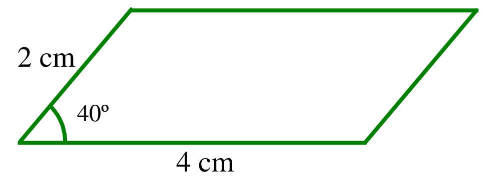
Nombre:____ *Curso*:_____

Matemáticas I – Triángulos y Números Complejos – 03/02/2020

EJERCICIO 1: [2,5]

En el paralelogramo de la figura:



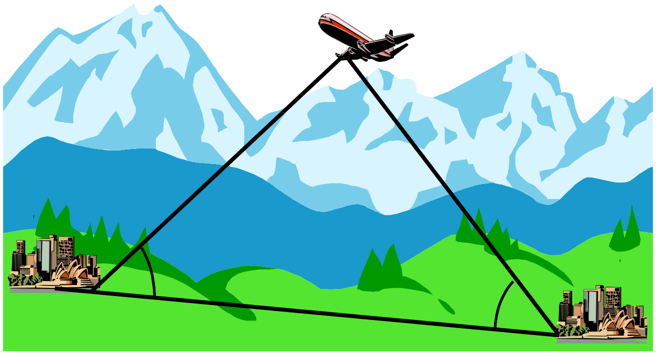
a) [0,75] Calcula su perímetro y su superficie.

b) [0,5] Obtén la medida de sus ángulos interiores.

c) [1,25] Halla las longitudes de sus diagonales.

EJERCICIO 2: [2,5]

La distancia que separa las dos ciudades es 38 km., observándose desde cada una de ellas el avión bajo un ángulo de $50°$y de $65°$, respectivamente. ¿A qué distancia está el avión de cada una de las ciudades?



EJERCICIO 3: [1,5]

Resuelve la siguiente ecuación en el campo complejo:

$$x^3 - 5x^2 + 7x + 13 = 0$$

EJERCICIO 4: [1,5]

Consideremos los números complejos

$$u = 9 + 7i \ , \ v = 2 - i$$

Calcula:

a) $3u - 2v$

b) $-\overline{u} \cdot v$

c) $\dfrac{u}{v}$

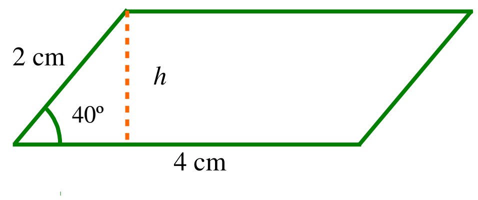
EJERCICIO 5: [2]

a) [1] Pasa a forma polar $u = -\sqrt{3} - i$ y pasa a forma binómica $v = \sqrt{2}_{\pi/4}$.

b) [1] Calcula las raíces quintas de $-32i$.

EJERCICIO 1:

a) El perímetro es fácil:



$$p = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 12 \text{ cm}.$$

Para obtener su superficie trazamos la altura, en el triángulo rectángulo que se forma:

$$\frac{h}{2} = \operatorname{sen} 40^\circ \;\rightarrow\; h = 2 \cdot \operatorname{sen} 40^\circ \text{ cm}$$

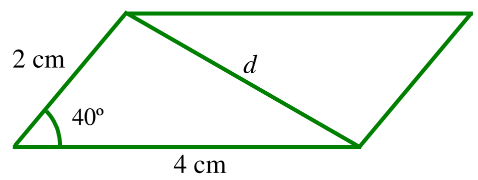
Luego:

$$\text{S} = \text{base} \times \text{altura} = 8 \operatorname{sen} 40^\circ \approx 5{,}14 \text{ cm}^2$$

b) Como sus ángulos interiores son iguales dos a dos (coinciden los opuestos), dos ángulos miden 40°. Y como todos suman 360°, cada uno de los ángulos de la pareja que resta conocer medirá

$$\frac{360^\circ - 80^\circ}{2} = 140^\circ$$

c) Dividiendo el paralelogramo por la mitad tenemos, para la diagonal menor:



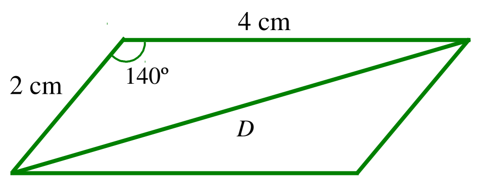
Por el teorema de los cosenos:

$$d^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos 40^\circ$$

Luego:

$$d = \sqrt{20 - 16 \cos 40^\circ} = 2.7826\ldots \approx 2.79 \text{ cm}$$

Para la otra diagonal mayor:



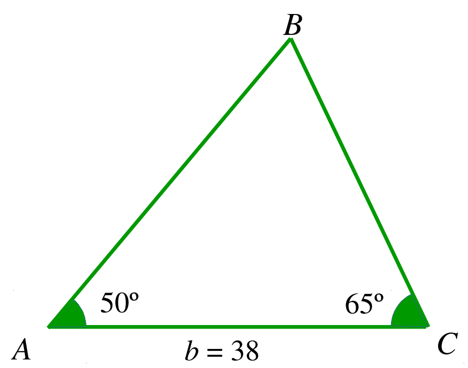
Por el teorema de los cosenos:

$$D^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos 140^\circ$$

Luego:

$$D = \sqrt{20 - 16 \cos 140^\circ} = 5.6794\ldots \approx 5.68 \text{ cm}$$

EJERCICIO 2:



Aquí hemos representado esquemáticamente la situación.

El ángulo restante en el triángulo que forman las ciudades (A y C) con el objeto (B) es:

$$\hat{B} = 180^\circ - \left(\hat{A} + \hat{C}\right) = 65^\circ$$

¡Es isósceles! Luego la distancia a la ciudad A es de 38 km. El Teorema de los senos dice lo mismo, claro:

$$\frac{c}{\operatorname{sen} 65^\circ} = \frac{38}{\operatorname{sen} 65^\circ} \;\rightarrow\; c = 38 \text{ km}$$

Y la distancia entre el avión y la otra ciudad C:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 50^\circ} = \frac{38}{\operatorname{sen} 65^\circ} \;\rightarrow\; a = \frac{38 \cdot \operatorname{sen} 50^\circ}{\operatorname{sen} 65^\circ} = 32.1189\ldots \approx 32.12 \text{ km}$$

EJERCICIO 3:

Es fácil comprobar que $x = -1$ es solución. Dividamos por $x + 1$ y obtengamos el cociente:

$$\left.\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -5 & 7 & 13 \\ -1 & \downarrow & -1 & 6 & -13 \\ \hline & 1 & -6 & 13 & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow x^2 - 6x + 13 = 0 \to x = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i$$

Concluimos que la ecuación tiene una solución real y dos imaginarias (conjugadas):

$$x = -1\,,\, x = 3 \pm 2i$$

EJERCICIO 4:

a) $3u - 2v = 27 + 21i - 4 + 2i = 23 + 19i$

b) $-u \cdot \overline{v} = (-9 + 7i) \cdot (2 - i) = -18 + 9i + 14i - 7i^2 = -11 + 23i$

c) Para dividir multiplicamos numerador y denominador por el conjugado:

$$\frac{u}{v} = \frac{(9 + 7i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{11 + 23i}{5} = \frac{11}{5} + \frac{23}{5}\,i$$

EJERCICIO 5:

a) Cuidado al pasar a forma polar *u* porque su afijo está en el tercer cuadrante:

$$u = -\sqrt{3} - i \to \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{3 + 1} = 2 \\ \tan\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \xrightarrow{\varphi \in III} \varphi = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ \end{array} \right\} \to u = 2\,_{210^\circ}$$

Pasamos de forma polar a binómica:

$$v = \sqrt{2}\,(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i$$

b) Tendrá cinco raíces quintas. Pasando a polar el radicando:

$$\sqrt[5]{32_{270^\circ}} = \left\{ \begin{array}{l} R = \sqrt[5]{32} = 2 \\ \varphi = \dfrac{270^\circ + k \cdot 360^\circ}{5}\,,\,,\, k = 0\,,1\,,2\,,3\,,4 \end{array} \right\} = 2_{54^\circ}\,,\, 2_{126^\circ}\,,\, 2_{198^\circ}\,,\, 2_{270^\circ}\,,\, 2_{342^\circ}$$