Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas I – Introducción a las derivadas – 19/06/2018	

EJERCICIO 1: [3] Consideremos la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x & \text{si} \quad x \leq 3 \\ 5x & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de la función.

b) Estudia su derivabilidad y calcula su función derivada.

c) Obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función para $x = 1$.

EJERCICIO 2: [3] Obtén la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = x^5\,\mathrm{e}^x$

b) $y = \dfrac{x^2 - 3}{3x + 1}$

c) $y = \left(3x^2 - 5\right)^4$

d) $y = \ln\left(x^3 - x\right)$

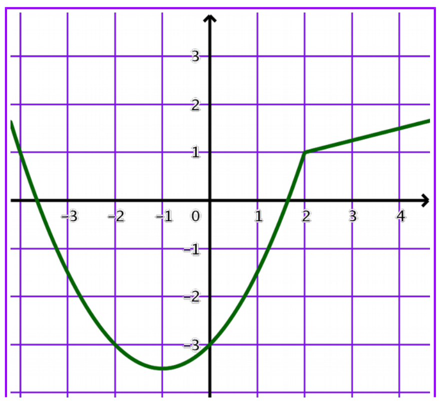
e) $y = \sqrt{x - \operatorname{sen} x}$

f) $y = \mathrm{e}^{x + \cos x}$

EJERCICIO 3: [2]

Halla a y b sabiendo que la función $y = 2x^3 - ax^2 + b$ pasa por el punto $(1, -1)$ y tiene un extremo relativo para $x = -2$.

EJERCICIO 4: [2] Consideremos la función cuya gráfica $y = f(x)$ es la dibujada a la derecha.



Escribe una tabla que recoja, razonadamente:

a) los puntos en los que la derivada no existe,

b) los puntos en los que la derivada es cero,

c) los intervalos de signo de la derivada.

EJERCICIO 5: [2]

En un experimento que dura cuatro horas se estudia la temperatura de un objeto. Ésta varía en función del tiempo transcurrido desde el inicio de la experiencia según la fórmula

$$T = t^2 - 2t - 3 \quad , \quad 0 \leq t \leq 4$$

donde el tiempo (t) está medido en horas y la temperatura (T) en grados centígrados.

a) Dibuja la gráfica tiempo – Temperatura.

b) ¿En qué período de tiempo aumenta la temperatura del objeto? ¿En cuál disminuye?

c) Señala las temperatura máxima y mínima alcanzadas.

d) Indica cuándo la temperatura está bajo cero y cuándo por encima.

EJERCICIO 1:

a) f sólo puede ser discontinua para $x = 3$, pues un separador de fórmulas continuas. Veamos qué ocurre en él:

$x = 3$

VALOR: $f(3) = 2 \cdot 3^2 - 3 = 15$

TENDENCIAS: $f(3-) = 2 \cdot 3^2 - 3 = 15$

$f(3+) = 5 \cdot 3 = 15$

Concluimos que es continua en $x = 3$.

b) Podemos derivar directamente si $x \neq 3$:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x - 1 & \text{si} \quad x < 3 \\ 5 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

Para $x = 3$, como es continua, podemos hallar las derivadas laterales así:

DERIVADAS LATERALES $\begin{cases} f'(3-) = 4 \cdot 3 - 1 = 11 \\ f'(3+) = 5 = 7 \end{cases}$

Como no coinciden concluimos que no es derivable para este valor (se trata de un punto anguloso)

c) La ecuación de la recta tangente para $x = 1$ es

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

Sustituyendo, obtenemos $f(1) = 1$ y $f'(1) = 3$. Así que la fórmula nos queda:

$$y - 1 = 3(x - 1) \ \rightarrow \ y = 3x - 2$$

EJERCICIO 2:

a) Derivada de un producto:

$$y = x^5 e^x \ \rightarrow \ y' = 5x^4 \cdot e^x + x^5 \cdot e^x = e^x \left(5x^4 + x^5\right)$$

b) Derivada de un cociente:

$$y = \frac{x^2 - 3}{3x + 1} \ \rightarrow \ y' = \frac{2x(3x+1) - 3\left(x^2 - 3\right)}{(3x+1)^2} = \frac{3x^2 + 2x - 6}{(3x+1)^2}$$

c) Derivada de una potencia (con regla de la cadena):

$$y = \left(3x^2 - 5\right)^4 \ \rightarrow \ y' = 4\left(3x^2 - 5\right)^3 \cdot 6x = 24x \cdot \left(3x^2 - 5\right)^3$$

d) Derivada de un logaritmo (con regla de la cadena):

$$y = \ln\left(x^3 - x\right) \ \rightarrow \ y' = \frac{1}{x^3 - x} \cdot (3x^2 - 1 = \frac{3x^2 - 2}{x^3 - x}$$

e) Derivada de una raíz (con regla de la cadena):

$$y = \sqrt{x - \operatorname{sen} x} \ \ y = \sqrt{x - \operatorname{sen} x} \ \rightarrow \ y' = \frac{1}{2\sqrt{x - \operatorname{sen} x}} \cdot (1 - \cos x) = \frac{1 - \cos x}{2\sqrt{x - \operatorname{sen} x}}$$

f) Derivada de una exponencial (con regla de la cadena):

$$y = e^{x + \cos x} \ \rightarrow \ y' = e^{x + \cos x} \cdot (1 - \operatorname{sen} x)$$

EJERCICIO 3:

$$y = 2x^3 - ax^2 + b \;\rightarrow\; y' = 6x^2 - 2ax$$

si pasa por el punto $(1,\,-1)$, entonces para $x = 1$ es $y = -1$:

$$2 - a + b = -1 \text{ (*)}$$

si tiene un extremo relativo para $x = -2$, entonces para $x = -2$ es $y' = 0$:

$$6 \cdot 4 + 4a = 0 \text{ (**)}$$

De (*) y (**) obtenemos $a = -6$, $b = -9$.

EJERCICIO 4:

Tenemos en cuenta:

- que si la función crece la derivada es positiva y que si decrece la derivada es negativa

- que la derivada (si existe) es cero en los extremos relativos

- que la derivada no existe en el punto anguloso:

Así el esquema de la derivada es: