Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas I - Trigonometría I y Complejos - 21/12/21	

EJERCICIO 1: Sea α un ángulo con $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ que verifica $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$.

a) [1] Obtén el valor exacto de su seno y de su coseno.

b) [0,75] Con la fórmula de adición adecuada calcula

$$\operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

c) [0,75] Usa las fórmulas que convierten sumas en productos para simplificar y averiguar el valor de

$$\frac{\cos 5\alpha + \cos 3\alpha}{\operatorname{sen} 5\alpha - \operatorname{sen} 3\alpha}$$

EJERCICIO 2:

a) [1,25] Resuelve la ecuación siguiente y escribe las soluciones de la primera vuelta (entre 0º y 360º).

$$\operatorname{sen}(2x + 10^\circ) = -1$$

b) [1,25] Resuelve la siguiente ecuación:

$$2\cos(4x) + \sqrt{3} = 0$$

EJERCICIO 3: [2]

En un triángulo isósceles los lados iguales miden 10 cm y el ángulo que forman mide 120º.

Calculemos su superficie y su perímetro.

EJERCICIO 4:

a) [1] Resuelve en el campo complejo la siguiente ecuación:

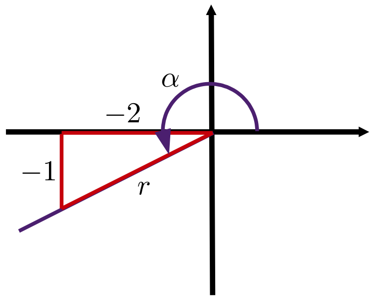
$$x^3 - 5\,x^2 + 17\,x - 13 = 0$$

b) [1] Efectúa y simplifica:

$$\frac{-7 - 11i}{1 - 2i}$$

c) [1] Pasa a forma polar $u = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$ y pasa a forma binómica $v = 5_{270^\circ}$.

EJERCICIO 1:



Dibujamos el ángulo α, observando que está en el tercer cuadrante.

Por el Teorema de Pitágoras podemos hallar r:

$$r^2 = 4 + 1 \to r = \sqrt{5}$$

De aquí:

$$\operatorname{sen}\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad , \quad \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Ahora, aplicando la fórmula de la resta de ángulos:

$$\operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\frac{\pi}{2} - \cos\alpha \cdot \cancelto{0}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}} = -\frac{-2}{\sqrt{5}} \cdot 1 = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Con las fórmulas que transforman sumas en productos:

$$\frac{\cos 5\alpha + \cos 3\alpha}{\operatorname{sen} 5\alpha - \operatorname{sen} 3\alpha} = \frac{2 \cdot \cos 4\alpha \cdot \cos\alpha}{2 \cdot \cos 5\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{\cos 4\alpha} \cdot \cos\alpha}{\cancel{2} \cdot \cancel{\cos 4\alpha} \cdot \operatorname{sen}\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \cot\alpha = 2$$

EJERCICIO 2:

a) Como $\operatorname{sen} 270^\circ = -1$:

$$\cos(2x + 10^\circ) = -1 \to 2x + 10^\circ = 270^\circ + n \cdot 360^\circ \to x = 130^\circ + n \cdot 180^\circ$$

En la primera vuelta:

$$\{130^\circ, 310^\circ\}$$

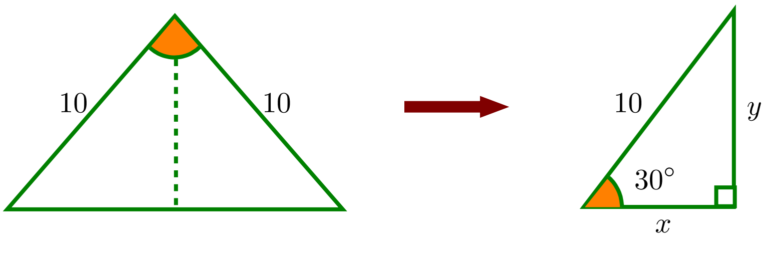
b) Despejamos la razón trigonométrica y con la calculadora encontramos que es: $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = 30^\circ$.

Con este dato y teniendo en cuenta que el coseno es negativo en los cuadrantes segundo y tercero:

$$\cos(4x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \to \left| \begin{array}{lcl} 4x = 150^\circ + n \cdot 360^\circ & \to & x = 37^\circ 30' + n \cdot 90^\circ \\ 4x = 210^\circ + n \cdot 360^\circ & \to & x = 52^\circ 30' + n \cdot 90^\circ \end{array} \right.$$

EJERCICIO 3:

Al trazar la altura dividimos el triángulo isósceles en dos triángulos rectángulos idénticos:



Y así:

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{y}{10} \to y = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5 \quad , \quad \cos 30^\circ = \frac{x}{10} \to x = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

Luego el perímetro es:

$$p = 10 + 10 + 10\sqrt{3} = 20 + 10\sqrt{3} \approx 37{,}32 \text{ cm}$$

Y la superficie es:

$$S = \frac{10\sqrt{3} \cdot 5}{2} = 25\sqrt{3} \approx 43{,}3 \text{ cm}^2$$

EJERCICIO 4:

a) Es fácil comprobar que $x = 1$ es solución. Para encontrar las otras soluciones realizamos la división:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -5 & 17 & -13 \\ 1 & \downarrow & 2 & 0 & 32 \\ \hline & 1 & -4 & 13 & 0 \end{array}$$

Así:

$$p(x) = (x-1) \cdot \left(x^2 - 4x + 13\right)$$

Ahora buscamos los ceros del factor de segundo grado mediante la fórmula:

$$x^2 - 4x + 13 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm 6\,i}{2} = 2 \pm 3\,i$$

Concluimos que la ecuación tiene una solución real y dos imaginarias (conjugadas):

$$x = 1\,, x = 2 \pm 3\,i$$

b) Para dividir multiplicamos numerador y denominador por el conjugado:

$$\frac{(-7-3i)\,(1+2i)}{(1-2i)\,(1+2i)} = \frac{15-25i}{5} = 3 - 5\,i$$

c) Para pasar u a forma polar, observemos que el afijo está en el cuarto cuadrante. Hallemos el módulo y el argumento:

$$u = \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{2+2} = 2 \\ \\ \tan\alpha = \dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1 \rightarrow \alpha = 360° - \arctan 1 = 315° \end{array} \right\} = 2_{315°}$$

Pasar v a forma binómica es muy simple, porque al dibujarlo queda en el semieje imaginario negativo con cinco unidades de longitud, así que es:

$$v = -5\,i$$