Nombre:____ ***Curso***:_____

Matemáticas I – Geometría del plano – 23/4/2018

EJERCICIO 1: Consideremos el triángulo de vértices $A=(1,3)$, $B=(5\,,1)$, $C=(3\,,-1)$.

a) Obtén la ecuación general de la recta AC.

b) ¿Cuál es su pendiente? ¿Qué pendiente tendrá una recta perpendicular a ella?

c) Halla el área del triángulo.

d) Halla la ecuación de la recta altura relativa al vértice A.

e) Obtén la ecuación general de la mediatriz del segmento $\overline{AC}$.

f) Obtén la ecuación general de la mediana relativa al vértice A.

g) Calcula las coordenadas del punto intersección de éstas dos últimas rectas.

EJERCICIO 2: Dados $r: 4x-3y+12=0$, $s: ax+5y+1=0$:

a) Halla los puntos en que r corta a los ejes de coordenadas y dibújala.

b) Halla a sabiendo que r y s son rectas paralelas.

c) Obtén un punto P del eje de ordenadas que diste 3 unidades de la recta r.

EJERCICIO 3: Dados los vectores $\vec{u}=(-1\,,1)$, $\vec{v}=(1\,,0)$:

a) [0,25] Demuestra que $\mathfrak{B}=\{\vec{u}\,,\,\vec{v}\}$ es una base del plano.

b) [0,5] ¿Qué ángulo forman los vectores de dicha base?

c) [0,5] Halla el valor de la proyección del segundo sobre el primero.

d) [0,5] ¿Qué coordenadas tiene en esa base el vector $\vec{x}=(1\,,4)$?

e) [0,25] Obtén un vector unitario con igual dirección y sentido contrario a $\vec{u}$.

Recuperación: 1 (a,b,e,f,g)+ 2 (a,b,c) + 3

EJERCICIO 1: Consideremos el triángulo de vértices $A = (1, 3)$, $B = (5\,, 1)$, $C = (3\,, -1)$.

a) La recta AC pasa por A con dirección $\overrightarrow{AC}$:

$$\left.\begin{array}{r} A = (1\,, 3) \\ \overrightarrow{AC} = C - A = (2\,, -4) \end{array}\right\} \rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{-4}$$

Multiplicando en cruz, trasponiendo y simplificando:

$$AC : -4x + 4 = 2y + 8 \rightarrow 3x + 2y + 4 = 0 \rightarrow 2x + y + 2 = 0$$

b) Hallemos la pendiente de la recta anterior:

$$\overrightarrow{AC} = (2\,, -4) \rightarrow m = \frac{-4}{2} \rightarrow m = -2$$

Si m es la pendiente de una recta perpendicular entones:

$$m \cdot m' = -1 \rightarrow\ -2m' = -1 \rightarrow m' = \frac{1}{2}$$

c) Para hallar el área del triángulo tomamos como recta base AC. Así la altura es la distancia del vértice B a la recta AC:

$$base = \overrightarrow{AC} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$
$$altura = \mathrm{d}\,(C\,, AB) = \frac{|2 \cdot 4 + 1 + 2|}{\sqrt{5}} = \frac{13}{\sqrt{5}}$$

Luego:

$$\text{Superficie} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{\sqrt{20} \cdot \dfrac{13}{\sqrt{5}}}{2} \quad \rightarrow \quad \text{Superficie} = 13\ (u^2)$$

d) Como la altura es perpendicular a la base BC, buscamos un ortogonal a la base:

$$\overrightarrow{BC} = (-2\,, -2) \rightarrow \vec{v} = (2\,, -2)$$

Así, la altura tiene de ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} A = (1\,, 3) \\ \vec{v} = (2\,, -2) \end{array}\right\} \rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} \rightarrow -2x + 2 = 2y - 6 = 0 \rightarrow x + y - 4 = 0$$

e) La mediatriz es perpendicular también al segmento $\overline{AC}$, luego un vector director de ella es $\vec{v} = (4\,, 2)$. Y pasa por el punto medio :

$$M_{\overline{AC}} = \frac{A+C}{2} = (2\,, 1)$$

Luego su ecuación es:

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{2} \rightarrow 2x - 4 = 4y - 4 \rightarrow x - 2y = 0$$

f) Para hallar la mediana relativa al vértice A, lo primero es obtener el punto medio del lado opuesto:

$$M_{\overline{BC}} = \frac{B+C}{2} = (4\,, 0)$$

La mediana pasa por el vértice A y por ese punto medio:

$$\left.\begin{array}{r} A = (1\,, 3) \\ \overrightarrow{AM} = (3\,, -3) \end{array}\right\} \rightarrow \frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{-3} \rightarrow -3x + 3 = 3y - 9 \rightarrow -x - y + 4 = 0$$

g) Calcula las coordenadas del punto intersección de éstas dos últimas rectas.

Para obtener el corte de ambas rectas resolvemos el sistema que forman sus ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x-2y=0 \\ -x-y+4=0 \end{array}\right\} \to\ x=\frac{8}{3}\,y=\frac{4}{3}\ \to\ P=\left(\frac{8}{3}\,,\frac{4}{3}\right)$$

EJERCICIO 2: Dados $r : 4x - 3y + 12 = 0$, $s : ax + 5y + 1 = 0$:

a) Halla los puntos en que r corta a los ejes de coordenadas y dibújala.

Corte con eje X: $y = 0 \ \to\ 4x - 12 = 0 \ \to\ x = 3 \ \to\ A = (3\,, 0)$

Corte con eje Y: $x = 0 \ \to\ -3y - 12 = 0 \ \to\ y = -4 \ \to\ B = (0\,, -4)$

b) Dos rectas son paralelas cuando tienen la misma pendiente:

$\vec{v}_r = (3\,, 4) \to m_r = \dfrac{4}{3}$

$\vec{v}_s = (-5\,, a) \to m_s = -\dfrac{a}{5}$

Igualando:

$$m_r = m_s \to -\frac{a}{5} = -\frac{4}{3} \to a = -\frac{20}{3}$$

c) El punto será $P = (0\,, b)$. Aplicando la fórmula de la distancia de un punto a una recta:

$$\mathrm{d}\,(P\,, r) = 3 \to \frac{|0-3b+12|}{\sqrt{16+9}} = 3 \to |-3b+12| = 15 \to \left|\begin{array}{l} -3b+12=+15 \to b=-1 \\ -3b+12=-15 \to b=-9 \end{array}\right.$$

EJERCICIO 3:

a) Basta comprobar que son dos vectores independientes:

$$\frac{1}{-1} \neq \frac{0}{1} \ \to\ \{\vec{u}\,, \vec{v}\}\ \text{son independientes}$$

b) Si llamamos φ al ángulo:

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{-1\cdot 1 + 0\cdot 1}{\sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{0^2+1^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \to \varphi = 135^\circ$$

c) La proyección del segundo sobre el primero

$$p = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

d) Si las coordenadas son $(s\,, t)$, entonces:

$$\vec{x} = s\vec{u} + t\vec{v} \to (1\,, 4) = s\cdot(-1\,, 1) + t\cdot(1\,, 0) \to \left\{\begin{array}{r} -s+t=1 \\ s=4 \end{array}\right| \to \{s=4\,, t=5\}$$

e) El vector unitario de igual dirección y sentido contrario es

$$-\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = -\frac{(-1\,, 1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$