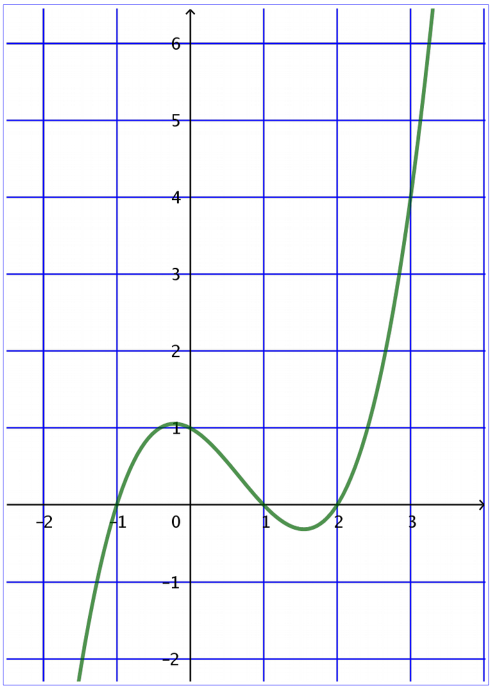
Nombre:____ *Curso*:_____

Matemáticas I – Álgebra – 22/11/2019

EJERCICIO 1 [2]: La gráfica de $y = \frac{1}{2}x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + 1$ es la mostrada:



a) [0,25] Resuelve razonadamente la ecuación:

$$\frac{1}{2}x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + 1 = 0$$

b) [0,75] Estudia el signo de la función dibujada y deduce la solución de la inecuación:

$$\frac{1}{2}x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + 1 \leq 0$$

c) [1] Resuelve gráficamente el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + 1 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

EJERCICIO 2 [2,5]: Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4^x \cdot 2^y = 512 \\ \log_x(y+3) - \log_x(2) = 2 \end{cases}$$

EJERCICIO 3 [3]: Averigua para qué valores de x existe

a) $y = \dfrac{x+3}{9x^3 + 9x^2 - 4x - 4}$

b) $y = \sqrt{x^2 - 4x}$

EJERCICIO 4 [2,5]:

Plantee razonadamente (identificando claramente las incógnitas y mostrando el origen de cada ecuación) un sistema de ecuaciones que permita dar respuesta al siguiente problema:

a) “Un paralelepípedo o prisma recto de base rectangular, tiene de volumen 30 cm³ y de superficie total 62 cm². Obtén sus dimensiones sabiendo que la longitud de su altura es igual a la diferencia del triple de su largo con el doble de su ancho.”

b) “Una tienda ofrece tres tipos de pinturas: interior lisa a cuatro euros el kilo, interior rugosa a un euro menos y exterior a cinco euros el kilo. Un cliente ha pagado 470€ por los 120 kilos de pintura que se ha llevado. ¿Cuántos kilos de clase adquirió si se llevó para el exterior la mitad de la que compró para el interior.”

EJERCICIO 1:

a) Observando los puntos de corte con el eje X : $x=-1\,,x=1\,,x=2$.

b) El signo es positivo [negativo] cuando la gráfica está por encima [por debajo] del eje de abscisas:

$$\left.\begin{array}{lcl} x\in(-\infty\,,-1) & \to & y<0 \\ x\in(-1\,,1) & \to & y>0 \\ x\in(1\,,2) & \to & y<0 \\ x\in(2\,,+\infty) & \to & y>0 \end{array}\right\} \xrightarrow{y\leq 0} S=(-\infty\,,-1]\cup[1\,,2]$$

c) La segunda ecuación $y=x+1$ puede interpretarse gráficamente como una recta. Si la dibujamos junto con la curva, la solución del sistema son los puntos donde ambas gráficas se cortan. Hay tres soluciones:

$$\{x=-1\,,y=0\,;x=0\,,y=1\,;x=3\,,y=4\}$$

EJERCICIO 2: Limpiemos primero de exponenciales y logaritmos:

$$4^x\cdot 2^y=512 \;\to\; 2^{2x}\cdot 2^y=2^9 \;\to\; 3^{2x+y}=2^9 \;\to\; 2x+y=9$$

$$\log_x(y+3)-\log_x(2)=2 \;\to\; \log_x\left(\frac{y+3}{2}\right)=2 \;\to\; \frac{y+3}{2}=x^2 \;\to\; y+3=2x^2$$

Ahora resolvemos por sustitución (despejamos de la primera ecuación y sustituimos en la segunda):

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y & = & 9 \xrightarrow{\text{despejo } y} y=9-2x \\ y+3 & = & 2x^2 \xrightarrow[sustituyo]{} 9-2x+3=2x^2 \;\to\; 2x^2+2x-12=0 \;\to\; \cancel{x=-3}\,,x=2 \end{array}\right.$$

Luego el sistema tiene una solución: $\{x=2\,,y=5\}$.

EJERCICIO 3:

a) En este caso el denominador no puede ser cero. Resolvamos la ecuación $9x^3+9x^2-4x-4=0$.

Es inmediato comprobar que $x=-1$ es solución ($-9+9+4-4=0$). Dividiendo entre $(x+1)$ podemos factorizar parcialmente y ya podemos encontrar fácilmente todas las soluciones:

$$9x^3+9x^2-4x-4=0 \;\to\; (x+1)\cdot\left(9x^2-4\right)=0 \;\to\; \left|\begin{array}{l} x+1=0 \;\to\; x=1 \\ 9x^2-4=0 \;\to\; x=\pm\sqrt{\dfrac{4}{9}}=\pm\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

Tenemos así que x no puede ser igual a esos números:

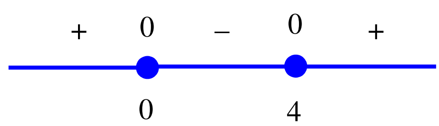
$$\mathbb{D}=\mathbb{R}-\left\{-1\,,-\frac{2}{3}\,,\frac{2}{3}\right\}$$

b) Debe ser

$$x^2-4x\geq 0$$

Ceros: $x^2-4x=0\to x\,(x-4)=0\to x=0\,,x=4$

Estudiando el signo:



Luego el dominio es $\mathbb{D}=(-\infty\,,0]\cup[4\,,+\infty)$

EJERCICIO 4:

a) Sean x, y, z las medidas (en cm) del largo, ancho y alto, respectivamente.

Volumen igual a 30 cm³ → $x\,y\,z = 30$

Superficie igual a 18 m → $2\,x\,y + 2\,x\,z + 2\,y\,z = 62$

El alto es el triple del largo menos el doble del ancho → $z = 3x - 2y$

Tenemos que resolver el sistema

$$\left\{ \begin{array}{c} x\,y\,z = 30 \\ 2\,x\,y + 2\,x\,z + 2\,y\,z = 62 \\ z = 3x - 2y \end{array} \right.$$

b) Llamemos

x al nº de kilos de interior lisa

y al nº de kilos de interior rugosa

z al nº de kilos de exterior

El total de kilos es 120: $x + y + z = 120$

El total de dinero pagado es 470€: $4x + 3y + 5z = 470$

El nº de kilos de exterior es la mitad del de interior: $z = \dfrac{x+y}{2}$

Simplificando adecuadamente obtenemos el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x + y + z & = & 120 \\ 4x + 3y + 5z & = & 470 \\ x + y - 2z & = & 0 \end{array} \right.$$

Nota: resolviendo con Geogebra obtenemos $\{x = 30\,, y = 40\,, z = 50\}$. Así, adquirió 30 kilos de pintura interior lisa, 40 de interior rugosa y 50 kilos de pintura exterior.