

Nombre: _____

Curso: _____

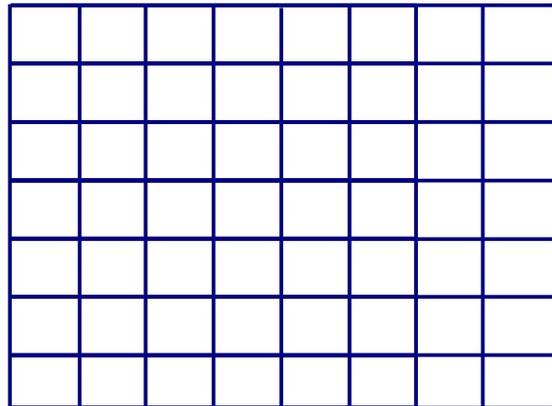
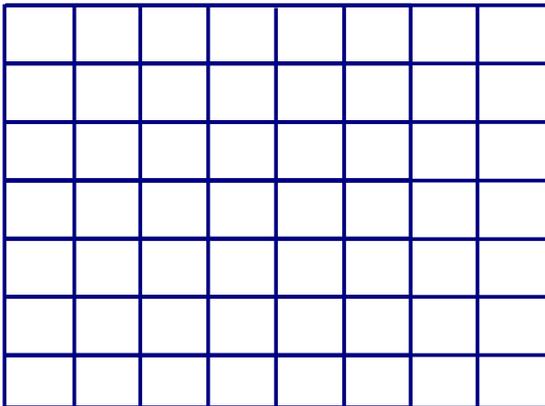
Matemáticas I – Geometría del plano – 23/4/2018

EJERCICIO 1: Consideremos el triángulo de vértices $A = (1, 3)$, $B = (5, 1)$, $C = (3, -1)$.

- Obtén la ecuación general de la recta AC .
- ¿Cuál es su pendiente? ¿Qué pendiente tendrá una recta perpendicular a ella?
- Halla el área del triángulo.
- Halla la ecuación de la recta altura relativa al vértice A .
- Obtén la ecuación general de la mediatriz del segmento \overline{AC} .
- Obtén la ecuación general de la mediana relativa al vértice A .
- Calcula las coordenadas del punto intersección de éstas dos últimas rectas.

EJERCICIO 2: Dados $r : 4x - 3y + 12 = 0$, $s : ax + 5y + 1 = 0$:

- Halla los puntos en que r corta a los ejes de coordenadas y dibújala.
- Halla a sabiendo que r y s son rectas paralelas.
- Obtén un punto P del eje de ordenadas que diste 3 unidades de la recta r .



EJERCICIO 3: Dados los vectores $\vec{u} = (-1, 1)$, $\vec{v} = (1, 0)$:

- [0,25] Demuestra que $\mathfrak{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ es una base del plano.
- [0,5] ¿Qué ángulo forman los vectores de dicha base?
- [0,5] Halla el valor de la proyección del segundo sobre el primero.
- [0,5] ¿Qué coordenadas tiene en esa base el vector $\vec{x} = (1, 4)$?
- [0,25] Obtén un vector unitario con igual dirección y sentido contrario a \vec{u} .

EJERCICIO 1: Consideremos el triángulo de vértices $A = (1, 3)$, $B = (5, 1)$, $C = (3, -1)$.

a) La recta AC pasa por A con dirección \overrightarrow{AC} :

$$\left. \begin{array}{l} A = (1, 3) \\ \overrightarrow{AC} = C - A = (2, -4) \end{array} \right\} \rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{-4}$$

Multiplicando en cruz, trasponiendo y simplificando:

$$AC : -4x + 4 = 2y + 8 \rightarrow 3x + 2y + 4 = 0 \rightarrow 2x + y + 2 = 0$$

b) Hallemos la pendiente de la recta anterior:

$$\overrightarrow{AC} = (2, -4) \rightarrow m = \frac{-4}{2} \rightarrow m = -2$$

Si m es la pendiente de una recta perpendicular entonces:

$$m \cdot m' = -1 \rightarrow -2m' = -1 \rightarrow m' = \frac{1}{2}$$

c) Para hallar el área del triángulo tomamos como recta base AC . Así la altura es la distancia del vértice B a la recta AC :

$$\text{base} = \overrightarrow{AC} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

$$\text{altura} = d(C, AB) = \frac{|2 \cdot 4 + 1 + 2|}{\sqrt{5}} = \frac{13}{\sqrt{5}}$$

Luego:

$$\text{Superficie} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{\sqrt{20} \cdot \frac{13}{\sqrt{5}}}{2} \rightarrow \text{Superficie} = 13 \text{ (u}^2\text{)}$$

d) Como la altura es perpendicular a la base BC , buscamos un ortogonal a la base:

$$\overrightarrow{BC} = (-2, -2) \rightarrow \vec{v} = (2, -2)$$

Así, la altura tiene de ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} A = (1, 3) \\ \vec{v} = (2, -2) \end{array} \right\} \rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} \rightarrow -2x + 2 = 2y - 6 = 0 \rightarrow x + y - 4 = 0$$

e) La mediatriz es perpendicular también al segmento \overline{AC} , luego un vector director de ella es $\vec{v} = (4, 2)$. Y pasa por el punto medio :

$$M_{AC} = \frac{A+C}{2} = (2, 1)$$

Luego su ecuación es:

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{2} \rightarrow 2x - 4 = 4y - 4 \rightarrow x - 2y = 0$$

f) Para hallar la mediana relativa al vértice A , lo primero es obtener el punto medio del lado opuesto:

$$M_{BC} = \frac{B+C}{2} = (4, 0)$$

La mediana pasa por el vértice A y por ese punto medio:

$$\left. \begin{array}{l} A = (1, 3) \\ \overrightarrow{AM} = (3, -3) \end{array} \right\} \rightarrow \frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{-3} \rightarrow -3x + 3 = 3y - 9 \rightarrow -x - y + 4 = 0$$

g) Calcula las coordenadas del punto intersección de éstas dos últimas rectas.

Para obtener el corte de ambas rectas resolvemos el sistema que forman sus ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y = 0 \\ -x - y + 4 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{8}{3} \quad y = \frac{4}{3} \rightarrow P = \left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3} \right)$$

EJERCICIO 2: Dados $r : 4x - 3y + 12 = 0$, $s : ax + 5y + 1 = 0$:

a) Halla los puntos en que r corta a los ejes de coordenadas y dibújala.

Corte con eje X: $y = 0 \rightarrow 4x - 12 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow A = (3, 0)$

Corte con eje Y: $x = 0 \rightarrow -3y - 12 = 0 \rightarrow y = -4 \rightarrow B = (0, -4)$

b) Dos rectas son paralelas cuando tienen la misma pendiente:

$$\vec{v}_r = (3, 4) \rightarrow m_r = \frac{4}{3}$$

$$\vec{v}_s = (-5, a) \rightarrow m_s = -\frac{a}{5}$$

Igualando:

$$m_r = m_s \rightarrow -\frac{a}{5} = -\frac{4}{3} \rightarrow a = -\frac{20}{3}$$

c) El punto será $P = (0, b)$. Aplicando la fórmula de la distancia de un punto a una recta:

$$d(P, r) = 3 \rightarrow \frac{|0 - 3b + 12|}{\sqrt{16 + 9}} = 3 \rightarrow |-3b + 12| = 15 \rightarrow \begin{cases} -3b + 12 = +15 \rightarrow b = -1 \\ -3b + 12 = -15 \rightarrow b = -9 \end{cases}$$

EJERCICIO 3:

a) Basta comprobar que son dos vectores independientes:

$$\frac{1}{-1} \neq \frac{0}{1} \rightarrow \{\vec{u}, \vec{v}\} \text{ son independientes}$$

b) Si llamamos φ al ángulo:

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{-1 \cdot 1 + 0 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{0^2 + 1^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \varphi = 135^\circ$$

c) La proyección del segundo sobre el primero

$$p = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

d) Si las coordenadas son (s, t) , entonces:

$$\vec{x} = s\vec{u} + t\vec{v} \rightarrow (1, 4) = s \cdot (-1, 1) + t \cdot (1, 0) \rightarrow \begin{cases} -s + t = 1 \\ s = 4 \end{cases} \rightarrow \{s = 4, t = 5\}$$

e) El vector unitario de igual dirección y sentido contrario es

$$-\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = -\frac{(-1, 1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$