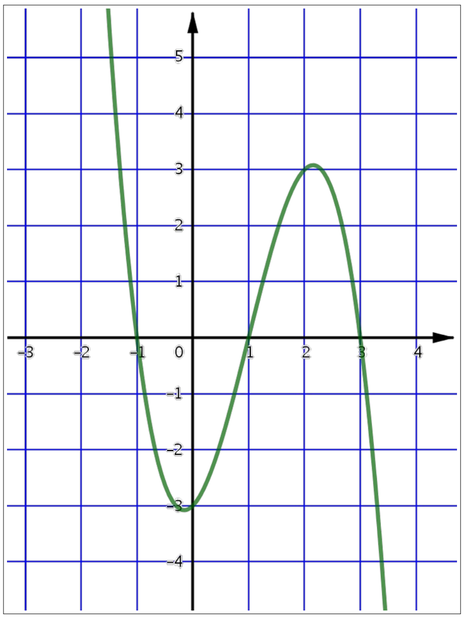
Nombre:____ *Curso*:_____

Matemáticas I – Álgebra – 10/11/2021

EJERCICIO 1:

La gráfica de $y = -x^3 + 3x^2 + x - 3$ es la mostrada:



a) [0,25] Resuelve la ecuación:

$$-x^3 + 3x^2 + x - 3 = 0$$

b) [0,75] Estudia el signo de la función y deduce la solución de la inecuación:

$$-x^3 + 3x^2 + x - 3 < 0$$

c) [1] Resuelve gráficamente el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y + 3 = -x^3 + 3x^2 + x \\ x - y = 3 \end{cases}$$

EJERCICIO 2: [2,5]

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4^x \cdot 2^y & = & 32 \\ \ln(x+1) - \ln y & = & \ln 3 \end{cases}$$

EJERCICIO 3:

Averigua para qué valores de x existe

a) [1,5] $y = \dfrac{x-1}{6x^3 + 5x^2 - 2x - 1}$

b) [1,5] $y = \ln\left(x^2 - 1\right)$

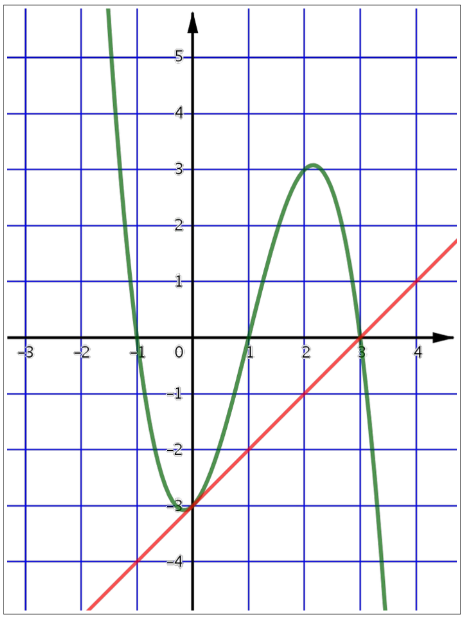
EJERCICIO 4:

Plantee una ecuación o sistema de ecuaciones que permita resolver cada uno de estos problemas:

a) [1,25] “Calculemos las dimensiones de un prisma recto de 240 cm³ y una superficie total de 236 cm² sabiendo que tiene una base rectangular cuya diagonal mide 10 cm.”

b) [1,25] “Una empresa realiza una primera compra, adquiriendo 6 móviles y 8 portátiles por 3920 euros. En una segunda ocasión adquiere por 160 euros menos el triple de móviles y la mitad de portátiles. ¿Cuál es el precio de cada artículo?”

EJERCICIO 1:



a) Observamos los cortes de la curva con el eje de abscisas:

$$-x^3+3x^2+x-3=0 \to x=-1\,,x=1\,,x=3$$

b) Basta observar en qué intervalos la curva está sobre o bajo el eje de abscisas:

$$-x^3+3x^2+x-3<0 \to x\in(-1\,,1)\cup(3\,,+\infty)$$

c) Dibujamos la recta $y=x-3$, que corresponde a la segunda ecuación, y observamos en los puntos donde corta a la curva:

$$\left.\begin{array}{l} y=-x^3+3x^2+x-3 \\ x-y=3 \end{array}\right\} \to (x\,,y)=(0\,,-3)\;,(3\,,0)$$

EJERCICIO 2:

Quitemos exponenciales: $4^x\cdot 2^y=32 \;\to\; 2^{2x}\cdot 2^x=25 \;\to\; 2^{2x+y}=2^5 \;\to\; 2x+y=5$

Quitemos logaritmos: $\ln(x+1)-\ln y=\ln 3 \to \ln\dfrac{x+1}{y}=\ln 3 \to \dfrac{x+1}{y}=3 \to x+1=3y$

Ahora resolvemos por sustitución (despejamos de la primera ecuación y sustituimos en la segunda):

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y & = & 5 \xrightarrow{despejo} y=5-2x \\ x+1 & = & 3y \xrightarrow[sustituyo]{} x+1=3(5-2x) \;\to\; x=2 \xrightarrow{y=5-2x} y=1 \end{array}\right.$$

Es fácil comprobar que es válida.

Así, el sistema tiene sólo una solución: $(x\,,y)=(2\,,1)$

EJERCICIO 3:

a) En este caso el denominador no puede ser cero.

Resolvamos la ecuación $6x^3+5x^2-2x-1=0$.

Es $x=-1$ un cero pues $6(-1)^3+5(-1)^2-2(-1)-1=0$. Así $(x+1)$ es un divisor. Dividiendo:

$$6x^3+5x^2-2x-1=(x+1)\cdot\left(6x^2-x-1\right)$$

Ahora ya podemos encontrar fácilmente todas las soluciones:

$$(x+1)\cdot\left(6x^2-x-1\right)=0 \;\to\; \left|\begin{array}{l} x+1=0 \;\to\; x=-1 \\ 6x^2-x-1=0 \;\to\; x=-\dfrac{1}{3}\,,\,x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

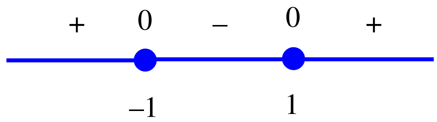
Tenemos así que x no puede ser igual a esos números y por ello el dominio es:

$$\mathbb{D}=\mathbb{R}-\left\{-1,-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right\}$$

b) Debe ser

$$x^2 - 1 > 0$$

Estudiando el signo:



Luego el dominio es

$$\mathbb{D} = (-\infty\,, -1) \cup (1\,, +\infty)$$

EJERCICIO 4:

a) Sean x, y, z las medidas (en cm) del largo, ancho y alto, respectivamente.

Volumen igual a 240 cm³ $\rightarrow$ $x\,y\,z = 240$

Superficie total igual a 236 m² $\rightarrow$ $2\,x\,y + 2\,x\,z + 2\,y\,z = 236$

La diagonal de la base rectangular mide 10 cm [Pitágoras] $\rightarrow$ $x^2 + y^2 = 100$

Resolvemos el sistema formado por esas tres ecuaciones:

$$\left\{ \begin{aligned} x\,y\,z &= 240 \\ 2\,x\,y + 2\,x\,z + 2\,y\,z &= 236 \\ x^2 + y^2 &= 100 \end{aligned} \right.$$

b) Llamemos x al precio, en euros, de cada móvil e y al de cada portátil.

6 móviles y 8 portátiles ascienden a 3920 euros $\rightarrow$ $6x + 8y = 3920$

6 · 3 = 18 móviles y 8 / 2 = 4 portátiles ascienden a 3920 – 160 = 3760 $\rightarrow$ $18x + 4y = 3760$

Resolvemos el sistema formado por esas dos ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 6x + 8y & = & 3920 \\ 18x + 4y & = & 3760 \end{array} \right.$$