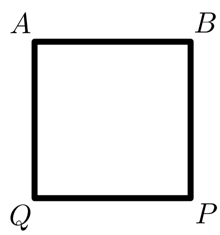

$$D - C = A - B \;\rightarrow\; D = C + A - B = (-4\,,-4)$$

b) Si $ABPQ$ es un cuadrado entonces el vector $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{BP}$ es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ y de igual longitud. El ortogonal a $\overrightarrow{AB} = B - A = (6\,,1)$ de igual módulo es el vector $\vec{n}$ que obtenemos intercambiando componentes con un cambio de signo

<u>Caso 1</u>: $\vec{n} = (-1\,,6)$

$P = B + \vec{n} = (5\,,2) + (-1\,,6) = (4\,,8)$

$Q = A + \vec{n} = (-1\,,1) + (-1\,,6) = (-2\,,7)$




<u>Caso 2</u>: $\vec{n} = (1\,,-6)$

$P = B + \vec{n} = (5\,,2) + (1\,,-6) = (6\,,-4)$

$Q = A + \vec{n} = (-1\,,1) + (1\,,-6) = (0\,,-5)$