Nombre:____ ***Curso***:_____

Matemáticas I - Trigonometría I - 20/12/19

EJERCICIO 1: Sea α un ángulo con $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ que verifica $\sec\alpha = \dfrac{7}{6}$.

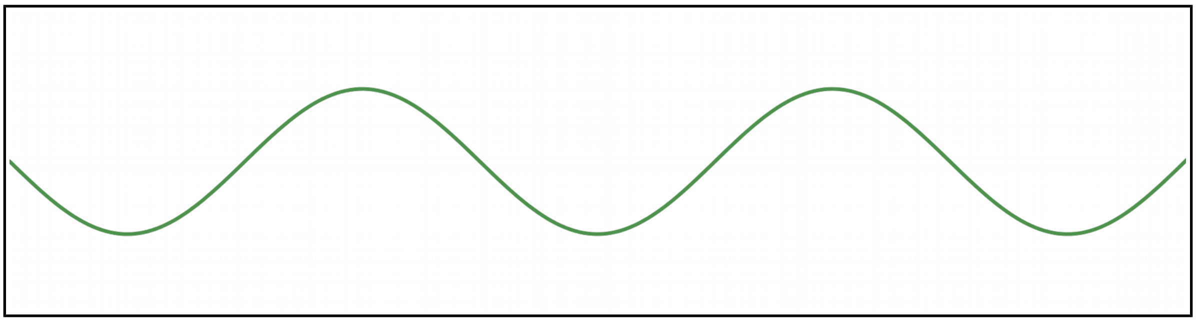
a) [1] Obtén el valor exacto de su seno y de su tangente.

b) [1] Con las fórmulas adecuadas calcula $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ y $\cos(\alpha - \pi)$.

c) [0,5] Expresa la medida de α en grados, minutos y segundos.

EJERCICIO 2:

a) [0,75] Aprovechando la onda siguiente, dibuja la gráfica de la función coseno en unos ejes XY colocando adecuadamente los ángulos que miden $0\,,\ \dfrac{\pi}{2}\,,\ \pi\,,\ \dfrac{3\pi}{2}$ y 2π.



b) [0,75] Responde <u>razonando</u> sobre la gráfica: ¿entre qué valores está acotado el coseno? ¿qué signo tiene el coseno en el tercer cuadrante? ¿crece o decrece el coseno en el tercer cuadrante?

EJERCICIO 3:

a) [1,25] Aprovecha la gráfica para obtener todos los valores de x que verifican:

$$\cos(2x - 10^\circ) = 0$$

b) [1,25] Resuelve la siguiente ecuación:

$$2\operatorname{sen}(3x) + 1 = 0$$

EJERCICIO 4:

a) [1,25] Demuestra la siguiente identidad trigonométrica:

$$\operatorname{sen} a \cdot \sec a + \cos a \cdot \csc a = \csc a \cdot \sec a$$

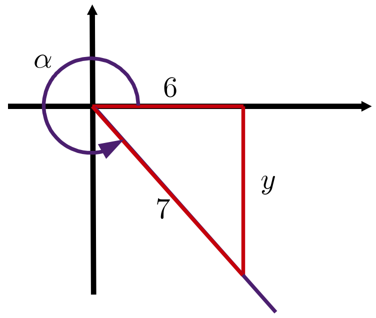
b) [1,25] Simplifica la siguiente expresión:

$$\frac{\cos 3a - \cos a}{\operatorname{sen} 3a + \operatorname{sen} a}$$

c) [1] Sea α un ángulo agudo con $\cot\alpha = t$. Expresa las restantes razones en función de t.

EJERCICIO 1:

Dibujemos el ángulo α:



$$\sec\alpha = \frac{7}{6} \;\rightarrow\; \cos\alpha = \frac{6}{7}$$

Por el Teorema de Pitágoras podemos hallar y:

$$y^2 + 6^2 = 7^2 \;\rightarrow\; y = -\sqrt{13}$$

De aquí:

$$\operatorname{sen}\alpha = -\frac{\sqrt{13}}{7} \quad , \quad \tan\alpha = -\frac{\sqrt{13}}{6}$$

Observemos que el ángulo α está entre 270º y 360º, así que la mitad está entre 135º y 180º, esto es, en el segundo cuadrante. Y ahí el seno es positivo:

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1+6/7}{2}} = \sqrt{\frac{13}{14}}$$

Ahora, aplicando la fórmula de la resta de ángulos:

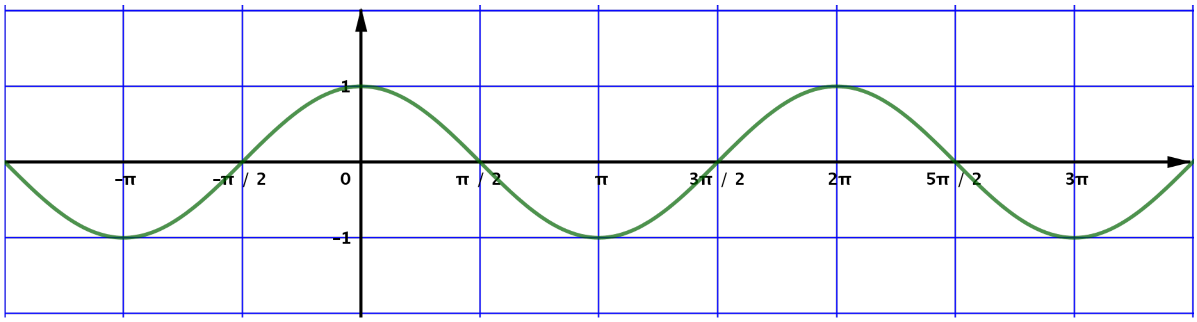
$$\cos(\alpha-\pi) = \cos\alpha\cos\pi + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\pi = \frac{6}{7}\cdot(-1) + \frac{-\sqrt{13}}{7}\cdot 0 = -\frac{6}{7}$$

Con la ayuda de la calculadora obtenemos:

$$\alpha = 360^\circ - \arccos\left(\frac{6}{7}\right) \;\rightarrow\; \alpha \approx 328^\circ 59' 50''$$

EJERCICIO 2:

La gráfica de la función coseno es:



Observemos que está acotada entre $y=-1$ e $y=+1$.

En el tercer cuadrante $\left(\pi\,,\,\frac{3\pi}{2}\right)$ la gráfica está bajo el eje de abscisas, así que el coseno es negativo. Y observamos que la onda asciende, luego el coseno crece.

EJERCICIO 3:

a) Vemos en la gráfica dónde corta al eje de las X y así sabemos dónde el coseno es cero:

$$\cos(2x-10^\circ) = 0 \;\rightarrow\; \left|\begin{array}{lll} 2x-10^\circ = 90^\circ + n\cdot 360^\circ & \rightarrow & x = 50^\circ + n\cdot 180^\circ \\ 2x-10^\circ = 270^\circ + n\cdot 360^\circ & \rightarrow & x = 140^\circ + n\cdot 180^\circ \end{array}\right.$$

b) Con la calculadora encontramos que es: $\operatorname{arcsen}\dfrac{1}{2} = 30°$.

Partiendo de este dato y teniendo en cuenta que el seno es negativo en los cuadrantes tercero y cuarto:

$$\operatorname{sen}(3x) = -\frac{1}{2} \rightarrow \left| \begin{array}{lll} 3x = 210° + n \cdot 360° & \rightarrow & x = \ \ 70° + n \cdot 120° \\ 3x = 330° + n \cdot 360° & \rightarrow & x = 110° + n \cdot 120° \end{array} \right.$$

<u>EJERCICIO 4</u>:

a) Vamos a desarrollar ambos miembros para comprobar la identidad:

$$\mathrm{I} = \operatorname{sen} a \cdot \sec a + \cos a \cdot \csc a = \operatorname{sen} a \cdot \frac{1}{\cos a} + \cos a \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} + \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a}{\operatorname{sen} a \cos a} = \frac{1}{\operatorname{sen} a \cos a}$$

$$\mathrm{II} = \csc a \cdot \sec a = \frac{1}{\operatorname{sen} a} \cdot \frac{1}{\cos a} = \frac{1}{\operatorname{sen} a \cos a}$$

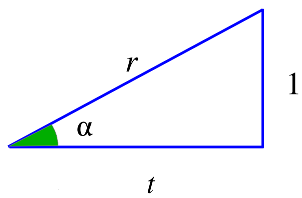
b) Aplicando las fórmulas que transforman sumas en productos:

$$\frac{\cos 3a - \cos a}{\operatorname{sen} 3a + \operatorname{sen} a} = \frac{-2\ \operatorname{sen}\frac{3a+a}{2}\ \operatorname{sen}\frac{3a-a}{2}}{2\ \operatorname{sen}\frac{3a+a}{2}\ \cos\frac{3a-a}{2}} = -\frac{2\ \operatorname{sen} 2a\ \operatorname{sen} a}{2\ \operatorname{sen} 2a\ \cos a} = -\tan a$$

c) Como se tiene que

$$\cot\alpha = \frac{x}{y}$$

el ángulo es el dibujado a continuación:



Calculamos, por el teorema de Pitágoras:

$$r^2 = 1^2 + t^2 \ \rightarrow \ r = \sqrt{1+t^2}$$

Así:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad , \quad \cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$