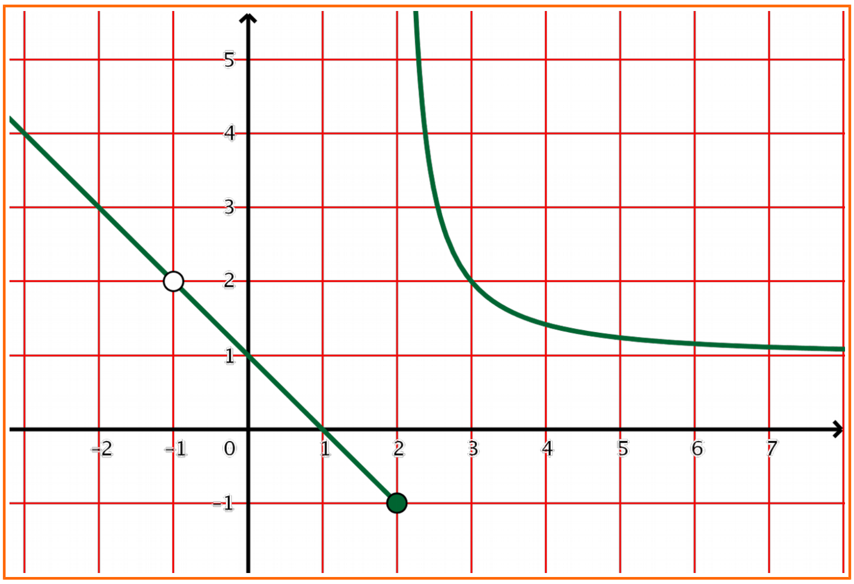
Nombre:____ ***Curso***:_____	
Matemáticas I – Límites y Continuidad de Funciones – 08/06/2018	

EJERCICIO 1: Observa la gráfica de la función $y = f(x)$ y responde:



a) [1,5] Estudia la continuidad de la función, señalando valor y tendencias en las discontinuidades.

b) [0,5] Indica las tendencias de $f(x)$ la función para $x \to \pm\infty$.

c) [0,5] ¿Qué asíntotas tiene la gráfica?

EJERCICIO 2: Dada la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 3^x - 2 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ 16 - 2x^2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

a) [1] Estudia algebraicamente su continuidad.

b) [1] Obtén los límites en el infinito de la función.

c) [0,5] Determina las asíntotas de la gráfica de f

EJERCICIO 3: Sea

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{3x^2 - 9x}$$

a) [0,5] Calcula los límites de $f(x)$ para $x \to \pm\infty$.

b) [2] Estudia la continuidad de la función.

c) [0,5] ¿Cuáles son las asíntotas de su gráfica?

EJERCICIO 4:

a) [1] Si f es una función que verifica $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = L$ y $f(0) = -1$, estudia su continuidad para $x = 0$.

b) [1] Esboza la gráfica de una función f que tenga a la recta $y = 2$ como asíntota horizontal y que verifique $\lim\limits_{x \to -1-} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -1+} f(x) = -\infty$.

EJERCICIO 1:

a) Vemos que es continua en todo punto salvo para $x = 2$ (discontinuidad de salto infinito) y para $x = -1$ (discontinuidad evitable o de agujero).

Veamos en $x = 2$:

Valor: $f(2) = -1$

Tendencias: $f(2-) = -1$

$f(2+) = +\infty$

Veamos en $x = -1$:

Valor: $f(-1) = \text{ no existe}$

Tendencias: $f(-1-) = 2$

$f(-1+) = 2$

b) Las tendencias en el infinito son:
si $x \to -\infty$ es $y \to +\infty$
si $x \to +\infty$ es $y \to +1$

c) Vemos las asíntotas:

Asíntota vertical (por el apartado a): $x = 2$

Asíntota horizontal (por el apartado b): $y = 1\ (x \to +\infty)$

EJERCICIO 2:

a) La función sólo puede ser discontinua en $x = 2$, por ser el separa-fórmulas de trozos continuos.

Veamos en $x = 2$:

Valor: $f(2) = 3^2 - 2 = 7$

Tendencias: $f(2-) = 3^2 - 2 = 7$

$f(2+) = 16 - 2 \cdot 2^2 = 8$

Concluimos que hay una discontinuidad de salto finito ($s = 8 - 7 = +1$) para $x = 2$.

b) Las tendencias en el infinito son:

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(3^{-x} - 2\right) = 3^{-\infty} - 2 = 0 - 2 = -2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(16 - 2x^2\right) = -2\,(+\infty)^2 = -\infty$

c) Veamos las asíntotas:

Asíntotas verticales (por el apartado a): no hay ya que no hay discontinuidades de salto infinito.

Asíntota horizontal (por el apartado b): $y = -2$

EJERCICIO 3:

a) Aplicamos la regla de los grados. Como el grado del numerador y del denominador es el mismo:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 2x - 3}{3x^2 - 9x} = \frac{1}{3}$$

b) La función sólo puede ser discontinua en los ceros del denominador, que son:

$$3x^2 - 9x = 0 \to 3x\,(x-3) = 0 \to x = 0\,, x = 3$$

Veamos en $x = 0$:

Valor: $f\,(0) = \left[\dfrac{-3}{0}\right] = \emptyset$

Tendencias: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \left[\dfrac{-3}{0}\right] = \pm\infty$

Concluimos que hay una discontinuidad de salto infinito para $x = 0$.

Veamos en $x = 3$:

Valor: $f\,(3) = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \emptyset$

Tendencias $\lim\limits_{x \to 3} f\,(x) = \left[\dfrac{0}{0}\right] \stackrel{*}{=} \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x+1)\,\cancel{(x-3)}}{3x\cancel{(x-3)}} = \dfrac{4}{9}$

Concluimos que hay una discontinuidad evitable o de agujero para $x = 3$.

c) Veamos las asíntotas:

Asíntota vertical (por el apartado b): $x = 0$

Asíntota horizontal (por el apartado a): $y = \dfrac{1}{3}$

EJERCICIO 1:

a) Observemos que depende de cuánto valga L:

Si es $L = -1$ valor y tendencia coinciden: f es continua para $x = 0$.

Si es $L \neq -1$ existe la tendencia y es distinta del valor: hay una discontinuidad evitable para $x = 0$.

b) Esta es una de las infinitas posibilidades: