Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas I – Introducción a las derivadas – 19/06/2018	

EJERCICIO 1: [3] Consideremos la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ 2x^2 - x + 1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de la función.

b) Estudia su derivabilidad y calcula su función derivada.

c) Obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función para $x = 3$.

EJERCICIO 2: [3] Obtén la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = x^3\,\mathrm{e}^x$

b) $y = \dfrac{x^2-4}{2x-1}$

c) $y = \left(2x^3+1\right)^4$

d) $y = \ln\left(x^3-1\right)$

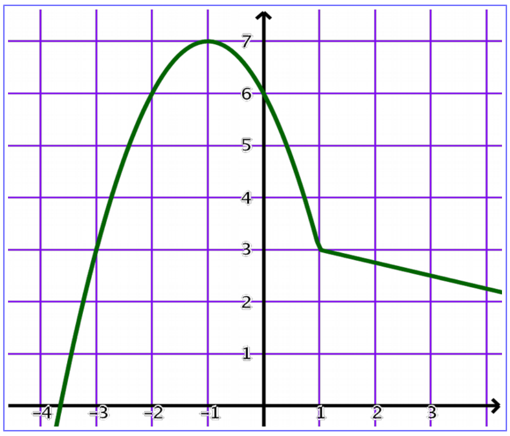
e) $y = \sqrt{x+\cos x}$

f) $y = \mathrm{e}^{x-\operatorname{sen} x}$

EJERCICIO 3: [2]

Halla a y b sabiendo que la función $y = x^3 + ax^2 + b$ pasa por el punto $(2, -1)$ y tiene un extremo relativo para $x = -3$.

EJERCICIO 4: [2] Consideremos la función cuya gráfica $y = f(x)$ es la dibujada.



Escribe una tabla que recoja, razonadamente:

a) los puntos en los que la derivada no existe,

b) los puntos en los que la derivada es cero,

c) los intervalos de signo de la derivada.

EJERCICIO 1:

a) f sólo puede ser discontinua para $x = 2$, pues un separador de fórmulas continuas. Veamos qué ocurre en él:

$x = 2$

VALOR: $f(2) = 3\dot{2} + 1 = 7$

TENDENCIAS: $f(2-) = 3 \cdot 2 + 1 = 7$

$f(2+) = 2 \cdot 2^2 - 2 + 1 = 7$

Concluimos que es continua en $x = 2$.

b) Podemos derivar directamente si $x \neq 2$:

$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad x < 2 \\ 4x - 1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Para $x = 2$, como es continua, podemos hallar las derivadas laterales así:

DERIVADAS LATERALES $\begin{cases} f'(2-) = 3 \\ f'(2+) = 4 \cdot 2 - 1 = 7 \end{cases}$

Como no coinciden concluimos que no es derivable para este valor (se trata de un punto anguloso)

c) La ecuación de la recta tangente para $x = 3$ es

$$y - f(3) = f'(3)(x - 3)$$

Sustituyendo, obtenemos $f(3) = 16$ y $f'(3) = 11$. Así que la fórmula nos queda:

$$y - 16 = 11(x - 3) \ \rightarrow \ y = 11x + 17$$

EJERCICIO 2:

a) Derivada de un producto:

$$y = x^3 e^x \ \rightarrow \ y' = 3x^2 \cdot e^x + x^3 \cdot e^x = e^x \left(3x^2 + x^3\right)$$

b) Derivada de un cociente:

$$y = \frac{x^2 - 4}{2x - 1} \ \rightarrow \ y' = \frac{2x(2x - 1) - 2\left(x^2 - 1\right)}{(2x - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2x + 2}{(2x - 1)^2}$$

c) Derivada de una potencia (con regla de la cadena):

$$y = \left(2x^3 + 1\right)^4 \ \rightarrow \ y' = 4\left(2x^3 + 1\right)^3 \cdot 6x^2 = 24x^2 \cdot \left(2x^3 + 1\right)^3$$

d) Derivada de un logaritmo (con regla de la cadena):

$$y = \ln\left(x^3 - 1\right) \ \rightarrow \ y' = \frac{1}{x^3 - 1} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{x^3 - 1}$$

e) Derivada de una raíz (con regla de la cadena):

$$y = \sqrt{x + \cos x} \ \rightarrow \ y' = \frac{1}{2\sqrt{x + \cos x}} \cdot (1 - \operatorname{sen} x) = \frac{1 - \operatorname{sen} x}{2\sqrt{x + \cos x}}$$

f) Derivada de una exponencial (con regla de la cadena):

$$y = e^{x - \operatorname{sen} x} \ \rightarrow \ y' = e^{x - \operatorname{sen} x} \cdot (1 - \cos x)$$

EJERCICIO 3:

$$y = x^3 + ax^2 + b \;\rightarrow\; y' = 3x^2 + 2ax$$

si pasa por el punto $(2,\,-1)$, entonces para $x = 2$ es $y = -1$:

$$8 + 4a + b = -1 \text{ (*)}$$

si tiene un extremo relativo para $x = -3$, entonces para $x = -3$ es $y' = 0$:

$$3 \cdot 9 - 6a = 0 \text{ (**)}$$

De (*) y (**) obtenemos $a = 4.5$, $b = -27$.

EJERCICIO 4:

Tenemos en cuenta:

- que si la función crece la derivada es positiva y que si decrece la derivada es negativa

- que la derivada (si existe) es cero en los extremos relativos

- que la derivada no existe en el punto anguloso:

Así el esquema de la derivada es: