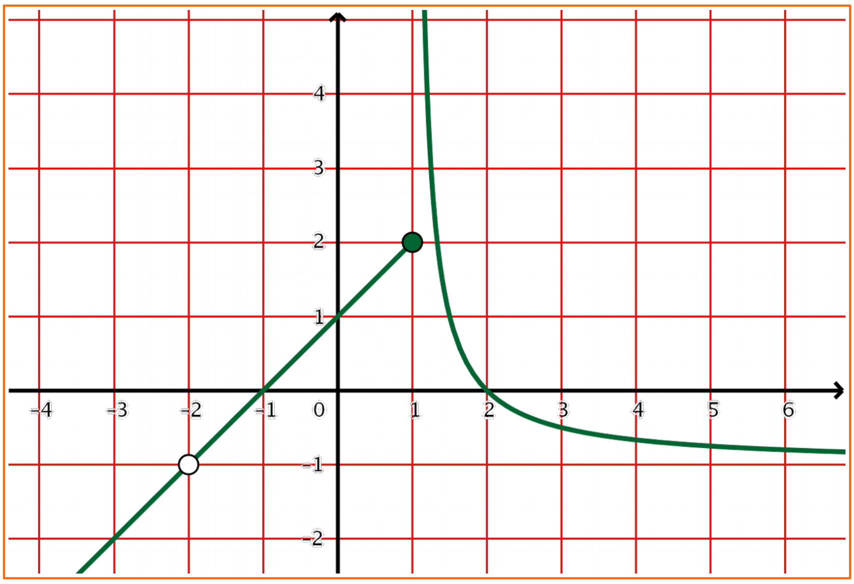
Nombre:____	**Curso**:_____
Matemáticas I – Límites y Continuidad de Funciones – 06/05/2018	

EJERCICIO 1: Observa la gráfica de la función $y = f(x)$ y responde:



a) [1,5] Estudia la continuidad de la función, señalando valor y tendencias en las discontinuidades.

b) [0,5] Indica las tendencias de $f(x)$ la función para $x \to \pm\infty$.

c) [0,5] ¿Qué asíntotas tiene la gráfica?

EJERCICIO 2: Dada la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ 1 + 2^{-x} & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$

a) [1] Estudia algebraicamente su continuidad.

b) [1] Obtén los límites en el infinito de la función.

c) [0,5] Determina las asíntotas de la gráfica de f

EJERCICIO 3: Sea

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x}{x^2 - x - 2}$$

a) [0,5] Calcula los límites de $f(x)$ para $x \to \pm\infty$.

b) [2] Estudia la continuidad de la función.

c) [0,5] ¿Cuáles son las asíntotas de su gráfica?

EJERCICIO 4:

a) [1] Si f es una función que verifica $\lim_{x \to 0} f(x) = a$ y $f(0) = 1$, estudia su continuidad para $x = 0$.

b) [1] Dibuja la gráfica de una función que tenga a la recta $y = 1$ como asíntota horizontal y que verifique $\lim_{x \to 1-} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to 1+} f(x) = -\infty$.

EJERCICIO 1:

a) Vemos que es continua en todo punto salvo para $x = 1$ (discontinuidad de salto infinito) y para $x = -2$ (discontinuidad evitable o de agujero).

Veamos en $x = 1$:

Valor: $f(1) = 2$

Tendencias: $f(1-) = 2$

$f(1+) = +\infty$

Veamos en $x = -2$:

Valor: $f(-2) = \text{ no existe}$

Tendencias: $f(-2-) = -1$

$f(-2+) = -1$

b) Las tendencias en el infinito son:
si $x \to -\infty$ es $y \to -\infty$
si $x \to +\infty$ es $y \to -1$

c) Vemos las asíntotas:

Asíntota vertical (por el apartado a): $x = 1$

Asíntota horizontal (por el apartado b): $y = -1$ $(x \to -\infty)$

EJERCICIO 2:

a) La función sólo puede ser discontinua en $x = -1$, por ser el separa-fórmulas de trozos continuos.

Veamos en $x = -1$:

Valor: $f(-1) = -1 + 2(-1)^2 = 1$

Tendencias: $f(-1-) = -1 + 2(-1)^2 = 1$

$f(-1+) = 1 + 2^{+1} = 3$

Concluimos que hay una discontinuidad de salto finito ($s = 3 - 1 = 2$) para $x = -1$.

b) Las tendencias en el infinito son:

$\lim_{x\to-\infty} \left(x + 2x^2\right) = 2(-\infty)^2 = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + 2^{-x}\right) = 1 + 2^{-\infty} = 1 + 0 = 1$

c) Veamos las asíntotas:

Asíntotas verticales (por el apartado a): no hay ya que no hay discontinuidades de salto infinito.

Asíntota horizontal (por el apartado b): $y = 1$

EJERCICIO 3:

a) Aplicamos la regla de los grados. Como el grado del numerador y del denominador es el mismo:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2 - 4x}{x^2 - x - 2} = \frac{2}{1} = 2$$

b) La función sólo puede ser discontinua en los ceros del denominador, que son:

$$x^2 - x - 2 = 0 \ \rightarrow \ x = -1\,, x = 2$$

Veamos en $x = -1$:

Valor: $f\,(-1) = \left[\dfrac{6}{0}\right] = \emptyset$

Tendencias: $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \left[\dfrac{6}{0}\right] = \pm\infty$

Concluimos que hay una discontinuidad de salto infinito para $x = -1$.

Veamos en $x = 2$:

Valor: $f\,(2) = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \emptyset$

Tendencias $\lim\limits_{x \to 2} f\,(x) = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{*}{=} \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x\cancel{(x-2)}}{(x+1)\,\cancel{(x-2)}} = \dfrac{4}{3}$

Concluimos que hay una discontinuidad evitable o de agujero para $x = 2$.

c) Veamos las asíntotas:

Asíntota vertical (por el apartado b): $x = -1$

Asíntota horizontal (por el apartado a): $y = 2$

EJERCICIO 4:

a) Observemos que depende de cuánto valga a:

Si $a = 1$ entonces valor y tendencia coinciden: f es continua para $x = 0$.

Si $a \neq 1$ entonces existe la tendencia y es distinta del valor: hay una discontinuidad evitable para $x = 0$.

b) Esta es una de las infinitas posibilidades: